सांख्यिकी के प्रारम्भिक सिद्धान्त

(Elementary Statistical Methods)

लेखक

मुकुन्द लाल, एम० कॉम०,

प्राध्यापक

वाणिज्य विभाग, काशी हिन्दू विश्वविद्यालय

प्रकाशक

मनोज प्रकाशन

विश्वविद्यालय मार्ग, लंका, वाराणसी।

सत्यमेव जयते

अपनी प्रिय धर्मपत्नी श्रीमती चन्द्रावती देवी

की पुण्य स्मृति में

प्रोफेसर प्राणनाथ

डी० एस सी० द्वारा भेंट ।

सांख्यिकी के प्रारम्भिक सिद्धान्त

(Elementary Statistical Methods)

लेखक

मुकुन्द लाल, एम० कॉम०,

प्राध्यापक

वाणिज्य विभाग, काशी हिन्दू विश्वविद्यालय

प्रकाशक

मनोज प्रकाशन

विश्वविद्यालय मार्ग, लंका, वाराणसी।

वितरक
बनारस बुक कारपोरेशन
विश्वविद्यालय मार्ग, लंका, वाराणसी

प्रथम संस्करण
जुलाई, १९५८

मूल्य ११.०० रुपये

मुद्रक
रामकृष्ण दास
काशी हिन्दू विश्वविद्यालय प्रेस, वाराणसी।

प्रस्तावना

आधुनिक युग में सांख्यिकी का अध्ययन समाज के सभी अंगों के लिये आवश्यक हो गया है। प्रायः सभी भारतीय विश्वविद्यालयों के पाठ्य-क्रम में 'सांख्यिकी' को एक विशिष्ट स्थान प्राप्त है। किन्तु हिन्दी में उपयुक्त पाठ्य-पुस्तकों की कमी तथा विषय की क्लिष्टता के कारण साधारण विद्यार्थियों में इस विषय के प्रति उदासीनता दिखलाई पड़ती है और इतना महत्वपूर्ण विषय भी उन्हें शुष्क व नीरस जान पड़ता है। इन कठिनाइयों को ध्यान में रख कर ही इस पुस्तक की रचना की गई है।

प्रस्तुत पुस्तक में सांख्यिकी के विभिन्न सिद्धान्तों का विवेचन एवं स्पष्टीकरण करने के लिये विषय-सामग्री का विभाजन व उदाहरणों का संकलन इस ढंग से किया गया है कि विषय में स्वभाविक रुचि उत्पन्न होने के साथ ही उसके अध्ययन में क्रमबद्धता बनी रहे। पुस्तक की भाषा सरल, स्पष्ट व प्रवाहयुक्त रक्खी गई है तथा उदाहरणों को विधिवत समझाने का प्रयास किया गया है। विन्दुरेखीय रीति से तथा चित्रों द्वारा समंक-प्रदर्शन करने के लिये नवीनतम आर्थिक व व्यावसायिक समंकों का उपयोग किया गया है जिससे विषय की जानकारी के साथ ही विद्यार्थियों के सामान्य-ज्ञान में भी वृद्धि हो सके। अंकात्मक प्रश्नों के अभ्यासार्थ प्रत्येक अध्याय के अन्त में भारतीय विश्वविद्यालयों की विभिन्न परीक्षाओं के चुने हुए प्रश्न व उनके उत्तर भी दिये गये हैं।

इस पुस्तक की रचना में अनेक अंग्रेजी व अमेरिकन पुस्तकों से प्रेरणा मिली है जिनके लेखकों के प्रति आभार प्रदर्शित करना मैं अपना कर्तव्य समझता हूँ। मैं अपने आचार्य तथा वाणिज्य विभाग के अध्यक्ष प्रोफेसर रमन लाल अग्रवाल का विशेष रूप से कृतज्ञ हूँ जिनके मार्ग-प्रदर्शन व अमूल्य सुझावों के फलस्वरूप ही आज यह पुस्तक आपकी सेवा में प्रस्तुत हो सकी है। अपने विभाग के अन्य सदस्यों का भी मैं आभारी हूँ जिनका सहयोग मुझे सदा उपलब्ध था। पुस्तक

के प्रकाशन में बनारस बुक कारपोरेशन के श्री लक्ष्मी नारायण जी के अथक परिश्रम तथा मुद्रण में काशी हिन्दू विश्वविद्यालय प्रेस के मैनेजर श्री रामकृष्ण दास एवं उनके सहकारियों के सक्रिय सहयोग के लिये भी मैं अत्यन्त ही कृतज्ञ हूँ। मैं उन सज्जनों का भी आभारी रहूँगा जो पुस्तक को अधिक उपयोगी बनाने के लिये अपने सुझाव प्रस्तुत करेंगे।

आशा है पुस्तक अध्यापकों, विद्यार्थियों व व्यवसायी वर्ग के लोगों को पसन्द आयेगी।

वाणिज्य विभाग
काशी हिन्दू विश्वविद्यालय

—मुकुन्द लाल

विषय-सूची (Contents)

अध्याय १

सांख्यिकी की उत्पत्ति एवं उसका विकास
(Origin and Development of Statistics)

(अंकों का महत्व—सांख्यिकी की उत्पत्ति—सांख्यिकी का अर्थ—समंकों की विशेषतायें—सांख्यिकी का क्षेत्र तथा उसके विभाग—सांख्यिकीय रीतियाँ—व्यावहारिक अथवा क्रियात्मक सांख्यिकी—सांख्यिकी का गणित से सम्बन्ध—सांख्यिकी का अर्थशास्त्र से सम्बन्ध—सांख्यिकी की सीमायें—सांख्यिकी विज्ञान है या कला ?—सांख्यिकी की परिभाषा—प्रश्न)

अंकों का महत्व (Importance of Numbers)

प्राचीन काल में एक समय ऐसा भी था जब लोग अंकों से अनभिज्ञ थे। किन्तु ज्यों ज्यों लोगों का ज्ञान बढ़ता गया उन्हें अपने ज्ञान को स्पष्टरूप से व्यक्त करने तथा अपने कथन की पुष्टि करने के लिए अंकों का सहारा लेना पड़ा। यदि सचमुच देखा जाय तो सभ्यता के विकास में अंकों ने अत्यधिक योग दिया है। विज्ञान तो अंकों का सर्वदा ऋणी रहेगा क्योंकि वैज्ञानिकों को अपने अनुसंधान कार्य में सूक्ष्म से सूक्ष्म विश्लेषण करने पड़ते हैं जिनमें अंकों की प्रधानता रहती है। कुछ व्यक्तियों का तो यह विचार है कि जिस 'ज्ञान' की पृष्ठभूमि अंकों पर आधारित नहीं है, वह वास्तव में समुचित 'ज्ञान' ही नहीं है। लॉर्ड केलविन नामक विद्वान ने तो यहाँ तक कह डाला है—"जिस विषय के बारे में आप बात कर रहे हैं उसे यदि आप अंकों द्वारा माप सकते हैं तथा व्यक्त कर सकते हैं तो आप उसके बारे में कुछ जानते हैं; किन्तु जब आप उस विषय को अंकों द्वारा माप नहीं सकते, उसे अंकों द्वारा व्यक्त नहीं कर सकते तो आपका ज्ञान क्षुद्र तथा असन्तोषजनक कोटि का है।"*

सांख्यिकी (Statistics) का ज्ञान भी अंकों पर ही आधारित है किन्तु इसमें प्रयोग किए जाने वाले अंकों की कुछ निजी विशेषताएँ होती हैं जिन्हें

---

* "When you can measure what you are speaking about and express it in numbers you know something about it; but when you cannot measure it, when you cannot express it in numbers, your knowledge is of a meagre and unsatisfactory kind."—**Lord Kelvin.**

किसी परीक्षण (Experiment), विश्लेषण (Analysis), निर्वचन (Interpretation) एवं अनुसंधान (Investigation) के हेतु कुछ विशेष वैज्ञानिक रीतियों से एकत्र किया जाता है। अतः सांख्यिकी में प्रयोग किये जाने वाले अंकों को 'समंक' कहा जाता है।

'सांख्यिकी' की उत्पत्ति (Origin of Statistics)

Statist, Statistical तथा Statistics आदि शब्दों की उत्पत्ति सत्रहवीं शताब्दी के पूर्व हुई है। आँग्लभाषा के ये शब्द शायद लैटिन के 'Status', इटैलियन के 'Statista' तथा जर्मन के 'Statistik' आदि शब्दों के आधार पर बने हैं जिनका अर्थ है— राजनैतिक राज्य (Political State)। Statist शब्द का प्रयोग महाकवि शेक्सपियर (Shakespeare) ने अपने नाटक हैम्लेट (Hamlet)* तथा साइम्बलाइन (Cymbeline)† में व मिल्टन (Milton) ने अपने काव्य पैराडाइज रिगेंड (Paradise Regained)‡ में भी किया है जिसका तात्पर्य एक ऐसे उच्च राज्य कर्मचारी से है जो राजनैतिक कार्यों में कुशल हो तथा सरकार की नीति का निर्धारण करता हो।

सांख्यिकी का अभ्युदय तथा विकास मुख्यतः दो कारणों से हुआ है :—

(१) शासन-प्रबन्ध की सुविधा के लिये; तथा

(२) खेलों की जोखिम कम करने के लिये।

शासन-कार्य को सुचारुरूप से चलाने के लिए तथा विभिन्न राजनैतिक समस्याओं के निरूपण व हल के लिये सांख्यिकी का प्रयोग प्राचीन समय से होता आ रहा है। इतिहास में इसके अनेक उदाहरण पाये जाते हैं। अपने राज्य की आर्थिक स्थिति का अध्ययन करने के लिये तथा सैनिक-संगठन के लिये सम्राटों को आँकड़े एकत्रित करने पड़ते थे ताकि वे यह जान सकें

---

* Shakespeare : *Hamlet*, 1602 (Act 5, Scene 2)
I once did hold it, as our Statists do,
A baseness to write fair, and labour'd much
How to forget that learning.

† Shakespeare : *Cymbeline*, 1610 (Act 2, Scene 4)
I do believe,
Statist though I am none, nor like to be.

‡ Milton : *Paradise Regained*, 1671 (Book 4)
Their orators though then extolest; as those
The top of eloquence; Statists indeed
And lovers of their country as may seem.

कि वे कर के रूप में कितनी आय प्राप्त कर सकते हैं और आवश्यकता पड़ने पर कितने सैनिक एकत्र कर सकते हैं। इस प्रकार के आँकड़े मिश्र के सम्राट रेम्स द्वितीय (Rames II) ने करीव ३०५० वर्ष ई० पू० एकत्रित कराये थे जव वहाँ जगत्-प्रसिद्ध पिरामिडों का निर्माण कराया गया था। मेगैस्थनीज़ (Megasthnese) नामक यूनानी राजदूत ने भी मौर्य-कालीन शासन-प्रवन्ध का वर्णन करते समय इस विषय की चर्चा की है और वतलाया है कि अपने शासन-प्रवन्ध को उन्नतिशील वनाने के लिये चन्द्रगुप्त मौर्य ने आय-व्यय, जन्म-मरण आदि सम्बन्धी आँकड़ों को इकट्ठा कराने के लिये अनेक कमेटियाँ वनाई थीं। मुगल सम्राट अकवर के काल में उसके मंत्री टोडरमल ने भूमि की नाप कराई थी तथा लगान का प्रवन्ध किया था। इसका वर्णन हमें अवुलफज़ल की रचना आइन-ए-अकबरी में मिलता है।

केवल भारतवर्ष अथवा मिश्र में ही नहीं, रोम, यूनान, इँगलैंड, जर्मनी आदि अनेक समृद्ध देशों में भी ऐसे सांख्यिकीय आँकड़े एकत्र किये जाते थे। इसी कारण से कुछ विद्वानों ने सांख्यिकी को 'राज्य-विज्ञान' (Science of Statecraft) अथवा 'सम्राटों का विज्ञान' (Science of Kings) कहा है। इस आधार पर १७ वीं शताब्दी में समुचित रूप से इस विषय का अध्ययन करने का श्रेय गॉटफ्राएड एचेनवाल (Gottfried Achenwall) को है जिन्हें 'सांख्यिकी का पिता' (Father of Statistics)कहा जाता है। सांख्यिकी को कुछ विद्वानों ने 'राज्य-गणित' (Political Arithmetic) भी कहा है जिनमें विलियम पेटी (William Petty) प्रमुख हैं। कैप्टन जॉन ग्राउन्ट (Captain John Graunt), कैस्पर न्यूमैन (Casper Newman), एडमंड हैली (Edmund Hally), जे० पी० सस्मिल्क (J. P. Sussmilch) आदि सांख्यिकों ने जन्म-मरण सम्वन्धी अनेक समस्याओं का विस्तारपूर्वक अध्ययन किया जिसके आधार पर उन्होंने अनेक महत्वपूर्ण नियमों का प्रतिपादन किया है।

१८ वीं शताब्दी में सांख्यिकी के विकास का इतिहास अत्यन्त ही रोचक है। इस काल में धनी वर्ग के लोग जुये (Gambling) में विशेष रुचि रखते थे। उनमें अनेक ऐसे थे जिनका यही मुख्य पेशा था। समय-समय पर जुये की जोखिम घटाने के विचार से ये लोग तत्कालीन गणितज्ञों की सहायता भी लेते थे। ये गणितज्ञ उन्हें उपयुक्त सलाह देते थे और अपने

महत्वपूर्ण हल पत्र-पत्रिकाओं में प्रकाशित कराते थे। इन गणितज्ञों में अनेक तो स्वयं खिलाड़ी थे। कार्डन (Cardan) ने इस विषय में विशेष अध्ययन किया और एक पुस्तक भी प्रकाशित की जिसमें उसने विभिन्न खेलों की जोखिमों पर प्रकाश डाला। उसका विश्वास था कि प्रत्येक खेल में कुछ निश्चित नियमों का ध्यान रखने पर हार से बचा जा सकता है। खेल से सम्बन्धित कुछ प्रश्नों का हल निकालने के लिए पैस्कल (Pascal) तथा फरमैट (Farmat) नामक गणितज्ञों के बीच एक बार पत्र व्यवहार हुआ। कहा जाता है कि ये पत्र ही वास्तव में संभावना–सिद्धान्त (Theory of Probability) की नींव हैं जिनके आधार पर जेम्स बर्नौली (James Bernoulli) तथा उसके भतीजे डैनियल बर्नौली (Daniel Bernoulli) ने संभावना–सिद्धान्त को वर्तमान स्वरूप दिया। इसी प्रकार डि मॉयर (De Moivre) नामक एक गणितज्ञ ने अपने किसी धनी मित्र की पहेलियाँ हल करते समय सामान्य वक्र (Normal Curve) के सूत्र को जन्म दिया जो सांख्यिकी में अपना महत्वपूर्ण स्थान रखता है।

धीरे धीरे सांख्यिकी का प्रयोग अन्य समस्याओं का हल करने के लिए किया जाने लगा। गॉस (Gauss), लेक्सिस (Lexis), चार्लियर (Charlier) आदि सांख्यिकों ने नये-नये नियमों का प्रतिपादन किया। बेल्जियम निवासी क्वेटलेट (Quetelet) ने तो ज्योतिष (Astronomy), भौतिकशास्त्र (Physics), अन्तरिक्ष शास्त्र (Meteorology) आदि विभिन्न शास्त्रों में सांख्यिकीय रीतियों के प्रयोग का महत्व बतलाया। इंग्लैंड के गाल्टन (Galton) नामक सांख्यिक ने, जो जन्मशास्त्र (Genetics) में विशेष रुचि रखता था, अनेक महत्वपूर्ण खोजें कीं जिनके कारण शिक्षा (Education) तथा मनोविज्ञान (Psychology) को पर्याप्त सहायता प्राप्त हुई। गाल्टन ने ही मध्यका (Median), चतुर्थांश (Quartiles), चतुर्थक-विचलन (Quartile Deviation), प्रतीप-गमन (Regression) तथा सह-सम्बन्ध (Correlation) आदि सांख्यिकीय रीतियों को जन्म दिया। कार्ल पियर्सन (Karl Pearson) नामक सांख्यिक ने भी सांख्यिकी की उन्नति में अपना पूर्ण सहयोग दिया है। उसने प्राणिशास्त्र (Biology) की अनेक समस्याओं पर प्रकाश डाला है।

वर्तमान समय में तो शायद ही कोई ऐसा विषय होगा जिसमें सांख्यिकी का सफल प्रयोग न होता हो। प्रसिद्ध सांख्यिक डा० बाउले का मत है—

"सांख्यिकी का ज्ञान एक विदेशी भाषा अथवा बीजगणित के समान है जो किसी भी समय तथा किसी भी दशा में लाभदायक सिद्ध हो सकता है।* कहने का तात्पर्य यह है कि सांख्यिकी इस समय एक विश्वव्यापी विज्ञान हो गया है जिसकी सहायता से किसी भी समस्या पर पर्याप्त प्रकाश डाला जा सकता है, यदि उस समस्या से सम्वन्धित आँकड़े उपलब्ध हैं।

सांख्यिकी का अर्थ (Meaning of Statistics)

'सांख्यिकी' (Statistics) शब्द का प्रयोग एकवचन तथा बहुवचन दोनों में किया जाता है किन्तु दोनों के अर्थ में बहुत अंतर है। जब इस शब्द का प्रयोग एकवचन में किया जाता है तो इसका अर्थ एक 'विज्ञान' के रूप में लगाया जाता है, परन्तु जब इसका प्रयोग बहुवचन में किया जाता है तो इसका अर्थ 'आँकड़ों' के रूप में लगाया जाता है जिन्हें 'समंक' भी कहते हैं। आक्स-फोर्ड कॉन्साइज़ डिक्शनरी (Oxford Concise Dictionary) में इस शब्द का अर्थ इस प्रकार दिया गया है :—

STATISTICS—(*Treated as Plural*) : Numerical facts, systematically collected, as statistics of population, crime, etc., (*Treated as Singular*) : Science of collecting, classifying, and using statistics.

विभिन्न विद्वानों ने साँख्यिकी की परिभाषा विभिन्न ढंग से दी है। इस विषय की व्याख्या कुछ लोगों ने 'समंक' के दृष्टिकोण से तथा कुछ लोगों ने 'विज्ञान' के दृष्टिकोण से की है। पहले हम उन परिभाषाओं पर विचार करेंगे जो साँख्यिकी का निरूपण 'समंक' के रूप में करती हैं; फिर उन परिभाषाओं पर जो इस शास्त्र का निरूपण 'विज्ञान' के रूप में करती हैं। लेकिन परिभाषाओं की उचित रीति से विवेचना करने के लिये, ताकि उसकी कोई मान्य परिभाषा निश्चित की जा सके, समंकों की मूल विशेषतायें (Characteristics), साँख्यिकी का क्षेत्र (Scope) तथा उसकी सीमाओं (Limitations) की जानकारी प्राप्त कर लेना नितान्त आवश्यक है क्योंकि एक श्रेष्ठ परिभाषा में उपर्युक्त वातों का समावेश होना चाहिये।

---

* A knowledge of statistics is like a knowledge of foreign language or algebra ; it may prove of use at any time under any circumstances—**Dr. Bowley.**

समंकों की विशेषतायें (Characteristics of Statistics)

'समंक' साँख्यिकी की विषय-सामग्री (Subject-matter) हैं। अतः इनमें कुछ ऐसी विशेषताओं का होना आवश्यक है ताकि उनमें सभी रीतियों का प्रयोग किया जा सके। समंकों में निम्नलिखित विशेषतायें होनी चाहिये :—

(१) **समंक तथ्यों के समूह हैं** (Statistics are aggregate of facts)—अकेले अंकों (जैसे ५, १०, ४२, ६८ इत्यादि) को सांख्यिकी में कोई महत्व नहीं दिया जाता क्योंकि उनसे किसी समस्या पर कोई प्रकाश नहीं पड़ता। किन्तु अंकों की एक शृंखला अथवा माला (Series) को हम समंक कह सकते हैं। यदि किसी देश में रहने वाले व्यक्तियों में से केवल एक व्यक्ति की आय ली जाय तो वह समंक नहीं कही जा सकती किन्तु यदि बहुत से व्यक्तियों की आय का संकलन किया जाय तो तत्संबंधी अंक 'समंक' कहलायेंगे।

(२) **समंक अंकों के रूप में व्यक्त किये जाते हैं** (Statistics are numerically or quantitatively expressed)—समंकों का संकलन अंकों में ही होना आवश्यक है। यदि तथ्यों को 'हां,' 'नहीं,' 'अच्छा', 'बुरा' आदि शब्दों द्वारा व्यक्त किया जाता है तो उन्हें समंक नहीं कहा जा सकता। यदि किसी देश के निवासियों की आर्थिक जाँच की जाय और तत्संबंधी तथ्यों को 'अमीर', 'गरीब' तथा 'मध्यम श्रेणी', इन तीन वर्गों में विभाजित किया जाय तो इन्हें हम समंक नहीं कह सकते।

(३) **समंक विभिन्न कारणों से प्रभावित रहते हैं** (Statistics are affected to a marked extent by a multiplicity of causes)—उदाहरण के लिये यदि उपज संबंधी समंक एकत्रित किये जायँ तो उन पर खेतों के आकार, बीज, खाद, वर्षा, औजारों की दशा, खेती के ढंग आदि बहुत से कारणों का प्रभाव रहता है जिनके कारण उपज कम अथवा अधिक होती है। सांख्यिक (Statistician) इन्हीं कारणों का विश्लेषण करता है व उनके प्रभावों को समझने की चेष्टा करता है।

(४) **समंकों का आगणन एवं संकलन किसी पूर्व-निश्चित कार्य के लिये किया जाता है** (Statistics are enumerated or collected for a predetermined purpose)—कार्य का पूर्वनिश्चय अथवा उसका

लक्ष्य इसलिये निर्धारित कर लिया जाता है कि समंकों का संकलन पर्याप्त मात्रा में तथा निर्दिष्ट दिशा में हो सके। तभी उन समंकों की सहायता से निश्चित निष्कर्षों पर पहुंचा जा सकता है, जिसकी कल्पना साँख्यिक (Statistician) कर रहा है।

(५) **समंकों के संकलन में यथोचित शुद्धता होनी चाहिये** (Statistics are collected according to reasonable standards of accuracy)—एकत्रित समंकों में अनेक अशुद्धियों का होना सम्भव है किन्तु जैसा हम आगे देखेंगे कुछ अशुद्धियां जिन्हें हम 'सांख्यिकीय विभ्रम' (Statistical Errors) कहते हैं, ऐसी होती हैं जिनके रहते हुए भी हमारे परिणामों पर विशेष प्रभाव नहीं पड़ता। समंकों का संकलन करते समय इस बात का ध्यान आवश्यक है कि यदि अत्यन्त शुद्ध परिणाम जानना है तो उनका संकलन शुद्ध रूप से किया जाना भी आवश्यक है। यदि केवल साधारणरूप से परिणाम देखना हो तो कुछ अशुद्धियां क्षम्य हो सकती हैं।

(६) **समंकों की एक दूसरे से तुलना की जा सके** (Statistics are capable of being placed in relation to each other)—समंकों की यह विशेषता भी आवश्यक है कि उनकी आपस में तुलना की जा सके। अतः इनमें सहजातीयता (Homogeneity) एवं समानता (Uniformity) का होना आवश्यक है। व्यक्तियों की आय एवं उम्र में किसी प्रकार की तुलना होना असम्भव है क्योंकि उनमें किसी प्रकार की सहजातीयता नहीं है।

सांख्यिकी का क्षेत्र तथा उसके विभाग
(Scope and Divisions of Statistics)

सांख्यिकी का क्षेत्र अत्यन्त विस्तृत है और सब प्रकार के विज्ञानों में जहाँ समंक उपलब्ध हो सकते हैं, इसका प्रयोग सफलतापूर्वक किया जा सकता है। फिर भी इसके क्षेत्र को भलीभांति समझने के लिए इसके मुख्य विभागों पर प्रकाश डालना आवश्यक होगा। साधारणतः सांख्यिकी को दो विभागों में बाँटा जाता है :—

(१) सांख्यिकीय रीतियाँ (Statistical Methods), तथा

(२) व्यावहारिक अथवा क्रियात्मक साँख्यिकी (Applied Statistics)

सांख्यिकीय रीतियाँ (Statistical Methods)

'सांख्यिकीय रीतियाँ' वे रीतियाँ हैं जिनका प्रयोग विभिन्न कारणों से प्रभावित समंकों की व्याख्या करने के लिये किया जाता है।* वास्तव में ये रीतियाँ अथवा सूत्र (formulæ) गणितशास्त्र की शाखायें हैं जिनका प्रयोग विपुल राशि में प्राप्त होने वाले समंकों का विश्लेषण करने के लिये तथा उनसे आवश्यक परिणाम निकालने के लिये किया जाता है। इन्हीं रीतियों द्वारा समंकों को प्रभावित करने वाले विभिन्न कारणों पर प्रकाश डालने का प्रयत्न किया जाता है और अनावश्यक कारणों को दूर किया जाता है।

इस पुस्तक में सांख्यिकी की निम्नलिखित प्रमुख रीतियों का वर्णन किया जायगा :—

(क) समंकों के संकलन (Collection), सम्पादन (Editing), वर्गीकरण (Classification) तथा सारणीकरण (Tabulation) करने की रीतियाँ,

(ख) विभिन्न माध्य अथवा मध्यकों (Averages) को ज्ञात करने की रीतियाँ,

(ग) अपकिरण (Dispersion) और विषमता (Skewness) ज्ञात करने की रीतियाँ,

(घ) निर्देशांक (Index Numbers) तैयार करने की रीतियाँ,

(ङ) समंक मालाओं में सह-सम्बन्ध (Correlation) ज्ञात करने की रीतियाँ,

(च) आन्तरगणन (Interpolation) तथा बाह्यगणन (Extrapolation) की रीतियाँ,

(छ) चित्रों (Diagrams) एवं वक्रों (Curves) द्वारा सामग्री-प्रदर्शन की रीतियाँ,

(ज) कालश्रेणी (Time Series) के विश्लेषण एवं प्रदर्शन की रीतियाँ,

(झ) समंकों के निर्वचन (Interpretation) तथा पूर्वानुमान (Forecasting) की रीतियाँ, आदि।

---

* By statistical methods we mean methods specially adopted to the elucidation of quantitative data affected by a multiplicity of causes—**Yule and Kendall.**

व्यावहारिक सांख्यिकी (Applied Statistics)

उपर्युक्त सांख्यिकीय रीतियों को व्यावहारिक एवं क्रियात्मक रूप में किस प्रकार प्रयोग करना चाहिये इसका अध्ययन हम इस विभाग में करते हैं। अतः व्यावहारिक साँख्यिकी उन वास्तविक तथ्यों या विषय-सामग्रियों का अध्ययन करती है जो तथ्य हमें प्रतिदिन के जीवन में मिलते हैं। सांख्यिकीय रीतियाँ विभिन्न सिद्धान्तों का प्रतिपादन करती हैं और उनका व्यावहारिक जगत में जब प्रयोग किया जाता है तो हमें व्यावहारिक समंक प्राप्त होते हैं, जैसे जनसंख्या, मजदूरी, व्यापार, उत्पादन तथा मूल्य आदि के समंक।

व्यावहारिक सांख्यिकी को दो विभागों में बांटा जा सकता है :—

(अ) **वर्णनात्मक व्यावहारिक सांख्यिकी** (Descriptive Applied Statistics) जिसमें भूतकाल अथवा वर्तमानकाल में एकत्रित किये गये समंकों का अध्ययन किया जाता है जो ऐतिहासिक महत्व रखते हैं। जैसे भूतकालीन और वर्तमानकालीन मूल्यों के आधार पर निर्देशांक (Index Numbers) तैयार करना।

(ब) **वैज्ञानिक व्यावहारिक सांख्यिकी** (Scientific Applied Statistics) जिसमें समंकों को किसी वैज्ञानिक उद्देश्य से एकत्रित किया जाता है ताकि उनके द्वारा कुछ विशेष सिद्धान्तों को निकाला जा सके।

सांख्यिकी के विभागों का अध्ययन करने के उपरान्त यहाँ हमें यह भी देख लेना चाहिये कि उसका अन्य शास्त्रों से, मुख्यतः गणित (Mathematics) तथा अर्थशास्त्र (Economics) से क्या सम्बन्ध है।

सांख्यिकी का गणित से सम्बंध
(Relation of Statistics with Mathematics)

सांख्यिकी और गणित में बहुत घनिष्ट सम्बन्ध है। दोनों के आधार अंक हैं। वास्तव में सांख्यिकी व्यावहारिक गणित की एक शाखा है जो समंकों में विशिष्टीकरण स्थापित करती है।* सांख्यिकी की अधिकतर रीतियाँ जो ऊपर बतलाई गई हैं गणित की ही देन हैं, अतः इनको समझने के लिये गणित का ज्ञान होना नितांत आवश्यक है। अनेक सांख्यिकीय रीतियाँ

---

* Statistics is the branch of Applied Mathematics which specializes in data—**Connor.**

गणितज्ञों द्वारा ही निकाली गई हैं जिनमें मुख्यरूप से पैस्कल (Pascal), जेम्स बर्नौली (James Bernoulli), डी मॉयर (De Moivre), लैप्लेस (Laplace), गॉस (Gauss), फ्रांसिस गाल्टन (Francis Galton), कार्ल पियर्सन (Karl Pearson) और फिशर (Fisher) आदि के नाम उल्लेखनीय हैं। इस प्रकार हम देखते हैं कि सांख्यिकी व गणित का सम्बंध बड़ा ही घनिष्ट है।

सांख्यिकी का अर्थशास्त्र से सम्बंध
(Relation of Statistics with Economics)

सांख्यिकी और अर्थशास्त्र का भी बड़ा घनिष्ट संबंध है। दोनों शास्त्रों को एक दूसरे से अत्यधिक सहायता मिलती है। सांख्यिकी की एक शाखा ऐसी है जिसमें केवल आर्थिक समस्याओं का ही अध्ययन किया जाता है, जिसे आर्थिक-सांख्यिकी (Economic Statistics) कहते हैं। आजकल अनेक आर्थिक समस्याओं का हल, सिद्धान्तों का प्रतिपादन तथा उनका विश्लेषण सांख्यिकी के आधार पर किया जाता है। अर्थशास्त्र की आगमन-प्रणाली (Inductive Method) तो समंकों के आधार पर ही कार्य करती है। आर्थिक क्षेत्र में सचमुच आंकड़ों का प्रयोग नितांत आवश्यक है क्योंकि इनके बिना आर्थिक प्रश्नों का, जो साधारणतः बड़े जटिल होते हैं, सर्वसाधारण की समझ में आना ही कठिन है। यदि विभिन्न देशों में जनसंख्या का घनत्व (Density of Population) हमें जानना है तो तत्संबंधी समंकों का संकलन करना आवश्यक होगा, तभी हम विश्लेषणात्मक अध्ययन कर सकते हैं। फिर समंकों के द्वारा आर्थिक सिद्धान्तों की सत्यता का परीक्षण भी बड़ी आसानी से किया जा सकता है। अर्थशास्त्र के तो बहुत से नियम समंकों पर ही आधारित हैं, जैसे माल्थस का जन्मसंख्या का सिद्धान्त (Malthusian Theory of Population)। प्रसिद्ध सांख्यिक जेवन्स (Jevons) ने तो यहाँ तक कहा है—"यदि सांख्यिकी को पूर्ण बनाया जा सके तो अर्थशास्त्र को भी पूर्णरूप से निश्चित बनाया जा सकता है।"

इसी प्रकार सांख्यिकी का सम्बंध भौतिकशास्त्र (Physics), जीवशास्त्र (Biology), ज्योतिषशास्त्र (Astronomy) तथा समाजशास्त्र (Sociology) की विभिन्न शाखाओं से स्थापित किया जा सकता है। सांख्यिकी सभी शास्त्रों में अपना एक विशिष्ट स्थान रखती है।

सांख्यिकी की सीमायें (Limitations of Statistics)

यद्यपि सांख्यिकी का क्षेत्र अत्यंत व्यापक है और उसका प्रयोग किसी भी कला अथवा विज्ञान में सफलतापूर्वक किया जा सकता है, फिर भी इसकी कुछ सीमायें हैं जिनका विचार करना आवश्यक होगा।

(१) **सांख्यिकी केवल किसी समस्या के आंकिक-स्वरूप का ही अध्ययन कर सकती है** (Statistics can study only the quantitative or numerical aspect of a problem)। अतः स्वास्थ्य, बुद्धि, गरीबी, मित्रता, आदि रूपों में व्यक्त समस्याओं का अध्ययन सांख्यिकी में नहीं हो सकता क्योंकि इन्हें अंकों में व्यक्त नहीं किया जा सकता। इसके विपरीत मज़दूरी, मूल्य, उत्पादन, उपज आदि समस्याओं का अध्ययन सांख्यिकी में सुचारुरूप से किया जा सकता है।

(२) **सांख्यिकी में व्यक्तिगत विशेषताओं का कोई महत्व नहीं होता** (Individual peculiarities have got no importance in Statistics)। सांख्यिकी में समंकों के समूह का अध्ययन किया जाता है, किसी एक संख्या अथवा समंक की निजी विशेषतायें कोई महत्व नहीं रखतीं। यदि भारतवासियों की आय के समंक एकत्रित किये जायँ तो बहुत से ऐसे लोग मिल सकते हैं जिनकी आय लाखों रुपयों में हो, अथवा ऐसे भी लोग मिल सकते हैं जो अत्यंत निर्धन या भिखारी हों, किन्तु जब मध्यक आय ज्ञात करने के लिये सांख्यिकीय रीतियाँ प्रयोग में लाई जायेंगी तो इन विशेषताओं पर कोई ध्यान न दिया जायगा।

(३) **सांख्यिकी के नियम दीर्घकाल के लिये ही सत्य होते हैं** (Statistical laws are true in the long run or on an average)। सांख्यिकी के नियम भौतिकविज्ञान के नियमों के समान सर्वदा के लिये सत्य नहीं होते। उदाहरण के लिये गुरुत्वाकर्षण शक्ति के सिद्धान्त (Law of Gravitation) के अनुसार प्रत्येक वस्तु जो ऊपर से गिराई जाती है पृथ्वी की ओर अवश्य आती है। किन्तु सांख्यिकी में ऐसे दृढ़ नियम नहीं पाये जाते।

(४) **सांख्यिकी द्वारा प्राप्त फल को किसी समस्या का एकमात्र हल न समझना चाहिये** (Result obtained by Statistics is not the only solution of any problem)। चाहे कोई भी समस्या हो उसका समाधान अनेक रीतियों से किया जा सकता है तथा उसके अनेक हल भी हो सकते

हैं। सांख्यिकीय रीतियां अनेक रीतियों में एक हैं, अतः इनके द्वारा प्राप्त किये हुये परिणाम को सर्वथा सत्य समझना भूल है। फिर ये परिणाम केवल अनुमान मात्र रहते हैं। यदि सही हल की आकांक्षा है तो सांख्यिक (Statistician) को चाहिये कि वह अपने परिणाम की तुलना अन्य उपलब्ध परिणामों से, जो दूसरे शास्त्रों की रीतियों द्वारा निकाले गये हैं, अवश्य कर ले।

(५) सांख्यिकी के निष्कर्ष असत्य सिद्ध हो सकते हैं यदि उनका विश्लेषण संदर्भसहित न किया गया हो (Statistical results may prove wrong if they have been analysed without their proper context)। सांख्यिकी के निष्कर्षों का निर्वचन करते समय उनके संदर्भों की ठीक-ठीक जानकारी आवश्यक है अन्यथा अर्थ का अनर्थ हो सकता है। ऐसा हो सकता है कि दो खेतों की मध्यक उपज समान हो लेकिन एक खेत की उपज में क्रमागत-उत्पत्ति-ह्रास नियम (Law of Diminishing Returns) लागू हो जब कि दूसरे में क्रमागत-उत्पत्ति-वृद्धि नियम (Law of Increasing Returns)।

(६) सांख्यिकी जिन समंकों का अध्ययन करती है उनमें सहजातीयता (Homogeneity) तथा एकरूपता (Uniformity) होनी चाहिये ताकि उनमें तुलना की जा सके (Statistical data must be homogeneous and uniform so that comparisons can be made)। यदि समंकों में सहजातीयता नहीं है या वे एक कोटि में नहीं आते तो उनका पारस्परिक संबंध स्थापित करना कठिन है। पेड़ की ऊंचाई के समंकों की तुलना मनुष्य की आय के समंकों से किया जाना असम्भव है।

(७) सांख्यिकीय रीतियों तथा समंकों का प्रयोग केवल उन्हीं लोगों को करना चाहिये जो वैज्ञानिक ढंग से इनका प्रयोग करने की योग्यता रखते हैं (Statistics should be used only by experts who know the scientific application of the statistical methods)। सांख्यिकी एक विज्ञान है जिसकी सभी रीतियाँ वैज्ञानिक आधार पर आधारित हैं। अतः इनका प्रयोग वहीं करना चाहिये जहां वे उपयुक्त हों। अनुपयुक्त स्थानों पर इनका प्रयोग भ्रामक तथा हानिकारक परिणामों का प्रतिपादन कर सकता है।

(८) सांख्यिकी किसी तथ्य के बारे में केवल 'क्या है? ', 'क्या था' ? और कुछ सीमा तक 'क्या होगा ?' बतलाती है, किन्तु 'क्या होना चाहिये ?'

यह बतलाने में असमर्थ है (Statistics reveals only 'What is ?', 'What has been ?' and to some extent 'What will be ?' but never 'What must be ?')। सांख्यिकी में हम भूतकाल तथा वर्तमानकाल से सम्बंधित समंकों का, जो उपलब्ध हो सकते हैं, अध्ययन करते हैं और बतलाने का प्रयत्न करते हैं कि पहले क्या स्थिति थी और अब क्या स्थिति है। बाह्यगणन (Extrapolation) के द्वारा हम भविष्यकाल की स्थिति का भी अनुमान लगा सकते हैं। लेकिन इस शास्त्र के द्वारा यह बतलाना अत्यंत कठिन है कि कैसी स्थिति होनी चाहिये। वस्तुतः सांख्यिकी व्यवहार निर्धारित करने में असमर्थ है।

सांख्यिकी 'विज्ञान' है या 'कला' ?
(Whether Statistics is a Science or an Art ?)

इस सम्बन्ध में अब दूसरा प्रश्न यह उठता है कि सांख्यिकी को 'विज्ञान' मानना चाहिए या 'कला', अथवा इसे 'विज्ञान' और 'कला' दोनों मानना चाहिए। इस प्रश्न का उत्तर तो तभी दिया जा सकता है जब हम 'विज्ञान' व 'कला' के अर्थ पर प्रकाश डालें।

'विज्ञान' किसी ज्ञान का नियमबद्ध अध्ययन है (Science is a body of systematized knowledge)। यह तथ्यों की भतकालीन तथा वर्तमानकालीन अवस्थाओं का अध्ययन करता है और इस अध्ययन के आधार पर 'कारण' तथा 'परिणाम' (Cause and Effect) का विश्लेषण करता है। इसमें विशेष लक्ष्यों को प्रकट करने के लिये सिद्धान्तों का प्रतिपादन किया जाता है लेकिन ये सिद्धान्त अच्छे या बुरे फल की ओर संकेत नहीं करते। विज्ञान केवल तथ्यों का वर्णन करता है (only describes), कोई उपदेश नहीं देता। यह उस दीप-स्तम्भ के तुल्य है जो जलयान को प्रकाश दिखलाता है तथा खतरे का संकेत करता है किन्तु यह नहीं बतलाता कि जलयान को अपनी रक्षा के लिए किस दिशा की ओर जाना चाहिए। नियमबद्ध ज्ञान की कोई शाखा जो इस प्रकार तथ्यों का वर्गीकरण करती है, उनके 'कारण' व 'परिणाम' का विश्लेषण करती है तथा तर्कपूर्ण युक्तियाँ प्रस्तुत करती है, विज्ञान कही जाने योग्य है। कार्ल पियर्सन (Karl Pearson) ने कहा है कि जो ज्ञान की शाखा (अ) नागरिकों को कुशल मानसिक शिक्षा देती है; (ब) महत्वपूर्ण सामाजिक समस्याओं पर प्रकाश डालती है; (स) व्यावहारिक

जीवन में अधिक सुख प्रदान करती है; तथा (द) हमारे ललित कला सम्बन्धी निर्णय में स्थायी सन्तोष देती है, विज्ञान कहलाने का अधिकार रखती है।

सांख्यिकी में उपर्युक्त सभी बातों का समावेश है। इसमें सभी महत्वपूर्ण आर्थिक, राजनैतिक व सामाजिक समस्याओं का अध्ययन किया जाता है। इसकी विभिन्न रीतियाँ हमें पर्याप्त मानसिक शिक्षा देती हैं और तार्किक बनाती हैं। इनके द्वारा हम इस योग्य हो जाते हैं कि अपना स्वतन्त्र-निर्णय सर्वसाधारण के सामने उपस्थित कर सकें। इनके द्वारा सभी सामाजिक समस्याओं का हल प्राप्त हो सकता है, इसलिये समाज तथा उसमें रहने वाले नागरिकों को प्रसन्नता एवं सुख की प्राप्ति होती है। अतः सांख्यिकी को एक विज्ञान कहा जा सकता है। कुछ लोगों का तो विचार है कि जिस प्रकार बिना समंकों की सहायता से विज्ञानरूपी वृक्ष में फल नहीं लगता, उसी प्रकार बिना विज्ञान की सहायता से समंकरूपी वृक्ष की जड़ मजबूत नहीं होती (Sciences without Statistics bear no fruit, Statistics without Science have no root)।

अब हमें यह देखना है कि सांख्यिकी 'कला' है या नहीं। कला का अर्थ क्रियायों से है। यदि विज्ञान 'ज्ञान' (Knowledge) है तो कला 'क्रिया' (Action) है। विज्ञान द्वारा हम किसी बात को 'जानते हैं' जबकि कला द्वारा हम उसे 'करते हैं'। अतः कला वे सामूहिक क्रियाएँ हैं जिनके द्वारा किसी समस्या को हल करने के उपाय निकाले जाते हैं ताकि उचित लक्ष्यों को प्राप्त किया जा सके। कला केवल तथ्यों का वर्णन ही नहीं करती बल्कि आवश्यक उपाय भी बतलाती है (it also prescribes)। सांख्यिकी में हमें केवल सांख्यिकीय रीतियों व सूत्रों की खोज ही नहीं करनी पड़ती, वरन् यह भी जानना पड़ता है कि उनका प्रयोग विशिष्ट समस्याओं को हल करने के लिए किस प्रकार करना चाहिए।

उदाहरण के लिए सांख्यिकी में हम केवल निर्देशांक (Index Number) तैयार करने की रीतियों व सूत्रों का पता ही नहीं लगाते, बल्कि निर्देशांकों का किस प्रकार प्रयोग किया जाता है इसका भी अध्ययन करते हैं। सांख्यिकी क्रियात्मकरूप से अनेक आर्थिक, राजनैतिक तथा सामाजिक समस्याओं को हल करने में सहायता देती है। अतः इसे कला मानना अनुचित न होगा।

इस प्रकार यह सिद्ध होता है कि सांख्यिकी विज्ञान व कला दोनों है।

सांख्यिकी की परिभाषा (Definiton of Statistics)

उपर्युक्त अध्ययन के आधार पर अब हम सांख्यकी की विभिन्न परिभाषाओं पर विचार करेंगे। सांख्यिकी की परिभाषायें मुख्यतः दो प्रकार से दी गई हैं:—

(अ) वे परिभाषायें जो 'समंक' के दृष्टिकोण से दी गई हैं, अर्थात् बहुवचन के रूप में (Definitions expressed in terms of Numerical Data i.e. in the Plural Sense) :—

(१) "किसी जांच से सम्बन्धित अंकों में व्यक्त किये हुए उन तथ्यों के विवरण को समंक कहते हैं जिन्हें एक दूसरे के सम्बंध में रक्खा जा सकता है"— डा० बाउले।* इस परिभाषा में समंकों की तीन विशेषताओं की व्याख्या की गई है— (अ) समंक किसी जाँच से सम्बंध रखते हैं; (ब) वे अंकों में व्यक्त रहते हैं; तथा (स) वे एक दूसरे के सम्बंध में तुलना करने के लिए रक्खे जा सकते हैं। अन्य विशेषतायें हम इस परिभाषा में नहीं पाते। फिर इसमें सांख्यिकी की विभिन्न रीतियों पर कोई प्रकाश नहीं डाला गया है जो वास्तव में अत्यंत महत्वपूर्ण हैं।

(२) "समंक किसी राज्य में रहने वाले व्यक्तियों की स्थिति से सम्बंधित वर्गीकृत तथ्य हैं—विशेष रूप से वे तथ्य जिनको अंकों के रूप में, आंकिक सारणियों के रूप में अथवा किसी सारिणी या वर्गों की पद्धति द्वारा प्रस्तुत किया जा सकता है"—बेब्स्टर।† इस परिभाषा के अनुसार केवल उन्हीं अंकों को हम समंक कह सकते हैं जो किसी राज्य में रहने वाले व्यक्तियों के सम्बन्ध में एकत्र किये जाते हैं, जैसे मज़दूरी व जनसंख्या के समंक। लेकिन जैसा ऊपर बतलाया जा चुका है, समंक केवल राजकीय क्षेत्र में ही एकत्र नहीं किये जाते। भौतिकशास्त्र (Physics), रसायनशास्त्र (Chemistry), ज्योतिष (Astronomy), मनोविज्ञान (Psychology), समाजशास्त्र (Sociology) आदि सभी क्षेत्रों में समंक एकत्र किये जाते हैं, जहाँ आंकिक तथ्य प्राप्त किये जा सकते हैं। यद्यपि इस परिभाषा में समंकों की विशेषताओं की कोई व्याख्या नहीं की गई है फिर भी इसमें कुछ सांख्यिकीय

---

* Statistics are numerical statements of facts in any department of enquiry, placed in relation to each other—**Dr. Bowley.**

† Statistics are classified facts respecting the condition of the people in a state......especially those facts which can be stated in numbers or in tables of numbers or in any tabular or classified arrangement—**Webster.**

रीतियों का स्पष्टीकरण किया गया है। अतः क्षेत्र की दृष्टि से यह परिभाषा अत्यन्त ही संकीर्ण है।

(३) **"समंक से हमारा अर्थ उन सामग्रियों से है जो अनेक प्रकार के कारणों से प्रभावित रहती हैं"—यूल और कैंडल।*** इस परिभाषा में समंकों की केवल दो विशेषतायें बतलाई गई हैं, परन्तु ये दोनों बहुत ही महत्वपूर्ण हैं। विशेषतायें हैं—(अ) समंक अंकों में व्यक्त रहते हैं; तथा (ब) समंकों पर अनेक कारणों का प्रभाव रहता है। इस परिभाषा में भी सांख्यिकीय रीतियों पर कोई प्रकाश नहीं डाला गया है।

(४) **"समंक किसी प्राकृतिक अथवा सामाजिक घटना की माप, आगणन अथवा अनुमान हैं जो आपस के संबंध को प्रदर्शित करने के लिए किसी पद्धतिनुसार रखे जाते हैं"—कॉनर।†** इस परिभाषा में मुख्यतः चार बातों पर जोर दिया गया है—(अ) समंक किसी प्राकृतिक अथवा सामाजिक तथ्यों एवं घटनाओं से सम्बन्ध रखते हैं; (ब) ये माप (Measurements), आगणन (Enumerations) अथवा अनुमान (Estimates) हैं; (स) ये आपसी सम्बन्ध को दिखलाने में समर्थ होते हैं; तथा (द) इनका संकलन विशेष पद्धतियों द्वारा किया जाता है। इन विशेषताओं के होते हुए भी इस परिभाषा में सांख्यिकीय रीतियों का कोई उल्लेख नहीं है।

(५) **"अंकों के रूप में व्यक्त किये हुए संग्रहीत अथवा अनुमानित तथ्यों के समूह को समंक कहते हैं जो अनेक कारणों से प्रभावित रहते हैं, जिन्हें यथोचित शुद्धता के साथ किसी पूर्व निश्चित कार्य के लिए एक पद्धतिपूर्ण ढंग से एकत्रित किया जाता है व जिनका एक दूसरे से तुलनात्मक अध्ययन किया जा सकता है"—सीक्रीस्ट।‡** जहाँ तक समंकों की विशेषताओं का संबंध है इस परिभाषा में सभी विशेषतायें स्पष्ट रूप से बतलाई गई हैं, अर्थात् (अ) समंक तथ्यों के

---

* By Statistics we mean quantitative data affected to a marked extent by a multiplicity of causes—**Yule and Kendall.**

† Statistics (Plural) are measurements, enumerations or estimates of natural or social phenomena, systematically arranged so as to exhibit their inter-relations—**Connor.**

‡ Statistics are 'aggregates of facts', affected to a marked extent by a multiplicity of causes, numerically expressed, enumerated or estimated according to reasonable standards of accuracy, collected in a systematic manner for a pre-determined purpose and placed in relation to each other—**Secrist.**

समूह हैं; (ब) ये अंकों में व्यक्त किये जाते हैं; (स) ये अनेक कारणों से प्रभावित होते हैं; (द) ये किसी पूर्व-निश्चित कार्य के लिये संग्रहीत किये जाते हैं; (इ) इनमें यथोचित शुद्धता होती है; तथा (फ) ये तुलनात्मक रूप में रक्खे जा सकते हैं। किन्तु सांख्यिकीय रीतियों की व्याख्या तथा सांख्यिकी के क्षेत्र की व्यापकता अस्पष्ट रह जाने के कारण यह परिभाषा सभी दृष्टियों से पूर्ण नहीं कही जा सकती।

(ब) वे परिभाषायें जो 'विज्ञान' के दृष्टिकोण से दी गई हैं, अर्थात् एकवचन के रूप में (Definitions expressed in terms of Science of Statistics i.e. in the Singular Sense) :—

विज्ञान के रूप में दी जाने वाली परिभाषाओं में अधिकतर सांख्यिकीय रीतियों पर प्रकाश डाला गया है। इस ढंग की परिभाषा देने वालों का विश्वास है कि 'जो कार्य सांख्यिकी करती है वे कार्य ही वास्तव में सांख्यिकी हैं' (Statistics is what Statistics does)। इस श्रेणी में मुख्यतः निम्नलिखित परिभाषायें आती हैं—

(१) "सांख्यिकी को गणना का विज्ञान कहा जा सकता है"—डा० बाउले।* यह सत्य है कि इस शास्त्र में समंकों की गणना की जाती है, किन्तु किसी समस्या से सम्बंधित समंक बहुत बड़ी राशि में रहते हैं जिनकी गणना करना अत्यंत कठिन है। सांख्यिकी में गणना से अधिक महत्व अनुमान व सम्भावनाओं (Estimates and Probabilities) को दिया जाता है क्योंकि यदि समय, धन एवं श्रम व्यय करके गणना कराई भी जाय तो गणकों की अलग-अलग कार्यक्षमता, बुद्धि तथा समझ के कारण शुद्धतम गणना होना कठिन है। उदाहरण के लिये किसी विशाल वृक्ष की पत्तियों की गणना करना कठिन है और यदि की भी जाय तो अत्यधिक श्रम की आवश्यकता पड़ेगी। परन्तु अनुमान के आधार पर पत्तियों की संख्या सुगमता से बतलाई जा सकती है। यदि वास्तविक गणना तथा अनुमान में कुछ अंतर भी आता है तो सांख्यिकी में उसकी कोई विशेष चिन्ता नहीं की जाती। इस परिभाषा की दूसरी कमी यह है कि यह सांख्यिकी की अन्य रीतियों पर कोई प्रकाश नहीं डालती। गणना तो अनेक सांख्यिकीय रीतियों में एक रीति है। संकलन करने की रीतियाँ, मध्यक, अपकरण और विषमता ज्ञात करने की रीतियाँ तथा

---

* Statistics may rightly be called the science of counting—**Dr. Bowley.**

आन्तरगणन और बाह्यगणन की रीतियाँ इस रीति से कहीं अधिक महत्व रखती हैं। तीसरी कमी यह है कि डा० बाउले ने इस परिभाषा में समंकों की विशेषताओं की ओर कोई संकेत नहीं किया है।

(२) **"सांख्यिकी अनुमान तथा संभावनाओं का विज्ञान है"—बाडिंग्टन।*** डा० बाउले की उपर्युक्त परिभाषा में जो विशेष कमी थी उसकी पूर्ति इस परिभाषा द्वारा करने की चेष्टा की गई है। इसमें कोई सन्देह नहीं की बड़ी राशि में संग्रहीत समंकों की गणना करने के बजाय उनका अनुमान करना अधिक श्रेयस्कर है, किन्तु अनुमान तथा सम्भावनाओं के आधार पर ही सांख्यिकी नहीं चलती। ये तो उसकी अनेक रीतियों में कुछ रीतियाँ हैं।

(३) **"सांख्यिकी को समुचित रूप से मध्यकों का विज्ञान कहा जा सकता है"—डा० बाउले।†** यद्यपि अस्पष्ट समंकों की प्रवृत्ति (Tendency) तथा उनके केन्द्रीय-मूल्यों (Central Values) की जानकारी प्राप्त करने के लिये व उनकी आपस में तुलना करने के लिये मध्यकों का निकालना आवश्यक होता है, लेकिन मध्यक समंकों की पूर्ण रूप से व्याख्या तथा विवेचन नहीं करते। ऐसा हो सकता है कि दो समंकों के मध्यक एक ही हों किन्तु अन्य रीतियों के प्रयोग द्वारा यह एकरूपता न पाई जाय। उदाहरण के लिये दो व्यापारिक संस्थाओं को लीजिये जो निम्नलिखित ढंग से लाभ कमा रही हैं:—

वर्ष	अ संस्था रु०	ब संस्था रु०
१९५१	१०,००,०००	५०,००,०००
१९५२	२०,००,०००	४०,००,०००
१९५३	३०,००,०००	३०,००,०००
१९५४	४०,००,०००	२०,००,०००
१९५५	५०,००,०००	१०,००,०००

यहाँ दोनों व्यापारिक संस्थाओं का मध्यक लाभ ३०,००,००० रु० है, जिस के आधार पर लोग कह सकते हैं कि दोनों संस्थाओं की आर्थिक स्थिति समान है। लेकिन यदि ध्यानपूर्वक देखा जाय तो दोनों की आर्थिक स्थिति में बड़ा अंतर है। 'अ' संस्था उत्तरोत्तर उन्नति की ओर जा रही है जब कि 'ब'

* Statistics is the science of estimates and probabilities—**Boddington.**

† Statistics may rightly be called the science of averages—**Dr. Bowley.**

संस्था अवनति की ओर। इस प्रकार हम इस निश्चय पर पहुंचते हैं कि मध्यकों द्वारा हम समंकों की पूर्णरूप से विवेचना नहीं कर सकते। अब हमें सांख्यिकी की दूसरी रीतियों को अपनाना पड़ेगा, जैसे अपकरण तथा विषमता आदि की रीतियाँ। रेखाचित्रों (Graphs) के द्वारा भी समंकों की तुलना एवं उनकी केन्द्रीय विशेषताओं पर प्रकाश डाला जा सकता है। अतः सांख्यिकी की यह परिभाषा भी संकीर्ण ही कही जायगी। इसमें भी समंकों के लक्षण अस्पष्ट हैं।

(४) **"सांख्यिकी वह विज्ञान है जो समाज में रहने वाले लोगों के विभिन्न अंगों को एकरूप मानकर उनके सभी प्रत्यक्षीकरणों की माप करता है"—डा० बाउले।*** यह परिभाषा यद्यपि विज्ञान के रूप में दी गई है किन्तु इस शास्त्र की विशिष्ट रीतियों पर कोई जोर नहीं देती। यही नहीं, यह सांख्यिकी के क्षेत्र को भी संकुचित कर देती है। डा० बाउले के कथनानुसार यह विद्या केवल समाज में रहने वाले नागरिकों का तथा उनकी सामाजिक क्रियाओं का ही अध्ययन करती है। इस प्रकार डा० बाउले ने इस परिभाषा द्वारा इस विज्ञान का निरूपण एक समाजशास्त्र (Sociology) की शाखा के रूप में कर दिया है। लेकिन वह स्वयं ही इस बात को मानता है कि सांख्यिकी न तो केवल राज्य-अर्थशास्त्र की एक शाखा है और न तो यह केवल किसी एक शास्त्र तक ही सीमित है।† जैसा हम देख चुके हैं इस शास्त्र का प्रयोग अत्यंत ही व्यापक है व कहीं भी किया जा सकता है जहां समंक उपलब्ध हो सकते हैं। अतः यह परिभाषा भी ठीक नहीं कही जा सकती।

इसके बाद कुछ ऐसी परिभाषायें आती हैं जिनमें अंकशास्त्र की रीतियों पर ही केवल जोर दिया गया है :—

(५) **"सांख्यिकी एक विज्ञान है जो समंकों के संग्रहण, वर्गीकरण, प्रदर्शन, तुलना तथा निर्वचन की रीतियों से सम्बंध रखता है जिन्हें किसी जांच पर कुछ प्रकाश डालने के लिये एकत्र किया जाता है।"—सेलिगमैन।‡**

---

* Statistics is the science of the measurement of social organism, regarded as a whole in all its manifestations—**Dr. Bowley.**

† Statistics is not merely a branch of political economy nor it is confined to any one science—**Dr. Bowley.**

‡ Statistics is the science which deals with the methods of collecting, classifying, presenting, comparing and interpreting numerical data collected to throw some light on any sphere of inquiry—**Seligman.**

(६) "सांख्यिकी सम्बद्ध अंकों के वर्गों का विश्लेषण करने वाला एक विज्ञान तथा ढंग है, जिससे उनके सम्बंध एवं अर्थों की खोज की जा सके—ब्लेयर।§

(७) सांख्यिकी संग्रह किये हुये उन प्राकृतिक अथवा सामाजिक घटनाओं के परिणामों का निर्णय करने की एक रीति है, जो आगणन अथवा अनुमानों के संग्रह के विश्लेषण से प्राप्त होते हैं"—किंग।*

(८) "सांख्यिकी उन आंकिक तथ्यों के संग्रहण, वर्गीकरण तथा सारणीकरण से सम्बंध रखती है, जिनके आधार पर किसी घटना का स्पष्टीकरण, विवेचन तथा उसकी समता प्रस्तुत की जाती है"—लॉविट।†

अतः हम देखते हैं कि विभिन्न विद्वानों ने सांख्यिकी की परिभाषा भिन्न-भिन्न ढंग से दी है। वास्तव में सांख्यिकी जैसे विषय की परिभाषा देना अत्यन्त कठिन है, जिसका क्षेत्र इतना व्यापक है, जिसकी रीतियाँ इतनी प्रभावोत्पादक हैं, जिसका सम्बन्ध अनेक शास्त्रों व विज्ञानों से है व जिसकी अपनी निजी सीमाएँ हैं। सांख्यिकी केवल विज्ञान ही नहीं है, वह कला भी है। ऐसी दशा में यदि विभिन्न विद्वानों के मत अलग-अलग हों तो इसमें कोई आश्चर्य नहीं। सांख्यिकी कठिन से कठिन आंकिक तथ्यों का अनुसंधान करने की क्षमता रखती है जिसके आधार पर उचित विश्लेषणात्मक अध्ययन किया जा सकता है। अतः सांख्यिकी की परिभाषा इस प्रकार दी जा सकती है :—

सांख्यिकी एक 'कला' व 'विज्ञान' है जो आंकिक-तथ्यों या समंकों की अनेक विशेषताओं का विधिवत अध्ययन करती है, उनके अनुसंधान, संकलन, संपादन, परीक्षण, विश्लेषण व निर्वचन के हेतु अनेक वैज्ञानिक रीतियों का प्रतिपादन करती है तथा विभिन्न शास्त्रों व विज्ञानों के अध्ययन में सहायक होती है।

---

§ Statistics is the science and method of analyzing groups of related numbers in order to discover their relationships and meanings—**Blair.**

* The science of Statistics is the method of judging collective, natural or social phenomena from the results obtained by the analysis of an enumeration or collection of estimates—**King.**

† Statistics deals with the collection, classification, and tabulation of numerical facts as the basis for explanation, description and comparison of phenomena.—**Lovitt.**

प्रश्न

1. "When you can measure what you are speaking about and express it in numbers, you know something about it; but when you cannot measure it, when you cannot express it in numbers, your knowledge is of a meagre and unsatisfactory kind"—**(Lord Kelvin).**

Explain the above statement and show its importance in the theory of Statistics.

"जिस विषय के बारे में आप बात कर रहे हैं उसे यदि आप अंकों द्वारा माप सकते हैं तथा व्यक्त कर सकते हैं तो आप उसके बारे में कुछ जानते हैं; किन्तु जब आप उस विषय को अंकों द्वारा माप नहीं सकते, उसे अंकों द्वारा व्यक्त नहीं कर सकते तो आपका ज्ञान क्षुद्र तथा असंतोषजनक कोटि का है"—**(लॉर्ड केलविन)** ।

उपर्यक्त कथन की व्याख्या कीजिए तथा सांख्यिकी में उसकी महत्ता प्रदर्शित कीजिये ।

(एम० ए०, आगरा, १९४४)

2. Trace briefly the development of the Science of Statistics from its primitive form to its present complex status, and estimate its increasing importance.

संक्षेप में सांख्यिकी के विज्ञान का उसके प्राचीन स्वरूप से वर्तमान जटिल स्वरूप तक के विकास का वर्णन कीजिए तथा उसकी बढ़ती हुई महत्ता का मूल्यांकन कीजिये ।

(एम० ए० आगरा, १९५४)

3. By Statistics we mean quantitative data affected to a marked extent by a multiplicity of causes—**(Yule and Kendall).** Explain.

समंक से हमारा तात्पर्य उन आंकिक सामग्रियों से है जो अनेक प्रकार के कारणों से प्रभावित रहती हैं— **(यूल तथा कॅंडल)** । व्याख्या कीजिए ।

(एम० ए० आगरा, १९४८)

4. "Statistics are not mere a mass of figures"—Elucidate.

"समंक केवल अंकों के ढेर मात्र ही नही हैं"—स्पष्ट कीजिये ।

(एम० ए०, पंजाब, १९५२)

5. Statistics are 'aggregate of facts' affected to a marked extent by multiplicity of causes, numerically expressed, enumerated, or estimated according to reasonable standards of accuracy, collected in a systematic manner for a pre-determined purpose, and placed in relation to each other—**(Secrist).**

Elucidate the above definiton, bringing out clearly the characteristics of Statistics.

"अंकों के रूप में व्यक्त किये हुये संग्रहीत अथवा अनुमानित 'तथ्यों के समूह' को समंक कहते हैं जो अनेक प्रकार के कारणों से प्रभावित रहते हैं, जिन्हें यथोचित शुद्धता के साथ पूर्वनिश्चित कार्य के लिए एक पद्धतिपूर्ण ढंग से एकत्र किया जाता है व जिनका एक दूसरे से तुलनात्मक अध्ययन किया जा सकता है"—(सीक्रीस्ट)।

समंकों की विशेषताओं का स्पष्टरूप से वर्णन करते हुये उपर्युक्त परिभाषा की व्याख्या कीजिये।

(बी० कॉम०, इलाहाबाद, १९४५)

6. Comment on the following definitions of Statistics :—

(*a*) By Theory of Statistics or more briefly Statistics we mean the exposition of statistical methods ;

(*b*) The Theory of Statistics comprises an analysis and interpretation of systematic collection of numbers relating to the enumeration of great classes ;

(*c*) Statistics is the Science of estimates and probabilities ;

(*d*) Statistics is the Science of Counting.

सांख्यिकी की निम्न परिभाषाओं की समीक्षा कीजिये :—

(अ) सांख्यिकी के सिद्धान्त अथवा संक्षेप में सांख्यिकी से हमारा तात्पर्य सांख्यिकीय रीतियों के प्रदर्शन से है;

(ब) सांख्यिकी के सिद्धान्त में विधिवत संकलन की गई संख्याओं के विश्लेषण व निर्वचन का समावेश है, जो विशाल वर्गों के आगणन से सम्बन्ध रखती हैं;

(स) सांख्यिकी अनुमान व संभावनाओं का विज्ञान है;

(द) सांख्यिकी गणना का विज्ञान है।

7. What are Statistical Methods? Explain their scope and limitations.

Critically examine the following definitions of Statistics :—

(i) Statistics is the Science of Counting;

(ii) Statistics is the Science of Averages;

(iii) Statistics is the Science of the measurement of social organism regarded as a whole in all its manifestations.

सांख्यिकीय रीतियाँ क्या हैं? उनके क्षेत्र व उनकी सीमाओं की व्याख्या कीजिये।

निम्न परिभाषाओं की आलोचनात्मक व्याख्या कीजिए :—

(क) सांख्यिकी गणना का विज्ञान है;

(ख़) सांख्यिकी माध्यों का विज्ञान है;

(ग) सांख्यिकी वह विज्ञान है जो समाज में रहने वाले लोगों के विभिन्न अंगों को एकरूप मानकर उनके सभी प्रत्यक्षीकरणों की माप करता है।

(बी० कॉम०, आगरा, १९४३)

8. Discuss the scope, utility and limitations of Statistics.

सांख्यिकी के क्षेत्र, उसकी उपयोगिता तथा उसकी सीमाओं का वर्णन कीजिये।

(बी० कॉम०, बनारस, १९४७, १९५३)

9. Explain clearly with examples the limitations of Statistics.

उदाहरण सहित सांख्यिकी की सीमाओं का स्पष्टरूप से वर्णन कीजिये।

(बी० कॉम०, इलाहाबाद, १९३८)

10. 'Statistical Methods include all those devices of analysis and synthesis by means of which Statistics are scientifically collected and used to explain or describe phenomena, either in their individual or related capacities'—(Secrist).

Elucidate the above statement.

'सांख्यिकीय रीतियों में विश्लेषण व समन्वय के वे सब उपकरण सम्मिलित हैं जिनके द्वारा वैज्ञानिक रीति से समंकों का संकलन व प्रयोग किया जाता है

ताकि घटनाओं की व्याख्या अथवा उनका वर्णन या तो उनकी व्यक्तिगत योग्यतानुसार किया जा सके या सम्बन्धित योग्यतानुसार'—(सीक्रीस्ट) ।

उपर्युक्त कथन का स्पष्टीकरण कीजिये ।

(बी० कॉम०, नागपुर, १९४५)

11. Discuss the claims of Statistics to be regarded as a Science.

वर्णन कीजिये कि सांख्यिकी के क्या दावे हैं जिनके कारण उसे विज्ञान माना जाता है ।

(एम० ए०, आगरा, १९३०)

12. 'Statistics is said to be both a science and an art'. Why? What relation, if any, has Statistics with other Sciences?

'सांख्यिकी विज्ञान और कला दोनों कही जाती है ।' क्यों? सांख्यिकी का अन्य विज्ञानों से यदि कोई सम्बन्ध है, तो क्या है?

(बी० कॉम०, आगरा, १९४९)

13. 'Sciences without statistics bear no fruit; Statistics without Science have no root'.

Explain the above statement with necessary comments.

'विना समंकों के विज्ञानों में फल नहीं लगते; विना विज्ञान के समंकों की जड़ नहीं जमती' ।

उपर्युक्त कथन की व्याख्या आवश्यक समीक्षा करते हुये कीजिये ।

(एम० ए०, पटना, १९४३)

14. Explian the relationship between Economics and Statistics. How far has the use of statistical methods in Economics led to its development?

अर्थशास्त्र व सांख्यिकी के सम्बन्ध का वर्णन कीजिये । सांख्यिकीय रीतियों के प्रयोग से अर्थशास्त्र का विकास कहाँ तक हुआ है?

(एम० ए०, आगरा, १९४२)

15. 'Statistics are the straw out of which, I, like every other economist, have to make the bricks'—(**Marshall**).

Elucidate this statement.

'समंक मिट्टी के समान हैं जिससे मुझे भी अन्य अर्थशास्त्रियों की भांति ईंटें बनानी हैं'—(मार्शल)। इस कथन की व्याख्या कीजिये।

(एम० ए०, आगरा, १९५५)

16. Explain the limitations on the use of Statistical methods.

सांख्यिकीय रीतियों के प्रयोग की सीमाओं का वर्णन कीजिये।

(एम० कॉम०, आगरा, १९५६)

17. 'Statistics are numerical statements of facts in any department of enquiry, placed in relation to each other'—(Bowley). Comment on this statement and explain the limitations of Statistics in economic analysis.

'किसी जाँच से सम्बन्धित अंकों में व्यक्त किये हुये उन तथ्यों के विवरण को समंक कहते हैं जिन्हें एक दूसरे के सम्बन्ध में रखा जा सकता है'–(बाउले)। इस कथन की समीक्षा कीजिये तथा आर्थिक विश्लेषण में सांख्यिकी की सीमाओं की व्याख्या कीजिये।

(एम० ए०, आगरा, १९५६)

18. Give the important uses and limitations of Statistics. Show its relation to Economics and Mathematics.

सांख्यिकी की महत्वपूर्ण उपयोगिताओं व सीमाओं का वर्णन कीजिये। इसका सम्बन्ध अर्थशास्त्र तथा गणित से दिखलाइये।

(बी० कॉम०, लखनऊ, १९३८)

19. Write an essay on the following :—

'The Meaning and Scope of Statistics'.

निम्नलिखित पर एक निबन्ध लिखिये :—

'सांख्यिकी का अर्थ व उसका क्षेत्र'।

(सर्टिफिकेट, बनारस, १९५३)

20. Statistics has been defined as the 'Science of averages'. Discuss the correctness of this definition.

सांख्यिकी को 'माध्यों का विज्ञान' कहा गया है। इस परिभाषा की सत्यता पर विचार कीजिये।

(एम० ए०, बनारस, १९५५)

अध्याय २

सांख्यिकी का महत्व

(Importance of Statistics)

(सांख्यिक के कार्य—सांख्यिकी के कार्य—सांख्यिकी का महत्व—सांख्यिकी का शासन-प्रबन्ध में महत्व—सांख्यिकी का व्यवसाय तथा वाणिज्य में महत्व—सांख्यिकी का राष्ट्रीय नियोजन में महत्व—समंकों के प्रति अविश्वास—प्रश्न)

सांख्यिक के कार्य (Functions of a Statistician)

प्राचीन समय में जब सांख्यिकी को राज्यगणित (Political Arithmetic) समझा जाता था, राजा अपनी इच्छानुसार अपने राज्य के किसी सम्मानित कर्मचारी को सांख्यिक (Statistician) के पद पर नियुक्त करता था, जो उसकी आज्ञा के आधार पर उस राज्य की किसी सामाजिक, आर्थिक अथवा राजनैतिक समस्या से सम्बन्धित समंक एकत्रित करता था। उस समय सांख्यिकीय रीतियों का प्रतिपादन नहीं हुआ था इसलिये उसका काम और भी सुगम तथा यंत्रवत था। लेकिन आज के प्रगतिशील युग में जब सांख्यिकी का क्षेत्र इतना व्यापक हो गया है तथा नये नये वैज्ञानिक ढंगों को जन्म दिया जा रहा है, सांख्यिक के कार्य एवं उसके उत्तरदायित्व बहुत बढ़ गये हैं। इनको सफलतापूर्वक पूर्ण करने के लिए उसमें कुछ विशेष गुण तथा योग्यता का होना आवश्यक है। सांख्यिक कोई लिपिक (Clerk) नहीं है, वह एक गणितज्ञ (Mathematician) है, अतः गणित की अच्छी जानकारी होना उसके लिए परमावश्यक है। उसे विभिन्न सांख्यिकीय सूत्रों (Statistical formulæ) का ज्ञान होना चाहिये, तथा उनकी प्रयोग-विधि आनी चाहिए। संक्षेप में रोड्स (Rhodes) नामक सांख्यिक ने सांख्यिकों के तीन प्रमुख कार्य वतलाए हैं:—(अ) समंकों का संग्रहण करना; (ब) उनका विश्लेषण करना; तथा (स) विश्लेषण के आधार पर परिणामों का निर्वचन करना।* वास्तव में

---

* The functions of a statistician may properly be considered as divisible into three parts. In the first place he is concerned with the assembling of statistical data, in the second place with their analysis, and in the third place with the interpretation of the results of such an analysis.—**Rhodes.**

सांख्यिकों के ये ही तीन प्रमुख कार्य हैं, किन्तु इनकी व्याख्या इस प्रकार भी की जा सकती है :—

(१) अनुसंधान-कार्य की योजना बनाना, उसके उद्देश्य और क्षेत्र का निर्धारण करना तथा उस कार्य की सीमाओं का विचार करना।

(२) समंकों के संग्रहण की व्यवस्था करना। यदि द्वितीयक रीति (Secondary Method) का प्रयोग करना है तो उनके स्रोतों (Sources) की खोज करना, तथा उनकी कमियों (Shortcomings) का ध्यान रखना।

(३) उपलब्ध समंकों का विश्लेषण तथा सम्पादन करना और उनकी परिशुद्धता (Accuracy) का ध्यान रखना।

(४) इन समंकों का वर्गीकरण (Classification) तथा सारणीकरण (Tabulation) करना। विशेष स्पष्टीकरण के लिये उनको चित्रों व वक्रों (Diagrams and Graphs) द्वारा प्रदर्शित करना।

(५) समंकों के आधार पर तुलनात्मक अध्ययन करने के लिये माध्य (Average), अपकिरण (Dispersion) तथा विषमता (Skewness) ज्ञात करना, तथा आवश्यकता पड़ने पर तथ्यों की अर्थपूर्णता (Significance) पर विचार करना।

(६) उपर्युक्त अध्ययन के आधार पर तथ्यों का निर्वचन (Interpretation) करना तथा अपनी स्वतंत्र राय देना।

(७) आवश्यकता पड़ने पर आंतरगणन (Interpolation) और बाह्य-गणन (Extrapolation) की रीतियों का प्रयोग करके अप्राप्य समंकों को ज्ञात करना तथा तत्सम्बन्धी समस्याओं का पूर्वानुमान (Forecasting) करना।

वस्तुतः सांख्यिक कोई जादूगर नहीं है जो पत्थर पर घास उगाने का दावा करे, और न तो वह कोई रससिद्ध (Alchemist) है जो निम्नतर धातुओं को सोने में परिवर्तित करने की क्षमता रखे, जैसा मध्यवर्ती युगों के धातु-परिवर्तन-विद्या जानने वाले किया करते थे। वह तो एक रासायनिक (Chemist) की भाँति है जो किसी मिश्रण में से अलग-अलग पदार्थों को निकालने के लिये उसका विधिवत विश्लेषण करता है। वह किसी समस्या के गुण-दोषों की समीक्षा नहीं करता। उसका तो केवल यही कार्य है कि समंकों का विधिवत विश्लेषण करके अदृश्य तथ्यों को लोगों के समक्ष प्रस्तुत

कर दे। उसे किसी प्रकार का पक्षपात करने की कोई आवश्यकता नहीं है। इस कार्य के लिये उसमें पर्याप्त सामान्य-बुद्धि; विवेक, तर्क, तथा योग्यता होनी चाहिये तभी वह इस क्षेत्र में सफल हो सकता है। अतः **नीसवेंगर** (Neiswanger) के शब्दों में, सांख्यिक का कर्त्तव्य सामग्री-संकलन तथा तत्सम्बंधी गणनाओं से कहीं बहुत दूर है। समंक स्वयं अपने लिये न तो कुछ बोलते हैं न कहते है; किन्तु सांख्यिक ही वह व्यक्ति है जिसे उनके आधार पर आवश्यक निष्कर्षों का निर्वचन करना है तथा उनके अर्थों की खोज करनी है।*

सांख्यिकी के कार्य (Functions of Statistics)

(१) सांख्यिक-तथ्यों को सुगम तथा समझने योग्य बनाना (To make the statistical data simplified and understandable)—सांख्यिकी सांख्यिक-तथ्यों का संकलन, वर्गीकरण तथा विश्लेषण करती है। परन्तु ये तथ्य, जो किसी अनुसंधान द्वारा प्राप्त किये जाते हैं, इतनी बड़ी राशि में होते हैं तथा इनमें इतनी विषमता (Disparity) व जटिलता (Complexity) होती है कि सर्वसाधारण की समझ में सुगमता से नहीं आ सकते। सांख्यिकी का यह पहला कार्य है कि वह वैज्ञानिक रीतियों द्वारा इन तथ्यों का विश्लेषण करे और उनको सरल से सरल रूप दे ताकि उनका परिमाण घट कर कम से कम हो जाय। उदाहरण के लिये यदि विभिन्न देशों के आयात (Import) तथा निर्यात (Export) सम्बन्धी पिछले दस वर्षों के समंक एकत्रित करके उन्हें सर्वसाधारण के सामने प्रस्तुत किया जाय तो कोई भी व्यक्ति उनकी विशेषताओं को साधारणतः नहीं समझ सकता। किन्तु यदि उनके मध्यक (Average) निकाल लिये जायँ, या उन्हें चित्रों (Graphs and Diagrams) द्वारा प्रदर्शित किया जाय, तो वे लोग आसानी से उनका अध्ययन कर सकते हैं तथा विभिन्न देशों के विदेशी-व्यापार की दिशा एवं उसकी प्रवृत्ति समझ सकते हैं। इसी प्रकार विभिन्न वस्तुओं के मूल्य-सम्बन्धी समंकों के आधार पर यदि निर्देशांक (Index Numbers) तैयार किये जायँ तो उनके द्वारा मुद्रा (Money) के मूल्य में होने वाले परिवर्तनों का अध्ययन बड़ी सरलता से किया जा सकता है तथा स्फीति (Inflation) अथवा अपस्फीति (Deflation) की ओर संकेत किया जा सकता है।

---

* The duty of the Statistician, therefore, goes much beyond collecting data and making calculations. Facts do not speak for themselves, and it is the Statistician who must interpret the statistical results to discover their meaning—**Neiswanger.**

(२) **सांख्यिकीय-तथ्यों की तुलना करना तथा उनमें सम्बन्ध स्थापित करना** (To compare the statistical facts and establish their relationship)—सांख्यिकीय तथ्यों को सुगम तथा समझने योग्य वनाने के वाद उनका तुलनात्मक अध्ययन होता है। तुलना करने के लिये विभिन्न माध्यों अथवा मध्यकों (Averages), गुणकों (Co-efficients) व प्रतिशतों (Percentages) को निकाला जाता है और उनके आधार पर यह ज्ञात करने का प्रयत्न किया जाता है कि कौन सा तथ्य अधिक महत्वपूर्ण है। जनसंख्या सम्वन्धी किन्हीं दो देशों के समंकों का मध्यक निकाल कर हम उन देशों के निवासियों की मध्यक आयु (average age) की तुलना कर सकते हैं। इन मध्यकों के आधार पर जनसंख्या सम्वन्धी अन्य बातों की भी जानकारी प्राप्त की जा सकती है।

(३) **व्यक्तिगत ज्ञान व अनुभव की वृद्धि करना** (To enlarge individual knowledge and experience)—सांख्यिकी का तीसरा कार्य अन्य विज्ञानों की तरह मनुष्यों के ज्ञान एवं अनुभव की वृद्धि करना है। यही वास्तव में इसका सवसे उचित कार्य है।* सांख्यिकी के अध्ययन के अभाव में हमारे अधिकतर विचार अस्पष्ट तथा तर्कहीन रह जाते। समंकों पर विचार करने से तर्कशक्ति बढ़ती है जिसके कारण नये-नये नियमों व सिद्धान्तों का प्रतिपादन किया जा सकता है तथा पुराने सिद्धान्तों की आलोचना की जा सकती है।

(४) **विभिन्न क्षेत्रों में नीति-निर्धारण करना** (To formulate policies in different fields)—सांख्यिकी सभी क्षेत्रों में जहाँ समंक उपलब्ध हो सकते हैं, नीति-निर्धारण का कार्य करती है। चाहे वे सामाजिक निर्माण के कार्य हों, चाहे आर्थिक-उन्नति के, उनसे सम्बन्धित नीतियों का निर्धारण समंकों के आधार पर ही किया जाता है। प्रसिद्ध अर्थशास्त्री मार्शल ने कहा है कि "समंक ऐसी सामग्री हैं जिनसे मुझे भी अन्य अर्थशास्त्रियों की भाँति ईंटें वनानी हैं।"† कहने का तात्पर्य यही है कि अनेक आर्थिक-नीतियों का निर्धारण समंकों के आधार पर ही सांख्यिकों ने किया है। समंकों के ही

---

* The proper function of Statistics, indeed, is to enlarge individual experience—**Bowley.**

† Statistics are the straw out of which, I, like every other economist, have to make the bricks—**Marshall.**

आधार पर माल्थस (Malthus) ने जनसंख्या का सिद्धान्त (Malthusian Theory of Population) बनाया तथा डा० एंजिल (Dr. Engel) ने पारिवारिक बजट (Family Budget) तथा जीवन-स्तर (Standard of Living) सम्बन्धी नीतियों का निर्धारण किया। इसके अतिरिक्त हम देखते हैं कि सभी देशों में शासन सम्बन्धी नीतियों का निर्धारण भी समंकों के ही आधार पर किया जाता है। देश में कितना आयात (Import) तथा निर्यात (Export) करना है, विभिन्न करों (Taxes) की दरें किस आधार पर रखनी हैं, किन वस्तुओं का उत्पादन घटाना या बढ़ाना है, आदि विभिन्न नीतियों का निर्धारण समंकों के ही आधार पर किया जाता है।

(५) **अन्य विज्ञानों के नियमों की शुद्धता की जाँच करना तथा उनका परीक्षण करना** (To check the accuracy and to examine the validity of the laws of other Sciences)—सांख्यिकी के द्वारा अन्य विज्ञानों में बनाए गए नियमों की भी जाँच की जा सकती है और उनकी शुद्धता पर विचार किया जा सकता है। अतः सभी विज्ञानों में आज जो नियम बनाए जाते हैं उनकी शुद्धता की जाँच तत्सम्बन्धी समंकों को एकत्र करके कर ली जाती है जिससे उन नियमों की अनिश्चितता एवं संदिग्धता नहीं रह जाती। इसके अतिरिक्त ऐसे नियम जिनका प्रतिपादन निगमन-प्रणाली (Deductive Method) से नहीं किया जा सकता, सांख्यिकीय रीतियाँ उनका प्रतिपादन करने में सफल हो जाती हैं।

(६) **वर्तमान तथ्यों का अनुमान तथा निकट भविष्य का पूर्वानुमान करना** (To estimate for the present and to forecast for the future)—सांख्यिकी विभिन्न रीतियों द्वारा वर्तमान तथ्यों का अध्ययन तो करती ही है, उसके द्वारा निकट भविष्य की स्थितियों का भी अनुमान किया जा सकता है। इसके लिए इस शास्त्र में बाह्यगणन (Extrapolation) तथा पूर्वानुमान (Forecasting) की कुछ विशिष्ट रीतियाँ हैं। सभी आर्थिक योजनाएँ भविष्य से सम्बन्धित समंकों के आधार पर बनती हैं जिनका अनुमान सांख्यिकी द्वारा ही किया जा सकता है।

(७) **किसी समस्या की महत्ता पर प्रकाश डालना** (To throw light on the magnitude of any problem)—सांख्यिकी के द्वारा किसी समस्या पर अधिक से अधिक प्रकाश डाला जा सकता है, जैसे जन्म-मरण के समंक (Vital Statistics) केवल किसी देश की जन्मदर तथा मृत्युदर

(Birth Rate and Death Rate) ही नहीं बतलाते बल्कि इनकी सहायता से अन्य देशों की दरों का तुलनात्मक अध्ययन करके स्वास्थ्य सम्बन्धी अनेक बातों की जानकारी प्राप्त की जा सकती है। ये समंक बीमा कम्पनियों के लिये भी बहुत महत्वपूर्ण होते हैं क्योंकि इनके आधार पर ही मरण तालिकायें (Mortality Tables) इत्यादि तैयार की जाती हैं।

सांख्यिकी का महत्व (Importance of Statistics)

आधुनिक युग में सांख्यिकी का महत्व बहुत अधिक बढ़ गया है। चाहे किसी भी क्षेत्र को लिया जाय, सांख्यिकी के कारण उसमें अनेक उन्नति हुई है। मनुष्य का साथ तो सांख्यिकी जन्म से मृत्यु तक देती है एवं उसके प्रत्येक कार्य का विश्लेषणात्मक अध्ययन करती है। सांख्यिकी द्वारा उसकी आर्थिक, सामाजिक व राजनैतिक सभी समस्याओं पर प्रकाश डाला जा सकता है। आज के सभ्य जीवन में इसकी सेवायें प्रशंसनीय हैं। इसके महत्व का अनुमान तो इसके कार्यों (Functions) द्वारा ही लगाया जा सकता है। समंकों के आधार पर ही विभिन्न योजनाओं का प्रतिपादन किया जाता है और सांख्यिकीय रीतियाँ हीं उनकी सफलता की परख करती हैं। यहाँ हम विभिन्न क्षेत्रों में सांख्यिकी की महत्ता का वर्णन करेंगे।

सांख्यिकी का शासन-प्रबंध में महत्व
(Importance of Statistics in Administration)

प्राचीन काल से ही समंकों का उपयोग शासन-यंत्र को चलाने के लिये होता आ रहा है। किन्तु आधुनिक समय में तो राज्यों के आवश्यक व लोकहित-साधक कार्य इतने बढ़ गये हैं कि उन्हें विभिन्न नीतियों का निर्धारण करने के लिये समंकों को एकत्र करना अनिवार्य हो गया है। इसके अतिरिक्त यह बात भी ध्यान रखने योग्य है कि अधिकतर राज्यों का ध्येय लोक-कल्याण (Welfare) के कार्यों में अधिकाधिक वृद्धि करना होता है। इन उद्देश्यों की पूर्ति के लिये सामाजिक व आर्थिक स्थितियों का ज्ञान होना आवश्यक है। जैसे यदि समाज की उन्नति करनी है तो शिक्षा, स्वास्थ्य, मनोरंजन आदि से सम्बन्धित समंकों को एकत्र करना आवश्यक है। व्यक्तियों की आर्थिक दशा सुधारने के लिये राज्य आय, व्यय, उत्पादन, उपज, उद्योग-धंधे आदि से सम्बंधित समंकों का संग्रहण करता है। इनके आधार पर वस्तुस्थिति का अध्ययन किया जाता है और ऐसी नीतियाँ अपनाई जाती हैं जो लोगों की

आर्थिक व सामाजिक दशा सुधारने में सहायक हों। शासन-यंत्र को चलाने के लिये प्रतिवर्ष राज्यों को आय-व्यय सम्बन्धी समंको को एकत्र करना पड़ता है, जिनके आधार पर बजट (Budget) बनाये जाते हैं और किन मदों पर कितना व्यय करना है इसका अनुमान लगाया जाता है। प्राप्त समंकों के आधार पर ही उत्पादन, उपभोग तथा आयात-निर्यात पर आवश्यक कर (Taxes) लगाये जाते हैं तथा अनावश्यक करों को हटाया जाता है। कभी-कभी किसी राजनैतिक प्रश्न पर सर्वसाधारण की राय जानने की आवश्यकता पड़ती है जिसके लिये भी समंकों को एकत्रित करना आवश्यक हो जाता है। मज़दूरों की दशा सुधारने के लिये तथा उनकी मज़दूरी, कार्यकाल व कार्य-परिस्थिति आदि का अध्ययन करने के लिये कल्याणकारी राज्यों को तत्सम्बन्धी समंक एकत्रित करने पड़ते हैं। यही नहीं, नगरपालिकायें (Municipalities) तथा जिला-बोर्ड (District Boards) भी समंकों के ही आधार पर अपनी कार्यप्रणाली निर्धारित करते हैं। जितने भी सरकारी कमीशन (Commission) तथा कमेटियाँ बनाई जाती हैं वे अपने प्रतिवेदन (Recommendations) समंकों के आधार पर ही देती हैं। दरिद्रता, बेकारी, खाद्यान्न की कमी, नियंत्रण आदि विभिन्न समस्याओं का हल सांख्यिकी के द्वारा ही किया जाता है। अतः यह कहना अत्युक्ति न होगा कि समंक शासन-प्रवन्ध के नेत्र हैं (Statistics are the eyes of Administration)।

सांख्यिकी का व्यवसाय तथा वाणिज्य में महत्व
(Importance of Statistics in Business and Commerce)

जिस प्रकार शासन-प्रवन्ध के लिये सांख्यिकी की नितान्त आवश्यकता है उसी प्रकार व्यवसाय तथा वाणिज्य की सफलता के लिये भी सांख्यिकी का प्रयोग अनिवार्य है। वर्तमान समय में जब व्यवसाय का आकार बढ़ता जा रहा है व प्रतिस्पर्धा की मात्रा में वृद्धि होती जा रही है, व्यापारियों व उद्योग-पतियों के लिये यह आवश्यक हो गया है कि वे अपने प्रबन्ध का नियन्त्रण सुचारुरूप से करें और अपनी कार्यक्षमता को उत्तरोत्तर बढ़ाने का प्रयत्न करें।* किसी व्यवसाय की कार्यक्षमता तभी बढ़ाई जा सकती है जब क्रय, विक्रय,

* In order to succeed in any business today, the businessman must study all the factors which enter into production, buying and selling, exporting and importing of goods in which he deals—**Boddington.**

उत्पादन, वितरण, यातायात तथा श्रम सम्बन्धी नीतियों का निर्धारण कर लिया जाय व उनके अनुसार कार्य-सम्पादन किया जाय। किन्तु इन नीतियों का निर्धारण तभी हो सकता है जब तत्सम्बन्धी समंकों का उचित रीति से संकलन करके उनका विधिवत अध्ययन किया जाय। इन समंकों का अध्ययन यह बतलायेगा कि कब कच्चे माल का क्रय तथा निर्मित माल की बिक्री करनी है व किस प्रकार किसी वस्तु का मूल्य-निर्धारण या उसकी माँग का अनुमान करना है। आंकिक तथ्य ही यह बतलायेंगे कि किन स्रोतों से वित्त प्राप्त करना लाभदायक होगा। समंकों के ही आधार पर यह ज्ञात किया जा सकता है कि यातायात का कौन सा साधन अधिक उपयुक्त तथा मितव्ययी होगा।

बड़ी-बड़ी औद्योगिक संस्थाओं में उपर्युक्त समस्याओं से सम्बन्धित समंकों का संकलन, विश्लेषण तथा निर्वचन करने के लिये एक अलग 'सांख्यिकीय विभाग' (Statistical Department) होता है, जो प्रबन्धकों को आवश्यक सलाह एवं सुझाव देता रहता है। समंकों द्वारा इस बात पर प्रकाश डाला जा सकता है कि उत्पादन के किस क्षेत्र में प्रति इकाई लागत बढ़ रही है अथवा आवश्यकता से अधिक समय या श्रम लग रहा है। ऐसी कमजोरियाँ तुरंत ही रोकी जा सकती हैं और उन्हें हमेशा के लिये दूर करने का प्रयत्न किया जा सकता है। यदि प्रबन्धक चाहें तो अन्य संस्थाओं के तत्संबन्धी समंक लेकर उनका तुलनात्मक अध्ययन भी कर सकते हैं। वस्तुतः समंकों पर ही परिव्यय-लेखांकन (Cost Accounting) का सिद्धान्त आधारित है। फिर श्रमिकों की मज़दूरी, कार्य क्षमता, कार्य-परिस्थिति आदि से सम्बन्धित आँकड़ों को लेकर उनकी दशा में सुधार भी किया जा सकता है और औद्योगिक अशान्ति को दूर करने का प्रयास किया जा सकता है। यह कहना अत्युक्ति न होगा कि वैज्ञानिक प्रबन्ध (Scientific Management) व विवेकीकरण (Rationalization) की आधार शिला भी समंक ही हैं। इसके अतिरिक्त समंकों की ही सहायता से पिछले प्रकाशित खातों (Published Accounts) को लेकर व्यापार की गति-विधि पर प्रकाश डाला जा सकता है और भविष्य के लिए ठोस नीतियों का निर्धारण किया जा सकता है। समंक व्यवसायी-वर्ग को हमेशा सचेत करते रहते हैं कि उनका अगला कदम क्या होना चाहिये। बाजार-अनुसंधान (Market Research) व माँग-निर्माण (Demand Creation) में समंकों से जो सहायता प्राप्त होती है वह प्रशंसनीय है।

आजकल औद्योगिक संस्थाओं में निर्मित-वस्तुओं के गुणों पर नियंत्रण (Quality Control) रखने के लिए भी सांख्यिकी की सहायता ली जाती है।

व्यवसाय व उद्योग के अतिरिक्त समंकों का प्रयोग बैंक, बीमा कम्पनी, रेलवे, स्कन्ध-विपणि (Stock Exchange) तथा उपज-विपणि (Produce Exchange) आदि में भी सफलतापूर्वक किया जा रहा है। बैंक के मैनेजर समंकों के अध्ययन के आधार पर ही यह निश्चित करते हैं कि जनता वर्ष के किस भाग में अधिक धन की माँग करती है और किस भाग में कम। इसी आधार पर वे निश्चित करते हैं कि बैंक की विभिन्न सम्पत्तियों का किस प्रकार विनियोग होना चाहिए। यदि वे इस बात का ध्यान न रखें तो उनके पास कभी आवश्यकता से अधिक और कभी आवश्यकता से कम राशि हो जायगी जिससे वे केवल हानि ही न उठायेंगे वल्कि मुद्रा-बाजार की गति-विधि को भी प्रभावित कर देंगे। बीमा कम्पनियों का तो समस्त कार्य ही समंकों पर आधारित है। प्रीमियम की दर, जीवन-आशा, मरण-तालिका आदि का निर्धारण समंकों के ही आधार पर किया जाता है। रेलवे अधिकारी समंकों के ही आधार पर किराये की दर निश्चित करते हैं और यह अनुमान लगाते हैं कि किस मार्ग पर कितनी गाड़ियों का प्रवन्ध करना है जिससे अधिक से अधिक आय प्राप्त हो सके। समंक ही उन्हें बतलाते हैं कि किन अवसरों पर विशेष गाड़ियों की व्यवस्था करनी चाहिए और कब गाड़ियों की संख्या घटा देनी चाहिये। इसी प्रकार स्कन्ध अथवा उपज विपणि के सदस्यों को भी समंकों का सहारा लेना पड़ता है। पिछले मूल्य-समंकों के आधार पर वे अनुमान लगाते हैं कि कब मूल्यों में कमी तथा वृद्धि होगी। विनियोग-कर्ता ब्याज की दरों का पूर्ण अध्ययन करने के उपरान्त ही अपना धन विनियोग करने का साहस करते हैं। यदि वे पर्याप्त समंकों का विश्लेषणात्मक अध्ययन करके कोई सौदा करते हैं तो उसमें लाभ प्राप्त करने की पूर्ण आशा रहती है। अतः यह निश्चित रूप से कहा जा सकता है कि व्यवसाय तथा वाणिज्य में सांख्यिकी की सेवायें अत्यन्त ही महत्वपूर्ण हैं।

सांख्यिकी का राष्ट्रीय नियोजन में महत्व
(Importance of Statistics in National Planning)

ऊपर हम बतला चुके हैं कि शासन-प्रवन्ध को सुचारुरूप से चलाने के लिए सांख्यिकी की नितान्त आवश्यकता है। वर्तमान युग में हमारी कल्याण-

कारी राज्य की कल्पना आर्थिक नियोजन के महत्व को दिन प्रतिदिन वढ़ाती जा रही है। सभी स्वतन्त्र राज्य किसी न किसी रूप में आर्थिक नियोजन की ओर अग्रसर हैं। किन्तु यह कहना अतिशयोक्ति न होगा कि नियोजन की नींव समंक हैं। कोई भी आर्थिक योजना विना सांख्यिकी की सहायता से सफलीभूत हो ही नहीं सकती। प्रत्येक योजना का निर्धारण करने के पूर्व हमें यह जानने की आवश्यकता पड़ती है कि हमारा उत्पादन क्या है, हमारी आवश्यकतायें कितनी हैं, हमारा जीवन-स्तर क्या है, हमारे कौन-कौन से साधन अभी तक वेकार पड़े हैं तथा हमारे देश की जन संख्या का क्या रुख है, इत्यादि। ये प्रश्न वड़े ही जटिल हैं किन्तु सांख्यिकी द्वारा हम इनकी जानकारी प्राप्त कर सकते हैं। यदि हम भारतवर्ष की प्रथम तथा द्वितीय पंचवर्षीय योजनाओं के पृष्ठ उलटें तो हमें यह शीघ्र ही ज्ञात हो जायगा कि ये योजनायें समंकों पर ही आधारित हैं। समंकों द्वारा ही हम अपमी वर्तमान परिस्थिति का ज्ञान प्राप्त करते हैं और उन्हीं के द्वारा विभिन्न लक्ष्यों का निर्धारण किया जाता है। किन्तु नियोजन की सर्वांगीण सफलता के लिए समंकों का शुद्ध होना आवश्यक है। यह हमारे लिये दुर्भाग्य का विषय है कि अपने देश में जो भी समंक उपलब्ध हैं वे बहुत कुछ दूषित तथा अविश्वसनीय हैं। यदि हमें अपनी पंच-वर्षीय योजनायें सफल बनानी हैं तथा दरिद्रता, बेकारी, अव्यवस्था, सामाजिक कुरीतियाँ, निरक्षरता व अज्ञानता को दूर करना है, तो हमें शुद्ध समंकों के संकलन पर ध्यान देना चाहिये।

सांख्यिकी की सेवायें अनन्त हैं। इस शास्त्र का लाभ शिक्षाशास्त्र, मनोविज्ञान, अन्तरिक्ष-विज्ञान, कृषि, भौतिक व रसायन-शास्त्र, चिकित्सा शास्त्र आदि अनेक ज्ञान की शाखाओं में उठाया जा सकता है। आर्थिक व सामाजिक अनुसंधानों में तो यह शास्त्र अत्यन्त ही लाभप्रद सिद्ध हुआ है।

समंकों के प्रति अविश्वास (Distrust of Statistics)

यद्यपि समंक हमारी आर्थिक, सामाजिक व राजनैतिक समस्याओं के समाधान में अनेक लाभ पहुँचाते हैं, फिर भी कुछ लोग इनकी सत्यता को सन्देह की दृष्टि से देखते हैं। अनेक तो सांख्यिकीय तथ्यों का विश्वास ही नहीं करते। उदाहरण के लिये उन लोगों का कथन है :—

झूठ तीन प्रकार की श्रेणियों में रखे जा सकते हैं—'झूठ', 'बिल्कुल झूठ' और 'समंक' (There are three degrees of lies—lies, damned lies and Statistics);

अथवा

सांख्यिकी में कुछ काले झूठ होते हैं, कुछ सफेद झूठ होते हैं और कुछ बहुरंगी झूठ होते हैं; वास्तव में सांख्यिकी झूठों का इन्द्रधनुष है। (There are black lies, white lies and multichromatic lies; Statistics is a rainbow of lies), आदि।

समंकों के प्रति अविश्वास का कारण यह है कि ये इतने निर्दोष होते हैं कि कोई भी व्यक्ति अपनी अज्ञानता के कारण इनका दुरुपयोग कर सकता है। कुछ लोगों का विश्वास है कि समंकों द्वारा कुछ भी सिद्ध किया जा सकता है (Statistics can prove anything), और इसी आधार पर ऐसे स्वार्थी लोग अपने कथन की पुष्टि करने के लिए अपनी आवश्यकतानुसार इनमें हेर-फेर भी कर डालते हैं तथा अनेक महत्वपूर्ण बातों को छिपा देते हैं। ऐसी दशा में जब समंक भ्रामक परिणाम सूचित करने लगते हैं, साधारण व्यक्तियों की उनके प्रति अश्रद्धा हो जाना मुश्किल नहीं। समंकों में परिवर्तन करके तो यह भी निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि भारतवर्ष की जनसंख्या चीन से अधिक है, अथवा भारतवासी अमेरिका वालों से अधिक सम्पन्न हैं! किन्तु यदि ध्यानपूर्वक देखा जाय तो इसमें समंकों का कोई दोष नहीं है—दोष समंकों का प्रयोग करने वालों का है। यह ठीक है कि समंकों का संकलन करने के उपरान्त उनमें आवश्यक परिशुद्धता लाने के लिए सांख्यिकों को कुछ काट-छाँट करनी पड़ती है, लेकिन यह किस सीमा तक करनी है, यह प्रश्न उनके अनुभव एवं योग्यता का है। आवश्यकता से अधिक परिवर्तन भी समंकों को दूषित बना देते हैं, जिनके आधार पर निकाले गए निष्कर्ष भी दूषित हो जाते हैं। अतः यह स्पष्ट है कि समंकों में कोई दोष नहीं होता, दोष उनके प्रयोगकर्ताओं में होता है।

यदि वास्तव में देखा जाय तो समंक कुछ भी सिद्ध नहीं कर सकते (Statistics can prove nothing)। सांख्यिकी कोई ऐसा विज्ञान नहीं है जिसका उद्देश्य किसी बात को सिद्ध करना हो। सांख्यिक का केवल यही कार्य है कि यथोचित रीति से समंकों का संकलन, उनका विधिवत विश्लेषण तथा अपने विश्लेषण के आधार पर वस्तुस्थिति का निर्वचन करे। यदि सम्भव हो सके तो इस बात का भी ध्यान रखे कि अमुक समस्या पर अन्य शास्त्रवालों के क्या विचार हैं। यदि उसने उचित रीतियों का प्रयोग किया है और समंकों की शुद्धता पर पूरा ध्यान रखा है, तो समंकों की वास्तविकता प्रकट की

जा सकती है। समंकों के आधार पर सांख्यिकी केवल तथ्यों की वास्तविकता को ही झलकाती है, किसी बात को सिद्ध नहीं करती।

किंग (King) नामक सांख्यिक ने समंकों के प्रति अविश्वास का एक कारण यह भी बतलाया है कि उनके प्रस्तुत-स्वरूप पर उनके गुणों की कोई छाप नहीं रहती।* अतः सांख्यिकी से अपरिचित व्यक्ति, मुख्यतः जिन्हें आंकिक तथ्यों में अधिक विश्वास होता है और जो कल्पना करते हैं कि अंक कभी असत्य नहीं हो सकते (Figures won't lie), सभी प्रस्तुत समंकों को महत्व दे बैठते हैं चाहे उनका वह स्वरूप उचित ढंग से तैयार किया गया हो अथवा अनुचित ढंग से। किन्तु ऐसे व्यक्ति जो उचित छानबीन करने के उपरान्त ही किसी तथ्य को महत्व देने वाले होते हैं, समंकों का तब तक विश्वास नहीं करते जब तक उनके प्रस्तुतकर्ताओं एवं स्त्रोतों का ठीक तरह से पता न लगा लें।

साधारणतः समंकों के निम्नलिखित दोष सांख्यिकी के प्रति अश्रद्धा उत्पन्न करते हैं :—

(क) ऐसे समंकों के आधार पर निर्वचन करना जिनका संग्रहण अनुचित ढंग से अयोग्य संकलनकर्ताओं द्वारा किया गया हो अथवा जो समंक अविश्वसनीय तथा अपर्याप्त हों;

(ख) समंक-संकलन के पूर्व अनुसन्धान का उद्देश्य तथा क्षेत्र, सांख्यिकीय इकाई (Statistical Unit), परिशुद्धता परिणाम (Standards of Accuracy) आदि का निश्चय न कर लिया गया हो;

(ग) समंकों को जानबूझ कर दोषयुक्त बनाया गया हो;

(घ) समंकों की विशेषताओं की उपेक्षा की गई हो; तथा

(ङ) सांख्यिकी की सीमाओं का बिना ध्यान रखे समंकों का विश्लेषण तथा उनका निर्वचन किया गया हो।

डा० बाउले का कहना है कि समंक केवल एक आवश्यक किन्तु अपूर्ण औजार प्रदान करते हैं, लेकिन यह औजार उन लोगों के हाथ में खतरनाक है जो

---

* One of the shortcomings of Statistics is that they do not always bear on their face the label of their quality—**King.**

उसकी प्रयोग विधि तथा सीमाओं से अनभिज्ञ हैं।* यही नहीं, सांख्यिकीय रीतियाँ तो ऐसे अनुभवहीन व्यक्तियों के हाथ में और भी भयंकर औजार हैं। सांख्यिकी उन विज्ञानों में है जिनके साधकों को एक कलाकार के समान आत्मसंयम का अभ्यास करना चाहिए।† कलाकार की विविध सामग्रियों को समंकों के समान समझना चाहिये और चित्र बनाने के ढंगों को सांख्यिकीय रीतियों के समान। यदि कलाकार चतुर तथा शुद्ध विचार वाला है और अपनी सामग्रियों का उत्तम प्रयोग करने का अभ्यस्त है, तो वह महान से महान कला के उदाहरण प्रस्तुत कर सकता है। उसी प्रकार सांख्यिक भी समंकों के आधार पर निष्पक्षतापूर्वक विविध सांख्यिकीय रीतियों का प्रयोग करके लोक-कल्याणकारी व्यवस्थायें प्रस्तुत कर सकता है। किन्तु इसके लिये सांख्यिकीय रीतियों का उचित तथा सफल प्रयोग एवं उसका आत्मसंयम ये दोनों आवश्यक हैं, अन्यथा उद्देश्य की सफलता असम्भव है।

अतः हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि न तो समंक झूठे हैं, और न तो सांख्यिकी का विज्ञान ही झूठा है। अविश्वास का वास्तविक कारण तो सांख्यिकीय रीतियों का दुरुपयोग है। किसी भी उद्योग-धंधे को करने के लिए औजार आवश्यक हैं, किन्तु उनका प्रयोग करने की क्षमता एवं योग्यता भी उनके प्रयोगकर्ताओं में होनी चाहिये। इसी प्रकार एक ही दवा किसी को अच्छा कर सकती है जबकि दूसरे को अस्वस्थ बना सकती है। अतः दवा को दोष देना भूल है, दोष चिकित्सक का समझना चाहिए जो दवा का दुरुपयोग करता है। अतएव जिस प्रकार चिकित्साशास्त्र दोषरहित है, सांख्यिकी भी एक दोषरहित विज्ञान है। यदि कहीं दोष दिखलाई पड़ता है तो उसका उत्तरदायित्व सांख्यिक पर है। सभी विषयों की अपनी निजी सीमाएँ होती हैं जिनका उलंघन सर्वदा हानिप्रद होता है। सांख्यिकी का प्रयोग कभी भी एक अंधे के समान नहीं करना चाहिए जो एक प्रकाश के खम्भे को प्रकाश देने वाली वस्तु न समझ कर एक सहारे की वस्तु समझता है। (Statistics should not be used as a blind man does a lamp-post

* Statistics only furnish a tool, necessary though imperfect which is dangerous in the hands of those who do not know its uses and deficiencies—**Dr. Bowley.**

† Statistical methods are most dangerous tools in the hands of the inexpert. Statistics is one of those sciences whose adepts must exercise the self-restraint of an artist—**Dr. Bowley.**

for support instead of for illumination)। अतः यह अनिवार्य है कि सांख्यिक को सांख्यिकी का पूर्णज्ञान तथा उसकी सीमाओं की अच्छी जानकारी हो, अन्यथा वह तथ्यों का दुरुपयोग कर बैठेगा। इस सम्बन्ध में किंग (King) का भी कथन है कि सांख्यिकी का विज्ञान एक अत्यन्त लाभदायक सहायक है, किन्तु केवल उन्हीं लोगों के लिए जो उसका उचित प्रयोग जानते हैं।* सांख्यिकीय तर्क प्रायः प्रारम्भ में भ्रामक होते हैं किन्तु स्वतन्त्र विचार सांख्यिकीय भ्रमों को दूर कर देते हैं।† मिल्स (Mills) नामक अर्थशास्त्री का विचार है कि जिस प्रकार किसी औजार का प्रयोग करते समय बुद्धि की आवश्यकता होती है उसी प्रकार सांख्यिकीय रीति का प्रयोग करते समय भी बुद्धि की आवश्यकता है। यही नहीं सांख्यिकीय विश्लेषण से जो परिणाम प्राप्त होते हैं उनका निर्वचन करने के लिए भी बुद्धि की आवश्यकता है।‡ यदि इन बातों पर ध्यान दिया जाय तो समंकों के प्रति उत्पन्न होने वाले अविश्वास दूर किए जा सकते हैं।

प्रश्न

1. What are the important duties of a Statistician ? Under what conditions would he be successful in his mission ?

सांख्यिक के मुख्य कार्य क्या हैं ? किन परिस्थितियों में वह अपने कार्य में सफल हो सकेगा ?

(एम० कॉम०, राजपूताना, १९५१)

2. 'A Statistician is not an alchemist expected to produce gold from any worthless material.'—Comment on this statement.

'सांख्यिक कोई रससिद्ध नहीं है जिससे किसी भी निम्नतर धातु से सोना बनाने की आशा की जा सके'—इस कथन की समीक्षा कीजिये।

(एम० ए०, पंजाब, १९५१)

---

* The science of Statistics is a most useful servant, but only of great value to those who understand its proper use—**King.**

† Statistical arguments are often misleading at first, but free discussion clears away statistical fallacies—**Marshall.**

‡ As a tool statistical method requires intelligent usage and that the results secured through statistical analysis require intelligent interpretations—**Mills.**

3. 'Statistics affects everybody and touches life at many points. It is both a science and an art'.

Explain the above statement, with appropriate examples.

'सांख्यिकी प्रत्येक व्यक्ति को प्रभावित करती है तथा जीवन के अनेक अंगों को स्पर्श करती है। यह विज्ञान और कला दोनों है।'

उपर्युक्त कथन की उचित उदाहरणों सहित व्याख्या कीजिए।

(बी० कॉम०, इलाहाबाद, १९५२)

4. Write a short essay on the application of modern statistical technique to economic problems, illustrating your answer with reference to at least three concrete examples.

आर्थिक समस्याओं में आधुनिक सांख्यिकीय पद्धति के प्रयोग पर कम से कम तीन ठोस उदाहरणों का चित्रण करते हुए एक संक्षिप्त निवन्ध लिखिये।

(एम० ए०, आगरा, १९४७)

5. Write an essay on 'Statistics in the service of State'.

'राज्य के प्रति सांख्यिकी की सेवायें' विषय पर एक निबन्ध लिखिये।

(आई० सी० एस०, १९३६)

6. Discuss the importance of the study of Statistics and explain how it can help businessmen in handling problems relating to market research, sales management, personnel relations, quality control and business fluctuations.

सांख्यिकी के अध्ययन की महत्ता का वर्णन कीजिए तथा यह बतलाइये कि यह व्यवसायियों को वाजार-अनुसंधान, विक्रय-प्रवन्ध, कर्मचारियों के सम्बन्ध, गुण-नियंत्रण तथा व्यापारिक-उच्चावचन सम्बन्धी समस्याओं को हल करने में किस प्रकार सहायक हो सकता है।

(एम० कॉम०, आगरा, १९५४)

7. Discuss the importance of the study of Statistics, and show how it can help the extension of scientific knowledge, the establishment of a sound business and the introduction of political reforms.

सांख्यिकी के अध्ययन का महत्व बतलाइए और यह प्रदर्शित कीजिये कि यह किस प्रकार वैज्ञानिक ज्ञान की वृद्धि करता है, सुदृढ़ व्यापार की स्थापना करता है तथा राजनैतिक सुधारों का परिचय देता है।

(बी० कॉम०, आगरा, १९४२)

8. Discuss fully the importance of Statistics as an aid to Commerce.

विशदरूप से वर्णन कीजिए कि सांख्यिकी का वाणिज्य-सहायक के रूप में क्या महत्व है।

(बी० कॉम०, इलाहाबाद, १९४३)

9. What is Statistics? Discuss fully the importance of Statistics in the management of a business enterprise.

सांख्यिकी क्या है? विस्तारपूर्वक यह बतलाइये कि किसी व्यावसायिक-प्रबन्ध में सांख्यिकी का क्या महत्व है।

(बी० कॉम०, बनारस, १९५७)

10. Explain the importance of statistical study with reference to any two problems you may choose in the public life of India, at present.

वर्तमान समय में भारतीय-जीवन की किन्हीं दो समस्याओं को लेकर सांख्यिकी के अध्ययन की महत्ता का वर्णन कीजिए।

(बी० कॉम०, बनारस, १९५२)

11. Discuss the importance of the study of Statistics in the present circumstances of India.

भारतवर्ष की वर्तमान परिस्थिति में सांख्यिकी के अध्ययन की महत्ता पर प्रकाश डालिए।

(बी० कॉम०, आगरा, १९३८)

12. Discuss the importance of Statistics for National Planning in India.

भारतवर्ष के नियोजन-कार्य में सांख्यिकी के महत्व का वर्णन कीजिये।

(एम० ए०, आगरा, १९४३)

13. (*a*) Reconcile the following statements :—
   (i) 'With statistics anything can be proved';
   (ii) 'Figures do not lie'.
   (*b*) Give the limitations of Statistical Methods.

(अ) निम्नलिखित कथनों की समता प्रकट कीजिए :—
   (क) समंकों से कुछ भी सिद्ध किया जा सकता है';
   (ख) 'अंक झूठ नहीं बोलते'।
(ब) सांख्यिकीय रीतियों की सीमायें प्रस्तुत कीजिए।

(बी० कॉम०, बनारस, १९५४, १९५५)

14. Comment on the following statements :—
   (*a*) Statistics are not worth the cost and labour involved in their collection and maintenance in ordinary business.
   (*b*) Statistics should be handled only by experts.

निम्न कथनों की समीक्षा कीजिए :—
   (अ) समंकों की कीमत उस लागत व श्रम के बराबर भी नहीं होती जो किसी साधारण व्यवसाय में उनके संकलन तथा संवर्धन पर किया जाता है।
   (ब) समंकों का प्रयोग केवल चतुर लोगों को ही करना चाहिए।

(बी० कॉम०, आगरा, १९५५)

15. 'Figures never lie'; 'Statistics can be made to prove anything.' Comment on the two statements, indicating the reasons for the existence of such divergent views regarding the nature and functions of Statistics.

'अंक कभी झूठ नहीं बोलते'; 'समंकों से कुछ भी सिद्ध कराया जा सकता है।' समंकों की प्रकृति व उनके कार्यों के प्रति इन विपरीत विचारों का कारण वतलाते हुए दोनों कथनों की समीक्षा कीजिये।

(बी० कॉम०, आगरा, १९३५)

16. 'Statistical methods are most dangerous tools in the hands of the inexpert'. Statistics is one of those sciences whose adepts must exercise the self-restraint of an artist'.

Explain fully the significance of the above statement.

'अकुशल व्यक्तियों के हाथ में सांख्यिकीय रीतियाँ अत्यन्त ही खतरनाक औजारों के समान हैं। सांख्यिकी उन विज्ञानों में है जिनके साधकों को एक कलाकार के समान आत्म-संयम का अभ्यास करना चाहिए।'

उपर्युक्त कथन के महत्व की व्याख्या विशदरूप से कीजिये।

(बी० कॉम०, इलाहाबाद, १९४७)

17. 'Statistics should not be used as a blind man does a lamp-post, for support instead of for illumination'.

Comment on the above remark.

'सांख्यिकी का प्रयोग उस प्रकार नहीं करना चाहिये जिस प्रकार कोई अन्धा व्यक्ति प्रकाश के खम्भे को प्रकाश देने वाली वस्तु न समझकर सहारे की वस्तु के समान प्रयोग करता है।'

उपर्युक्त कथन की व्याख्या कीजिये।

(बी० कॉम०, बनारस, १९५६)

18. 'Statistics are like clay of which you can make a God or a Devil, as you please'—Discuss.

'समंक मिट्टी के समान हैं जिनसे आप इच्छानुसार देव या दानव बना सकते हैं'—व्याख्या कीजिये।

(बी० कॉम०, इलाहाबाद, १९४८)

19. Discuss: "For some subjects statistics provides ideas of basic importance; for some it provides methods of investigation. In one way or the other, or in both ways Statistics has an important bearing on most other branches of knowledge".

व्याख्या कीजिये: "कुछ विषयों के लिये सांख्यिकी आधारभूत महत्व के विचार प्रदान करती है; कुछ के लिये अनुसंधान की रीतियाँ। एक ढंग से अथवा दूसरे से, या दोनों ढंगों से ज्ञान की दूसरी अनेक शाखाओं पर सांख्यिकी का प्रभाव है।"

(एम० कॉम०, आगरा, १९५२)

20. 'Statistical considerations are at best uncertain, and at worst, utterly useless.' Critically examine this statement by explaining the scope and objects of Statistics.

'सांख्यिकीय विचार मुख्यतः अनिश्चित होते हैं, तथा पूर्णतः अनावश्यक होते हैं।' इस कथन की समीक्षा सांख्यिकी का क्षेत्र व उद्देश्य समझाते हुए कीजिये।

(बी० कॉम०, बनारस, १९४५)

21. Define 'Statistics' and show how it can help the extension of scientific knowledge, the establishment of a sound business and the formulation of a plan for national economic development.

'सांख्यिकी' की परिभाषा दीजिए तथा यह प्रदर्शित कीजिये कि यह किस प्रकार वैज्ञानिक ज्ञान की वृद्धि करती है, सुदृढ़ व्यापार की स्थापना करती है तथा राष्ट्रीय आर्थिक उत्थान के लिए योजना तैयार करती है।

(बी० कॉम०, आगरा, १९५६)

22. 'Statistics only furnish a tool, necessary though imperfect which is dangerous in the hands of those who do not know its uses and deficiencies'—(Bowley).

Discuss the above statement and explain the importance of Statistics.

'समंक केवल एक आवश्यक किन्तु अपूर्ण औजार प्रदान करते हैं, जो उन लोगों के हाथ में खतरनाक है जो उसकी प्रयोग विधि तथा उसकी सीमायें नहीं जानते।'—(बाउले)

उपर्युक्त कथन की व्याख्या कीजिये तथा सांख्यिकी का महत्व बतलाइये।

(बी० कॉम०, आगरा, १९५७)

23. 'The application of statistical methods to investigations is generally based on assumptions, it is subject to limitations and often leads to uncertain inferences'—Comment.

'अनुसंधान कार्यों में सांख्यिकीय रीतियों का प्रयोग साधारणतः मान्यताओं पर आधारित होता है, यह सीमाओं से प्रभावित रहता है और प्रायः अनिश्चित निष्कर्षों की ओर हमें अग्रसर करता है।'—समीक्षा कीजिए।

(एम० ए०, आगरा, १९५७)

अध्याय ३

सांख्यिकीय अनुसंधान

(Statistical Investigation)

(सांख्यिकीय अनुसंधान का प्रारम्भ—समस्या की परिभाषा—अनुसंधान का लक्ष्य तथा क्षेत्र—अनुसंधान की प्रकृति—इकाई का निश्चय—सांख्यिकी इकाई के भेद—परिशुद्धता परिमाण—समंकों का संकलन—प्राथमिक समंकों की संकलन-रीतियाँ—प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसंधान—अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसंधान—संवाददाताओं द्वारा सूचनायें—सूचकों द्वारा अनुसूचियाँ या प्रश्नावली भरवाना—प्रगणकों द्वारा अनुसूचियाँ भरना—अनुसूची तथा प्रश्नावली—द्वितीयक समंकों की संकलन-रीतियाँ—द्वितीयक समंकों के स्रोत—द्वितीयक समंकों की जाँच—प्रश्न)

सांख्यिकीय अनुसंधान का प्रारम्भ

(Beginning of a Statistical Investigation)

सांख्यिकीय अनुसंधानों का प्राचीन काल से ही बड़ा महत्व रहा है। जैसा पहले बतलाया जा चुका है मिश्र, यूनान, रोम, चीन और भारत में अनेक राजाओं ने अनुसंधान कार्य कराये थे, जिनके आधार पर शासन-प्रणाली तथा आर्थिक व सामाजिक जीवन में सुधार लाने का प्रयत्न किया गया था। इस युग में तो साधारणतः प्रथम महायुद्ध के उपरान्त सभी क्षेत्रों में विभिन्न समस्याओं को हल करने के लिये सांख्यिकीय अनुसंधानों का प्रयोग होने लगा है। क्रय, विक्रय, उत्पादन, उपभोग, विपणन, वित्त आदि व्यावसायिक समस्याओं का अध्ययन हम सांख्यिकीय अनुसंधान द्वारा ही करते हैं। यही नहीं, राज्य की ओर से भी आर्थिक और सामाजिक समस्याओं पर प्रकाश डालने तथा उनको सुलझाने के लिये ऐसे अनुसंधान हो रहे हैं।

सांख्यिकीय अनुसंधान के मूल आधार समंक हैं। इन समंकों को वैज्ञानिक ढंग से एकत्र करना तथा उनका विविध रीतियों से विश्लेषण करके किसी समस्या का यथोचित निर्वचन करना ही अनुसंधान कार्य है। किन्तु किसी

भी अनुसंधान को करने के पूर्व निम्नलिखित बातों का विचार कर लेना आवश्यक है :—

(१) समस्या की परिभाषा (Definition of the Problem)

(२) अनुसंधान का लक्ष्य तथा क्षेत्र (Object and Scope of Investigation)

(३) अनुसंधान की प्रकृति (Nature of Investigation)

(४) इकाई का निश्चय (Determination of the Unit)

(५) परिशुद्धता परिमाण (Degree of Accuracy)

समस्या की परिभाषा (Definition of the Problem)

जिस समस्या के सम्बन्ध में अनुसंधान करना है उसकी स्पष्ट परिभाषा पहले से ही निश्चित कर लेनी चाहिये अन्यथा आगे चलकर अनुसंधान कार्य में अनेक कठिनाइयाँ आ पड़ेंगी और ऐसा भी हो सकता है कि एकत्रित किये हुए समंक व्यर्थ हो जायँ। इससे वहुत समय, श्रम और धन का अपव्यय हो सकता है। उदाहरण के लिये यदि किसी औद्योगिक क्षेत्र में रहने वाले मज़दूरों की मज़दूरी के सम्वन्ध में अनुसंधान करना है तो यह पहले ही निश्चय कर लेना चाहिये कि उनकी नकद मज़दूरी (Money Wages) से सम्वन्धित समंक एकत्रित करने हैं या वास्तविक मज़दूरी (Real Wages) से सम्वन्धित। उन्हें रहने की जो निःशुल्क सुविधायें मिली हैं, निःशुल्क दवायें मिलती हैं या उनके वच्चों के पढ़ने का जो निःशुल्क प्रवन्ध है यह सब ध्यान में रखना है या नहीं। यदि इस प्रकार की वातें निश्चित हो जाती हैं तो बाद में अनुसंधान करते समय केवल आवश्यक और महत्वपूर्ण समंक ही एकत्र होते हैं।

अनुसंधान का लक्ष्य तथा क्षेत्र (Object and Scope of Investigation)

जिस समस्या का अनुसंधान करना है उसकी परिभाषा निश्चित करने के उपरान्त यह भी सोच लेना आवश्यक है कि उसका लक्ष्य अथवा प्रयोजन क्या है, और उसके अनुसंधान कार्य का क्या क्षेत्र होगा। यदि अनुसंधान का लक्ष्य निश्चित कर लिया जाता है तो आगे चलकर समंकों के वर्गीकरण, सारणीयन, विश्लेषण अथवा निर्वचन में कठिनाई नहीं उठानी पड़ती। लक्ष्य के ही आधार पर अनुसंधान कार्य साधारण (General) या विशेष (Specific) होते हैं।

यदि संग्रहीत समंकों से सर्वसाधारण को लाभ उठाना है तो अनुसंधान बड़े पैमाने पर होना चाहिये, किन्तु यदि उनका संकलन केवल किसी विशेष उद्देश्य अथवा प्रयोजन के लिये ही करना है तो छोटे पैमाने पर किया गया अनुसंधान विशेष लाभप्रद होगा। जनसंख्या सम्बन्धी अनुसंधान वड़े पैमाने पर इसीलिये किया जाता है कि इसके द्वारा प्राप्त समंकों का प्रयोग सभी लोग करते हैं। इसके विपरीत यदि किसी स्थान के नागरिकों की जीविका का केवल अध्ययन करना है तो एक छोटी जाँच पर्याप्त है। अनुसंधान कार्य में अनेक कठिनाइयों का सामना करना पड़ता है, अतः उसका ठीक ठीक लक्ष्य तथा क्षेत्र पहले से ही निश्चित कर लेना लाभदायक होता है।

अनुसंधान की प्रकृति (Nature and Type of Investigation)

सांख्यिकीय अनुसंधान अपनी प्रकृति के अनुसार कई प्रकार के होते हैं। कुछ अनुसंधान गोपनीय (Confidential) और कुछ अगोपनीय (Non-Confidential) होते हैं। गोपनीय अनुसंधान साधारणतः सरकार की ओर से किये जाते हैं, और जो समंक प्राप्त होते हैं उनका प्रयोग केवल राजकीय कार्यों में किया जाता है। अतः उनका प्रकाशन नहीं किया जाता। इसके विपरीत अगोपनीय अनुसंधान द्वारा एकत्रित समंकों का प्रकाशन किया जाता है और जनता उनका उपयोग कर सकती है। फिर कुछ अनुसंधान प्राथमिक (Primary) और कुछ द्वितीयक (Secondary) होते हैं। प्राथमिक अनुसंधान में उन समंकों का संकलन किया जाता है जिनका संकलन इसके पहले कभी नहीं हुआ है। द्वितीयक अनुसंधान संग्रहीत समंकों के आधार पर किया जाता है जिससे पिछले अनुसंधानों की शुद्धता की जाँच की जा सके और उनका ठीक ठीक विश्लेषण हो सके। अनुसंधान कार्य संगणना रीति (Census Method) और निदर्शन रीति (Sample Method) से भी होते हैं। पहली रीति के अनुसार समस्या से सम्बन्धित सभी बातों का विस्तारपूर्वक अनुसंधान किया जाता है जबकि दूसरी रीति के अनुसार केवल उन्हीं तथ्यों का अनुसंधान किया जाता है जो हमारे निदर्शनों से सम्बन्धित हैं। समंक एकत्रित करने की यह दूसरी अनुसंधान रीति सांख्यिकी में अत्यन्त महत्वपूर्ण है। इसी प्रकार अनुसंधान करने की और भी अनेक रीतियाँ हैं, जैसे डाक द्वारा अनुसंधान (Mail Order Investigation), जिसमें डाक द्वारा अनुसूचियाँ (Schedules) भेजकर आवश्यक सूचनायें मँगाई जाती हैं; प्रत्यक्ष अनुसंधान (Direct Investigation),

जिसमें गणक स्वयं घर घर जा कर सूचनायें एकत्र करते हैं; क्रमिक अनुसंधान (Regular Investigation), जिसमें लगातार समय समय पर समंक एकत्र होते रहते हैं; अथवा सामयिक अनुसंधान (*ad hoc* Investigation) जिसमें केवल एक ही बार किसी विशेष अवसर पर समंकों का संकलन किया जाता है।

इकाई का निश्चय (Determination of the Unit)

अनुसंधान की प्रकृति व उसके लक्ष्य का निश्चय करने के उपरान्त यह प्रश्न उठता है कि समंकों को किस 'इकाई' में एकत्र करना है। इकाई की स्पष्ट परिभाषा निश्चित कर लेने पर अनुसंधान की सम्पूर्ण क्रिया आरम्भ से अन्त तक सुगमतापूर्वक होती रहती है। देखने में तो यह समस्या बड़ी सरल प्रतीत होती है किन्तु वास्तव में जटिल है। इकाई की अस्पष्टता के कारण सारा अनुसंधान कार्य विफल हो सकता है। अतः इसका निश्चय करने के समय निम्नलिखित बातों का ध्यान रखना चाहिये :—

(१) इकाई की परिभाषा सरल, स्पष्ट और संक्षिप्त होनी चाहिये। उदाहरण के लिये यदि 'बेकारी' से सम्बन्धित समंक एकत्र करने हैं तो यह निश्चय कर लेना चाहिये कि 'बेकार' की श्रेणी में किन व्यक्तियों को गिनना है, अथवा यदि किसी वस्तु के 'मूल्य' से सम्बन्धित समंक एकत्र करने हैं तो किस मूल्य को लेना है—विक्रय-मूल्य को, थोक-मूल्य को या खुदरा-मूल्य को। इसी प्रकार आय, लाभ, साक्षरता, निरक्षता आदि सभी समस्याओं की स्पष्ट और संक्षिप्त इकाई का निश्चय कर लेना चाहिये, अन्यथा अलग-अलग गणक एक ही समस्या का अलग-अलग अर्थ लगायेंगे जिनकी वजह से सम्पूर्ण अनुसंधान भ्रामक परिणाम सूचित कर सकता है।

(२) इकाई में स्थिरता होनी चाहिये, और यदि स्थिरता नहीं है तो इसके लिये किसी प्रमाप का प्रयोग करना चाहिये। उदाहरण के लिये यदि अनुसंधान की इकाई रुपया रखना है तो यह ध्यान रखना चाहिये कि रुपये का मूल्य हमेशा स्थिर नहीं रहता। युद्ध काल के पूर्व रुपये का जो मूल्य था और आज जो मूल्य है उसमें बड़ा अन्तर है। रुपये में एकत्र किये गये पिछले समंकों की तुलना आज एकत्र किये गये समंकों से नहीं की जा सकती। अतः प्राप्त किये गये समंकों में आवश्यक संशोधन करने के लिए एक प्रमाप निश्चित कर लेना चाहिए। इसके लिए साधारणतः एक गुणक का प्रयोग किया जाता है जिसे परिवर्तन गुणक (Conversion Coefficient) कहते है। जैसे युद्ध के

पूर्व एक रुपये में १० सेर गेहूँ आता था जबकि अव केवल $२\frac{१}{२}$ सेर आता है, तो यहाँ सेर में एकत्रित किए गये युद्ध के पूर्व के समंकों का परिवर्तन-गुणक $\frac{१}{४}$ लिया जा सकता है। भारतवर्ष में यही समस्या तौल व नाप के सम्बन्ध में है। कहीं ४० सेर का मन होता है तो कहीं ५० सेर का। अतः इकाई में स्थिरता रखना अत्यन्त आवश्यक है।

(३) सांख्यिकीय इकाई में अनुसंधान के विषय के अनुसार अनुकूलता होनी चाहिए। उदाहरण के लिये मजदूरों से सम्बन्धित विभिन्न विषयों का अध्ययन करने के लिए भिन्न भिन्न इकाइयों की आवश्यकता पड़ सकती है क्योंकि प्रत्येक दशा में 'मज़दूर' शब्द का विशेष अर्थ होगा। किसी सूती वस्त्र उद्योग में ही 'मजदूरों' के अलग अलग अर्थ हो सकते हैं। 'सम्पूर्ण उद्योग' सम्वन्धी किसी समस्या का अध्ययन करते समय 'मजदूर' शब्द का अर्थ अत्यन्त व्यापक होगा किन्तु इसी शब्द का अर्थ उस दशा में संकीर्ण हो जायगा जब हमें केवल 'कताई' या 'बुनाई' सम्बन्धी समस्या पर विचार करना है।

(४) इकाई की यह भी विशेषता होनी चाहिए कि उसमें सहजातीयता तथा एकरम्यता हो, अन्यथा एकत्रित समंकों की तुलना कठिन हो जायगी। इस कठिनाई का हल समंकों को कई विभागों में बाँटकर किया जा सकता है। उदाहरण के लिए यदि चीनी का मध्यक मूल्य मालूम करना है, जबकि बाजार में चार प्रकार की चीनी मिलती है, तो एकत्रित समंकों को चार भागों में बाँट कर उनके अलग अलग मूल्यों को भाराङ्कित करना चाहिए।

सांख्यिकीय इकाई के भेद (Kinds of Statistical Units)

सांख्यिकीय इकाइयाँ दो प्रकार की होती है :—

(१) आगणन की इकाइयाँ (Units of Enumeration)

(२) विश्लेषण और निर्वचन की इकाइयाँ (Units of Analysis and Interpretation)

'आगणन की इकाइयाँ' संकलन किए जाने वाले समंकों की माप से सम्बन्ध रखती हैं। इन्हें दो भागों में बाँटा जा सकता है :—

(क) सरल इकाई (Simple Unit)

(ख) संग्रथित इकाई (Composite Unit)

'सरल इकाई' समंकों की माप को व्यक्त करती है। अतः रुपया, मन, सेर, घर इत्यादि सरल इकाइयों के उदाहरण हैं। इन सरल इकाइयों में जब

कोई विशेषण जोड़ दिया जाता है तो वे 'संग्रथित इकाइयाँ' बन जाती हैं, जैसे प्रतिमील जनसंख्या का घनत्व (Density of Population per mile), प्रति व्यक्ति आय (Per Capita Income), इत्यादि ।

'विश्लेषण और निर्वचन की इकाइयाँ' वे इकाइयाँ हैं जिनके आधार पर समंकों की तुलना की जाती है । अनुपात, प्रतिशत, दर, गुणक, इत्यादि विश्लेषण और निर्वचन की इकाइयाँ हैं । इन इकाइयों के प्रयोग से तुलनात्मक अध्ययन अधिक सुगम होता है ।

परिशुद्धता परिमाण (Degree of Accuracy)

सांख्यिकीय अनुसन्धानों में पूर्ण परिशुद्धता की कोई आवश्यकता नहीं रहती । यदि अधिकाधिक धन, समय व श्रम लगा कर पूर्ण परिशुद्धता प्राप्त करने का प्रयत्न भी किया जाय तो उससे कोई विशेष लाभ न होगा क्योंकि यह पहले ही बतलाया जा चुका है कि सांख्यिकी एक 'अनुमान व संभावनाओं का विज्ञान' है । अत्यधिक शुद्ध परिणाम न तो हमें प्राप्त हो सकते हैं और न हम उनकी अपेक्षा ही करते हैं । फिर भी सांख्यिकी में कुछ ऐसी अनुसन्धान रीतियाँ हैं जिनके आधार पर सरलतापूर्वक निकाले गए फल करीब करीब शुद्ध परिणाम की ओर ही संकेत करते हैं । इसके अतिरिक्त सामाजिक व आर्थिक समस्याओं में पूर्ण परिशुद्धता आवश्यक नहीं समझी जाती क्योंकि परिणामों में थोड़ा अन्तर होने से कोई विशेष हानि नहीं होती । किन्तु वैज्ञानिक समस्याओं में पूर्ण परिशुद्धता का ध्यान रखना आवश्यक होता है ।

वास्तव में परिशुद्धता परिमाण समस्याओं की प्रकृति पर निर्भर है । आयात-निर्यात सम्बन्धी समंकों में निकटतम हजार या लाख तक की शुद्धता पर्याप्त है जबकि विनिमय दर का अत्यन्त ही शुद्ध होना आवश्यक है, अन्यथा विनिमय करते समय सैकड़ों या हजारों रुपये का अन्तर पड़ सकता है ।

समंकों का संकलन
(Collection of Statistical Data)

अनुसंधान का विषय, उसका उद्देश्य व प्रयोजन, शुद्धता परिमाण तथा इकाई आदि निश्चित करने के उपरान्त समंकों के संकलन का कार्य शुरू किया जाता है । ऊपर यह बतलाया गया है कि समंक दो प्रकार के होते हैं—एक प्राथमिक समंक (Primary Data) और दूसरे द्वितीयक समंक (Secondary Data) । प्राथमिक समंक वे समंक हैं जिनके सम्बन्ध में

प्रथम वार अनुसंधान किया जा रहा है, जबकि द्वितीयक समंक वे हैं जिन्हें अन्य अनुसंधानकर्ता इसके पूर्व ज्ञात कर चुके हैं, किन्तु अब जिनका संकलन उनके विश्लेषण तथा शुद्धता की जाँच करने के लिये किया जा रहा है। वास्तव में यदि देखा जाय तो एक ही समंक जो एक व्यक्ति के लिये प्राथमिक हैं दूसरे के लिये द्वितीयक हो सकते हैं। जनगणना संबंधी समंक सरकार के दृष्टिकोण से प्राथमिक हैं किन्तु उनका अन्य प्रयोग करने वाले व्यक्तियों के लिये द्वितीयक हैं। इन दोनों प्रकार के समंकों का संकलन करने की अलग अलग रीतियाँ हैं जिन्हें क्रमशः प्राथमिक रीति (Primary Method) व द्वितीयक रीति (Secondary Method) कहते हैं। प्राथमिक रीति से समंकों का संकलन करना अवश्य ही कठिन है किन्तु उनसे जो सूचनायें प्राप्त होती हैं वे अत्यन्त उपयुक्त व विश्वसनीय होती हैं। इसके विपरीत द्वितीयक रीति द्वारा प्रकाशित अथवा अप्रकाशित सूचनायें भले ही सुगमतापूर्वक प्राप्त हो जाती हों, किन्तु उनके आधार पर ज्ञात किये गये निष्कर्षों में नवीनता का अभाव रहता हैं।

प्राथमिक समंकों की संकलन-रीतियाँ
(Methods of Collecting Primary Data)

(क) प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसंधान (Direct Personal Investigation)
(ख) अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसंधान (Indirect Oral Investigation)
(ग) संवाददाताओं द्वारा सूचनायें (Information through correspondents)
(घ) सूचकों द्वारा अनुसूचियाँ या प्रश्नावली भरवाना (Schedules to be filled in by informants)
(ङ) प्रगणकों द्वारा अनुसूचियाँ भरना (Schedules to be filled in by Investigators)

प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसंधान (Direct Personal Investigation)

इस रीति के अनुसार अनुसंधानकर्ता स्वयं अनुसंधान का प्रारम्भ करता है और स्वयं ही अपने प्रयत्नों द्वारा समंक एकत्र करता है। यदि वह योग्य, दूरदर्शी और धैर्यवान है तो इस रीति द्वारा प्राप्त समंक अत्यन्त ही विश्वसनीय होंगे। जबतक आवश्यक सूचनायें प्राप्त नहीं हो जातीं उसे अपने क्षेत्र में ही रहना पड़ता है। बहुत समय पहले योरप में ले प्ले (Le Play) नामक एक

सांख्यिक ने इस रीति द्वारा मज़दूरों के आय-व्यय संबंघी समंकों को एकत्र किया था। यह रीति उस अनुसंधान कार्य के लिये अत्यन्त श्रेष्ठ है जहाँ समंकों की मात्रा कम है।

प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसंधान के निम्नलिखित लाभ हैं:—

(१) इस रीति द्वारा मौलिक समंकों का संकलन होता है।

(२) प्राप्त किए गए समंक शुद्ध होते हैं क्योंकि इनके संकलन में व्यक्तिगत शक्ति का प्रयोग किया जाता है।

(३) इन समंकों में सहजातीयता और एकरूपता भी रहती है। एक ही व्यक्ति द्वारा समंक एकत्रित किए जाने के कारण एक ही श्रेणी के समंक प्राप्त होते हैं जिससे उनका विश्लेषण व निर्वचन विश्वसनीय होता है। यदि अनेक व्यक्ति रक्खे जाते हैं तो वे एक ही समस्या को अलग अलग दृष्टिकोण से देख सकते हैं जिससे समंकों में दोष आ जाने की सम्भावना रहती है।

परन्तु इस रीति के निम्नलिखित दोष हैं:—

(१) इस रीति द्वारा विस्तृत अनुसंधान असम्भव है क्योंकि एक अकेला व्यक्ति बहुत बड़े पैमाने पर कार्य नहीं कर सकता। अतएव एक बड़े अनुसंधान द्वारा प्राप्त होने वाले लाभ नहीं प्राप्त किये जा सकते।

(२) ऐसा भी सम्भव है कि अनुसंधानकर्ता के अध्ययन का क्षेत्र इतना छोटा हो कि वह समग्र (Universe) की विशेषताओं पर प्रकाश न डाल सके। अनुसंधान कार्य में यह आवश्यक है कि न्यादर्श समग्र का प्रतिनिधित्व करे।

(३) इस रीति द्वारा अनुसन्धान करने में व्यक्तिगत पक्षपात (bias) के कारण अनेक दोष आ सकते हैं।

(४) इसमें बहुत अधिक समय, धन तथा श्रम का अपव्यय होता है।

अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसंधान (Indirect Oral Investigation)

जब अनुसंधान का क्षेत्र अधिक व्यापक होता है तो इस रीति का प्रयोग किया जाता है। इसके अनुसार सूचकों (informants) द्वारा प्रत्यक्षरूप से समंक न प्राप्त करके उन व्यक्तियों द्वारा प्राप्त किए जाते हैं जिनका उन समंकों से कोई अप्रत्यक्ष सम्बन्ध है। साधारणतः यह रीति तब अपनानी पड़ती है जब सूचकों से कोई बात ज्ञात होना कठिन प्रतीत होता हो, उन्हें अनुसंधान

कार्य में कोई रुचि न हो अथवा समंक ही कुछ ऐसे पेचीदे ढंग के हों जिन्हें प्रत्यक्षरूप से प्राप्त करना कठिन हो। सरकार द्वारा नियुक्त कमेटियाँ व आयोग इस रीति का अधिक प्रयोग करते हैं। किन्तु इसका प्रयोग करते समय निम्न सावधानियां रखनी चाहिये :—

(१) इस बात का ध्यान रखना चाहिये कि जिस व्यक्ति से सूचना प्राप्त की जा रही है वह वास्तव में उन समंकों के बारे में पूर्ण ज्ञान रखता है।

(२) किसी एक व्यक्ति की ही सूचना पर पूर्णरूप से विश्वास नहीं करना चाहिये क्योंकि वह पक्षपात कर सकता है। अतः दूसरे व्यक्तियों से भी पूछताछ करके उसकी जाँच कर लेनी चाहिये।

(३) यदि सूचक अशिक्षित, असंतुलित मस्तिष्कवाला, आशावादी या निराशावादी है तो भ्रामक सूचनायें दे सकता है।

यदि उपर्युक्त सावधानियों का ध्यान रखते हुये इस रीति द्वारा समंक-संकलन किया जाय तो वह लाभप्रद होगा, क्योंकि इसमें कम धन लगता है और कार्य में भी शीघ्रता होती है।

संवाददाताओं द्वारा सूचनायें प्राप्त करना
(Information through Correspondents)

इस रीति द्वारा समंकों का विधिवत संकलन नहीं किया जाता बल्कि स्थानीय संवाददाताओं से आवश्यक सूचनायें प्राप्त की जाती हैं, जिनकी योग्यता पर विश्वास है। यह रीति केवल उन अनुसंधानों में उपयुक्त है जिनका क्षेत्र सीमित है और जहाँ अत्यन्त शुद्ध परिणामों की आवश्यकता नहीं है। संवाददाता भी किसी समस्या के सम्बंध में अलग से कोई समंक एकत्र नहीं करते बल्कि अपने अनुभव के आधार पर ही सूचनायें देते हैं। यों तो इनके द्वारा प्रदत्त सूचनाओं में अशुद्धियां होना असम्भव नहीं रहता, फिर भी अनुसंधानकर्ताओं का विश्वास रहता है कि ये अशुद्धियां क्षतिपूरक (Compensating Errors) होंगी जो एक दूसरे को नष्ट करके शुद्ध परिणाम की ओर संकेत करेंगी। सरकार फसल सम्बंधी सूचनायें इसी रीति से प्राप्त करती है।

यह रीति सरल और मितव्ययी है परन्तु इसके द्वारा उपलब्ध समंकों में मौलिकता का अभाव रहता है। अनुसंधान के प्रति संवादाताओं की कोई

व्यक्तिगत रुचि न होने के कारण उनके समंकों की विश्वसनीयता संदेहजनक होती है।

सूचकों द्वारा अनुसूचियाँ या प्रश्नावली भरवाना
(Schedules to be filled in by informants)

इस रीति के अनुसार अनुसंधानकर्ता आवश्यक समंकों की प्राप्ति के लिये अनुसूचियाँ या प्रश्नावली तैयार करता है और उन्हें मुद्रित कराके डाक द्वारा उन व्यक्तियों या संस्थाओं के पास भेजता है जिनसे वे समंक प्राप्त करने हैं। इन अनुसूचियों के साथ एक प्रार्थना-पत्र भी रहता है जिसमें सूचक से अनुरोध किया जाता है कि वे दिये गये रिक्त स्थानों में आवश्यक उत्तर लिखकर उन्हें शीघ्रतयाशीघ्र लौटा दें। साथ ही साथ यह भी स्पष्ट कर दिया जाता है कि उनके द्वारा प्रदत्त सूचनायें पूर्णतया गुप्त रक्खी जायँगी तथा उनका प्रकाशन किसी भी दशा में न किया जायगा। तत्पश्चात सूचक उन अनुसूचियों में दिये गये प्रश्नों के उत्तर रिक्त स्थानों में लिखकर उन्हें पुनः अनुसंधानकर्ता के पास डाक द्वारा वापस भेज देते हैं।

इस रीति के अनुसार सूचनायें एकत्र करने के निम्नलिखित लाभ हैं:—

(१) यह रीति बड़ी सरल और सस्ती है क्योंकि इसके द्वारा थोड़े ही समय में इतनी अधिक सूचनाएँ प्राप्त की जा सकती हैं जिनको एकत्र करने के लिये कई प्रगणकों को बहुत समय लगाना पड़ेगा।

(२) जो सूचनाएँ प्राप्त होती हैं वे मौलिक होने के कारण अधिक विश्वसनीय होती हैं।

किन्तु इस रीति के अनेक दोष भी हैं:—

(१) इसका प्रयोग वहीं किया जा सकता है जहाँ लोग शिक्षित हों अन्यथा वे प्रश्नों का उत्तर देने में असमर्थ होंगे।

(२) प्रश्नावली में प्रश्नों के उत्तर लिखकर उन्हें वापस करना सूचकों की इच्छा पर निर्भर है। ऐसा देखा गया है कि अधिकतर लोग अनुसंधान में रुचि न होने के कारण उन्हें वापस ही नहीं करते, और जो वापस करते भी हैं उनमें प्रश्नों के उत्तर अपूर्ण या अशुद्ध रहते हैं जिनके कारण समंकों का विश्लेषण भ्रामक परिणाम प्रकट करता है।

(३) बहुत से लोग ऐसे भी होते हैं जो कोई विशेष बात पूछने पर तो

बतला सकते हैं किन्तु अपने हाथ से लिखकर किसी को देना बुरा समझते हैं। ऐसे लोगों से इस रीति द्वारा कोई सूचना प्राप्त करना कठिन है।

(४) सूचकों को इस बात का भी भय रहता है कि कहीं उन समंकों के आधार पर किसी प्रकार के कर वग़ैरह न लगा दिये जायें।

इस रीति द्वारा प्रदत्त सूचनाओं में पूर्ण शुद्धता का अभाव रहता है। फिर भी इससे लाभ उठाया जा सकता है यदि सूचकों से नम्रतापूर्वक बार बार अनुरोध किया जाय, और उनके मन में यह विश्वास दिलाने का प्रयत्न किया जाय कि उनके द्वारा दी गई सूचनायें गुप्त रखी जायँगी व उनका प्रयोग केवल उसी अनुसंधान कार्य में किया जायगा। साथ ही साथ प्रश्नावली भी सरल व छोटी बनानी चाहिये ताकि सूचकों को सूचना देने में अधिक समय न लगाना पड़े। इसके अतिरिक्त प्रश्नावली में ऐसी भी कोई बात न होनी चाहिये जिससे किसी सम्प्रदाय या समाज विशेष पर आघात होता हो।

इस रीति का प्रयोग साधारणतः व्यक्तिगत अनुसंधानों के लिए किया जाता है। कभी कभी औद्योगिक संस्थाओं में भी श्रमिकों की मज़दूरी, बेकारी, या उनके जीवन-स्तर, आदि से सम्बन्धित समंकों को एकत्र करने के लिये इस रीति का प्रयोग होता है।

प्रगणकों द्वारा अनुसूचियाँ भरना

(Schedules to be filled in by the Investigators)

सूचकों द्वारा अनुसूचियाँ भरने वाली रीति की कठिनाइयों को दूर करने के लिये यह रीति काम में लाई जाती है। इसमें अनुसूचियाँ अथवा प्रश्नावली सूचकों के पास भेजने के बजाय प्रगणकों को दे दी जाती है जो अपने अपने क्षेत्र में रहने वाले सूचकों से साक्षात्कार करते हैं और उनसे पूछताछ कर के आवश्यक सूचनायें भरते हैं। अतः इस रीति की सफलता इन्हीं प्रगणकों पर निर्भर है। यह अति आवश्यक है कि ऐसे व्यक्तियों को प्रगणक बनाया जाय जो धैर्यवान, चतुर, परिश्रमी, बुद्धिमान तथा ईमानदार हों। उन्हें तरह तरह के व्यक्तियों से मिलना पड़ता है, अतः उनमें इतनी योग्यता होनी चाहिये कि वे सब के साथ उचित व्यवहार कर सकें और उन्हें ठीक तरह से समझाकर उनसे आवश्यक सूचनायें उपलब्ध कर सकें। साथ ही साथ उन्हें अपने क्षेत्र में रहने वाले सूचकों के रहन-सहन के बारे में भी ज्ञान होना चाहिये अन्यथा वे उनके साथ उचित व्यवहार न कर सकेंगे। सूचक साधारणतः व्यर्थ की

अनेक अशुद्ध सूचनायें देते हैं। प्रगणक को धैर्यपूर्वक उनकी बातें सुननी चाहिये और अपनी तर्कशक्ति का प्रयोग करते हुए उनमें से आवश्यक बातों को छांट लेनी चाहिए। इसके लिये उन्हें शिक्षित होना भी आवश्यक है।

समंक-संकलन की यह रीति सबसे महत्वपूर्ण और विश्वसनीय समझी जाती है। यद्यपि इसमें बहुत अधिक धन व समय लगता है फिर भी इसका प्रयोग बड़े बड़े अनुसंधान कार्यों में किया जाता है। भारत की जनगणना इसी रीति से की जाती है।

अनुसूची तथा प्रश्नावली (Schedule and Questionnaire)*

अनुसूची व प्रश्नावली की उत्तमता पर ही अनुसंधान की सफलता निर्भर रहती है। अतः इन्हें तैयार करते समय निम्नलिखित बातों का ध्यान रखना आवश्यक है :—

(१) जहाँ तक हो सके उसमें कम से कम प्रश्न होना चाहिए। इस बात का ध्यान रहे कि प्रश्न ऐसे न हों जिनका उत्तर देने में सूचक परेशान हो जायें।

(२) प्रश्न सरल, स्पष्ट और छोटा होना चाहिये।

(३) प्रश्नों के उत्तर किस प्रकार प्राप्त करने हैं यह पहले ही सोच लेना चाहिए। जहाँ तक हो सके प्रश्नों के उत्तर 'हां' या 'नहीं' में मांगे जायें तो अच्छा है।

(४) प्रश्न ऐसा नहीं होना चाहिये कि पूछने पर लोग चिढ़ जायें। ऐसे प्रश्नों को अनुसूचियों में भूल कर भी शामिल नहीं करना चाहिए जिनसे किसी विशेष समाज या सम्प्रदाय को मानने वाले व्यक्ति पर आघात हो।

(५) इस बात का भी ध्यान रखना चाहिए कि जो सूचनाएँ मांगी जा रही हैं उनका अनुसंधान से प्रत्यक्ष सम्बन्ध है या नहीं। व्यर्थ की बातें पूछने से सूचक उदासीनता दिखलाने लगते हैं और प्रगणकों का समय भी नष्ट होता है।

---

* कुछ लोगों ने 'अनुसूची' तथा 'प्रश्नावली' में एक साधारण सा अन्तर बतलाया है। उनके कथनानुसार जिस रिक्त प्रारूप (Blank Form) में सूचनायें प्रगणक भरें वह 'अनुसूची' तथा जिसमें सूचक भरें वह 'प्रश्नावली' है। किन्तु अधिकतर सांख्यिक दोनों शब्दों का एक सा ही प्रयोग करते हैं।

(६) प्रश्नों का चुनाव इस प्रकार होना चाहिए कि वे एक दूसरे की यथार्थता जांच सकें। इससे समंकों में अशुद्धियाँ कम होती हैं।

(७) प्रश्न ऐसा चुनना चाहिये जिसका उत्तर देने में लोगों को न लज्जित होना पड़े और न उनके मन में किसी प्रकार की शंका पैदा हो। ऐसी अनेक बातें होती हैं जिनको लोग अपने तक ही सीमित रखना चाहते हैं।

(८) अनुसूचियों के साथ एक अनुरोध-पत्र का होना भी आवश्यक है जिसमें उनके सहयोग की आकांक्षा की जाय।

अगले पृष्ठ पर एक अनुसूची का नमूना दिया जा रहा है जिसका प्रयोग भारत में १९५१ की जनगणना करने के लिये किया गया था।

द्वितीयक समंकों की संकलन-रीतियाँ

(Methods of Collecting Secondary Data)

यह पहले ही बतलाया जा चुका है कि द्वितीयक समंक वे समंक अथवा सूचनायें हैं जिनका संकलन किसी अन्य व्यक्ति अथवा संस्था द्वारा किया जा चुका है। प्राथमिक समंकों को एकत्र करना एक कठिन कार्य है और उसमें अधिक धन व समय की आवश्यकता होती है। अतः अनुसंधानकर्ता द्वितीयक समंकों के आधार पर ही अपने अनेक अनुसन्धान कार्य करते हैं। किन्तु द्वितीयक समंक अनेक हाथों से गुजरते रहते हैं जिसके फलस्वरूप उनमें अशुद्धियों का होना संभव है। अतएव अनुसंधानकर्ता को उनका अनुमान लगाकर पर्याप्त संशोधन करने का प्रयत्न करना चाहिए। **कॉनर** का कथन है कि दूसरे व्यक्तियों द्वारा एकत्रित समंक अशुद्धियों से पूर्ण रहते हैं।* **डा० बाउले** ने भी इस सम्बन्ध में अपने विचार व्यक्त किये हैं। उनके मतानुसार प्रकाशित समंकों को ऊपर से ही देखकर ग्रहण कर लेना सुरक्षित नहीं है जबतक उनके अर्थ व उनकी सीमाओं का अध्ययन न कर लिया जाय, और यह तो अत्यन्त ही आवश्यक है कि उन तर्कों की हमेशा आलोचना की जाय जो उन पर आधारित किये जा सकते हैं।†

---

* Statistics, especially other people's statistics, are full of pitfalls for the user—**Connor.**

† It is never safe to take published statistics at their face value without knowing their meaning and limitations, and it is always necessary to criticise arguments that can be based on them—**Dr. Bowley.**

ENUMERATION SLIP, 1951

जनगणना की सूची, १९५१

Location code to be recorded here

(यहाँ स्थानीय संकेत देना है)

1. Name and relationship to Head of Household (नाम तथा गृहपति से सम्बन्ध)..........
2. (a) Nationality (राष्ट्रीयता)..........(b) Religion (धर्म)..........(c) Special Groups (विशेष वर्ग)..........
3. Civil condition (विवाहित या अविवाहित)..........
4. Age (उम्र)..........
5. Birth Place (जन्मस्थान)..........
6. Date of arrival of Displaced Person (शरणार्थी के आने का दिनांक)..........District of origin in Pakistan (पाकिस्तान का मूल जिला)..........
7. Mother Tongue (मातृभाषा)..........
8. Bilingualism (दूसरी भाषायें)..........
9. Dependency (निर्भरता)..........
   Employment (नौकरी)..........
10. Principal Means of Livelihood (जीवनयापन का मुख्य साधन)..........
11. Secondary Means of Livelihood (जीवनयापन के द्वितीयक साधन)..........
12. Literacy and Education (साक्षरता व शिक्षा)..........
13. Unemployment (बेकारी)..........
14. Sex (स्त्री या पुरुष)..........

द्वितीयक समंकों के स्रोत
(Sources of Secondary Data)

द्वितीयक समंकों के मुख्य स्रोत ये हैं :—

(१) सरकारी विभागों द्वारा प्राप्त समंक—ये सूचनायें सरकारी पत्रिकाओं में प्रकाशित की जाती हैं;

(२) सरकारी आयोग व कमेटियों द्वारा प्रकाशित रिपोर्टें;

(३) म्युनिसिपैलिटी एवं जिला बोर्ड द्वारा प्रकाशित समंक;

(४) बैंकों, व्यापारिक संघों, चैम्बर ऑफ कामर्स, आदि द्वारा प्रकाशित समंक;

(५) श्रमिक-संघ, मालिक-संघ, आदि द्वारा प्रकाशित समंक;

(६) अनुसन्धानशालाओं, विश्वविद्यालयों या अन्य सार्वजनिक संस्थाओं द्वारा किए गये अनुसन्धान कार्यों की रिपोर्टें;

(७) व्यक्तिगत अनुसन्धान द्वारा ज्ञात किये गये समंक;

(८) सामयिक पत्रिकायें, समाचार पत्र, आदि में प्रकाशित समंक;

(९) उपज तथा विनिमय विपणियों द्वारा प्रकाशित बाजार भाव; तथा

(१०) योग्य एवं अनुभवी व्यक्तियों के अप्रकाशित प्रलेख, आदि।

द्वितीयक समंकों की जाँच (Checking of the Secondary Data)

द्वितीयक समंकों का प्रयोग करने के पूर्व उनकी यथाविधि जाँच करके उनकी त्रुटियों को दूर करने के लिए आवश्यक संशोधन करना चाहिए। इस सम्बन्ध में निम्नलिखित बातों का ध्यान रखना आवश्यक है :—

(१) द्वितीयक समंकों का प्रयोग करने के पूर्व उन अनुसन्धानकर्ताओं की योग्यता और कार्यक्षमता पर ध्यान देना चाहिए जिन्होंने उनका संकलन किया है। यदि उनका संकलन किसी योग्य तथा पक्षपातरहित अधिकारी अथवा किसी सरकारी संस्था ने किया हो तो उन पर विश्वास किया जा सकता है। किसी अनुभवहीन व्यक्ति द्वारा एकत्रित समंकों का कम विश्वास करना चाहिए।

(२) जिन द्वितीयक समंकों का प्रयोग करना है उनके अनुसन्धान करने का प्रयोजन व उद्देश्य भी ज्ञात करना चाहिए। यदि उनको एकत्रित करने के उद्देश्य दूसरे रहे हों तो ऐसे समंकों का प्रयोग हानिप्रद हो सकता है।

(३) इसी प्रकार समंकों को एकत्रित करने के लिये जो रीति काम में लाई गई है उसकी भी जानकारी प्राप्त करना चाहिए, और यह देखना चाहिए कि वह रीति कहाँ तक विश्वसनीय व उपयुक्त है।

(४) उन समंकों की इकाई क्या है और उसमें सांख्यिकी इकाई के सब गुण हैं या नहीं, यह भी देखना चाहिए। इस बात की जाँच करने का भी प्रयत्न करना चाहिये कि इकाई के निर्वचन किस प्रकार हुये हैं।

(५) उन समंकों में परिशुद्धता का परिमाण किस सीमा तक रखा गया है इसका भी विचार करना आवश्यक है, क्योंकि परिशुद्धता परिमाण जितना ही अधिक होगा समंक उतने ही विश्वसनीय होंगे।

(६) वे समंक संगणना रीति (Census Method) से एकत्रित हुए हैं या निदर्शन रीति (Sample Method) से इसका विचार कर लेना भी श्रेयस्कर होगा। यदि उन्हें निदर्शन रीति से एकत्रित किया गया है तो इस बात की जाँच करना आवश्यक होगा कि निदर्शन का आकार (Size of the sample) न्यायसंगत व उपयुक्त था या नहीं।

(७) अनुसन्धानकर्ता को यदि कुछ समय-सम्बन्धी समंकों का प्रयोग करना है तो उसे यह देख लेना चाहिए कि वे समंक पर्याप्त समय के हैं या नहीं, क्योंकि यदि वे समंक केवल थोड़े समय के ही हैं तो उन पर अल्पकालीन उच्चावचनों (Short-time fluctuations) का प्रभाव हो सकता है।

(८) अनुसंधानकर्ता को द्वितीयक समंकों का प्रयोग करने के पूर्व उनमें होने वाले परिवर्तनों पर भी ध्यान देना आवश्यक है। लोगों के रहन-सहन, आदत, फैशन, आदि में हमेशा परिवर्तन होता रहता है। नये नये आविष्कारों के कारण कृषि व उद्योग की प्रणालियाँ नित्य बदलती रहती हैं। इसी प्रकार राजनैतिक परिवर्तनों के कारण भौगोलिक विभागों में भी परिवर्तन होते रहते हैं। अतः समंकों का प्रयोग करने के पूर्व इन परिवर्तनों का ध्यान रखना चाहिए।

(९) अन्त में अनुसन्धान करने वालों को चाहिए कि वे प्रयोग में लाये जाने वाले समंकों की तुलना अन्य स्रोतों से प्राप्त समंकों से कर लें। इस तुलनात्मक अध्ययन से उनके अनेक दोष दूर हो सकते हैं।

प्रश्न

1. What is a 'Statistical Investigation'? Describe the preliminary steps you would take in planning a statistical investigation.

'सांख्यिकीय अनुसंधान' से आप का क्या अभिप्राय है ? सांख्यिकीय अनुसंधान का आयोजन करते समय आप जिन प्रारम्भिक बातों का ध्यान रखते हैं उनका वर्णन कीजिये।

(बी० कॉम०, बनारस, १९५७)

2. Describe the various stages in conducting a primary economic investigation. What precautions will you take at each stage?

किसी प्राथमिक आर्थिक अनुसंधान के संचालन में जो विभिन्न अवस्थायें होती हैं उनका वर्णन कीजिये। प्रत्येक अवस्था में आप किन सावधानियों का ध्यान रखेंगे ?

(एम० ए०, पंजाब, १९५०)

3. Suppose you want to study the changes in the extent of indebtedness of middle-class people of Banaras City for the next five years. How would you proceed to do it? Explain all the processes.

कल्पना कीजिये कि आप इस बात का अध्ययन करना चाहते हैं कि बनारस शहर में रहने वाले मध्यम-वर्ग के लोगों की ऋणग्रस्तता में अगले पाँच वर्ष तक किस सीमा तक परिवर्तन होने की आशा है। यह कार्य करने के लिये आप किस प्रकार अग्रसर होंगे ? सब उपक्रियाओं का वर्णन कीजिये।

(बी० कॉम०, बनारस, १९५५)

4. Describe the procedure you would adopt in order to obtain the necessary information for introducing compulsory primary education in a big city.

किसी बड़े नगर में आप अनिवार्य प्राथमिक शिक्षा प्रचलित करने के विचार से आवश्यक सूचनायें प्राप्त करने के लिये जिस प्रक्रिया का प्रयोग करेंगे उसका वर्णन कीजिये।

(बी० कॉम०, बनारस, १९५२)

5. Discuss the main steps necessary to conduct a family budget enquiry in an industrial town.

किसी औद्योगिक नगर में पारिवारिक आय-व्यय सम्बन्धी जाँच का संचालन करते समय जिन मुख्य बातों को ध्यान में रखने की आवश्यकता है उनकी व्याख्या कीजिये।

(एम० ए०, आगरा, १९५७)

6. How would you conduct an enquiry about 'Payment of Wages in an Industry'? On what points would it be necessary for you to be clear before actually beginning investigation work?

किसी उद्योग में मज़दूरी की भुगतान सम्बन्धी जाँच आप कैसे संचालित करेंगे? वास्तविक अनुसंधान कार्य प्रारम्भ करने के पूर्व आपको किन बातों का स्पष्टीकरण कर लेना आवश्यक होगा?

(एम० कॉम०, आगरा, १९५७)

7. How would you organise a marketing survey of the fruit trade in a particular region with a view to making suggestions for its development? Explain the procedure you would follow step by step.

किसी विशेष क्षेत्र में आप फल-व्यापार की उन्नति के लिये सुझाव देने के विचार से एक बाजार अनुसंधान का प्रबन्ध किस प्रकार करेंगे? जिस प्रक्रिया का आप अवलम्बन करेंगे उसकी क्रमानुसार व्याख्या कीजिये।

(एम० कॉम०, आगरा, १९५६)

8. How would you organize an investigation into the handloom weaving industry of the U.P.? Prepare questionnaire suitable for the purpose.

यू० पी० के हाथ-कर्घा बुनाई उद्योग का कोई अनुसंधान आप किस प्रकार संगठित करेंगे? इस कार्य के लिये उपयुक्त प्रश्नावली तैयार कीजिये।

(बी० कॉम०, इलाहाबाद, १९४२)

9. How would you organise an enquiry into the cost of living of the student community in Amritsar? Draw up a blank form or forms to obtain the required information.

अमृतसर के विद्यार्थी समुदाय के जीवन-निर्वाह सम्बन्धी व्यय की जांच आप किस प्रकार संगठित करेंगे ? आवश्यक सूचनायें प्राप्त करने के लिये रिक्त प्रारूप अथवा प्रारूपों का निर्माण कीजिये ।

(एम० ए०, पंजाब, १९५१)

10. Draw up a suitable questionnaire for surveying the economic aspects of any cottage industry in which you may be interested. Briefly indicate how you would proceed to collect the relevant materials.

जिस कुटीर उद्योग में आप रुचि रखते हैं उसके आर्थिक पक्षों का अनुसंधान करने के लिये एक उपयुक्त प्रश्नावली बनाइये । संक्षेप में प्रदर्शित कीजिये कि उचित सामग्रियों का संकलन करने के लिये आप किस प्रकार अग्रसर होंगे ।

(बी० कॉम०, लखनऊ, १९४३)

11. What is a Questionnaire ? How does it differ from a Blank Form ? What precautions should be taken in drafting questionnaire ?

प्रश्नावली किसे कहते हैं ? इसमें व रिक्त प्रारूप में क्या अन्तर है ? प्रश्नावली बनाते समय किन सावधानियों का ध्यान रखना चाहिये ?

12. What is a Statistical Unit ? Is it necessary that the data be homogeneous ?

सांख्यिकीय इकाई क्या है ? क्या समंकों का सहजातीय होना आवश्यक है ?

(बी० कॉम०, आगरा, १९३९)

13. Examine critically the important methods of collection of statistical data.

सांख्यिकीय समंकों के संकलन की जो मुख्य रीतियाँ हैं उनकी आलोचनात्मक व्याख्या कीजिये ।

(बी० कॉम०, बनारस, १९५३)

14. Discuss in brief the methods generally used in the collection of primary data.

प्राथमिक समंकों का संकलन करने के लिये साधारणत: जिन रीतियों का प्रयोग किया जाता है उनका वर्णन कीजिये।

(बी० कॉम०, आगरा, १९५७)

15. Classify the methods generally employed in the collection of statistical data and state briefly their respective merits and demerits.

सांख्यिकीय समंकों का संकलन करने के लिए साधारणत: जिन रीतियों का प्रयोग किया जाता है उनका वर्गीकरण कीजिये तथा संक्षेप में उनके गुण व दोष बतलाइये।

(बी० कॉम०, आगरा, १९५६)

16. What precautions should be taken in making use of published statistics for further investigation ?

प्रकाशित समंकों की सहायता से पुन: अनुसंधान करते समय किन सावधानियों का ध्यान रखना चाहिये ?

(बी० कॉम०, आगरा, १९३९)

17. 'In collection of statistical data, commonsense is the chief requisite and experience the chief teacher'. Discuss this statement with comments.

'समंक-संकलन में सामान्यबुद्धि मुख्य आवश्यकता तथा अनुभव मुख्य शिक्षक है।' इस कथन की आलोचनात्मक व्याख्या कीजिये।

(एम० ए०, पटना, १९४१)

अध्याय ४

निदर्शन अनुसंधान

(Sample Investigation)

(समग्र तथा न्यादर्श—सम्भावना सिद्धान्त व निदर्शन अनुसंधान—सांख्यिकीय नियमिता नियम—महांक जड़ता नियम—निदर्शन की रीतियाँ—विस्तृत निदर्शन—सविचार निदर्शन—दैव निदर्शन—दैव निदर्शन की रीतियाँ—दैव निदर्शन के गुण—दैव निदर्शन के दोष—मिश्रित या स्तरित निदर्शन—प्रश्न)

समग्र तथा न्यादर्श (Population and Sample)

पिछले अध्याय में यह बतलाया जा चुका है कि सांख्यिकीय अनुसंधान करने की अनेक रीतियाँ हैं। इस अध्याय में हम संगणना व निदर्शन से सम्बन्धित रीतियों का अध्ययन करेंगे। संगणना अनुसंधान (Census-Investigation) में किसी समस्या से सम्बन्धित समग्र (Universe or Population) की सभी इकाइयों का विस्तारपूर्वक अध्ययन किया जाता है। इसके विपरीत निदर्शन अनुसंधान (Sample Investigation) में केवल कथित समग्र के कुछ अंगों को ही प्रतिनिधि मानकर उनका विधिवत अनुसन्धान किया जाता है। सांख्यिकों का अनुमान है कि इस प्रकार के अनुसंधान द्वारा प्राप्त निष्कर्षों को सम्पूर्ण समग्र का अनुसंधान करने के उपरान्त प्राप्त होने वाले निष्कर्षों के समान माना जा सकता है।* निदर्शन अनुसंधान की यह रीति अत्यन्त ही महत्वपूर्ण मानी जाती है क्योंकि इससे केवल धन, समय व श्रम की ही बचत नहीं होती, बल्कि जो परिणाम निकलते हैं वे विश्वसनीय भी होते हैं। इसके अतिरिक्त अनुसन्धान का क्षेत्र छोटा होने के कारण कुशल व शिक्षित प्रगणक सरलता से मिल जाते हैं जो स्वेच्छापूर्वक ईमानदारी के साथ कार्य करते हैं। यों तो संगणना अनुसंधान के आधार पर प्राप्त होने

*In order to examine a large population with respect to a specified characteristic, the statistician chooses a sample of individuals from that population and, from the properties of the sample relating to the given characteristic, he endeavours to estimate those of the population......The theory of sampling is concerned, first, with estimating the properties of the population from those of the sample, and secondly, with gauging the precision of the estimates—**Weatherburn.**

वाले परिणाम अधिक शुद्ध होने चाहिएँ क्योंकि इसमें समग्र की प्रत्येक इकाई का अध्ययन किया जाता है, किन्तु सच तो यह है कि बड़े पैमाने पर कुशल व शिक्षित प्रगणकों के न मिलने के कारण उनका विधिवत अध्ययन नहीं हो पाता। साथ ही साथ पर्याप्त प्रबन्ध तथा निरीक्षण के अभाव में प्रगणकों की मनमानी एकत्रित समंकों को दूषित बना देती है।

निदर्शन अनुसन्धान के अन्य लाभ भी हैं। यह रीति अधिक वैज्ञानिक मानी जाती है क्योंकि उपलब्ध समंकों की दूसरे न्यादर्शों द्वारा जाँच की जा सकती है। संगणना अनुसंधान में इस प्रकार की जाँच असम्भव है। कभी कभी तो इस रीति द्वारा समस्त समंकों का संकलन अत्यन्त ही कठिन हो सकता है। उदाहरण के लिए यदि इस बात की जाँच करनी हो कि विश्व की लोहे की खानों में कितना और किन किन श्रेणियों का लोहा है तो संगणना रीति से यह तभी ज्ञात हो सकता है जब सब खानों को पूर्णतया खोद डाला जाय, जो अत्यन्त ही कठिन कार्य है। निदर्शन अनुसंधान की रीति अनुभव के आधार पर निकाली गई है इसलिए अधिक तर्कयुक्त तथा प्रभावोत्पादक है। उदाहरण के लिए कोई व्यापारी किसी वस्तु का क्रय करते समय सब वस्तुओं की परख नहीं करता बल्कि वह केवल उन वस्तुओं के न्यादर्श मात्र का ही निरीक्षण करता है। वह जानता है कि साधारणत: न्यादर्श के सभी गुण उन वस्तुओं में विद्यमान होंगे। इस सम्बन्ध में प्रसिद्ध सांख्यिक स्नेडेकॉर (Snedecor) ने बड़ा ही सुन्दर वर्णन किया है।* अत: जिस प्रकार प्रत्येक वस्तु का निरीक्षण करके अपना समय व श्रम नष्ट करना अनावश्यक समझा जाता है, उसी प्रकार सम्पूर्ण समग्र का अनुसंधान करना भी कोई विशेष महत्व नहीं रखता।

सम्भावना सिद्धान्त व निदर्शन अनुसंधान
(Theory of Probability and Sample Investigation)

निदर्शन अनुसंधान वास्तव में सम्भावना सिद्धान्त पर आधारित है। सम्भावना सिद्धान्त एक वैज्ञानिक सिद्धान्त है जो किसी घटना के होने या न

---

*A carload of coal is accepted or rejected on the evidence gained from testing only a few pounds. The physician makes inferences about a patient's blood through examination of a single drop. Samples are devices for learning about large masses by observing a few individuals—Snedecor.

होने पर प्रकाश डालता है। उदाहरण के लिये यदि किसी सिक्के को हवा में उछाला जाय तो यह संभावना है कि या तो वह 'चित्त' गिरेगा या 'पट्ट', किन्तु यह निश्चितरूप से नहीं कहा जा सकता कि दोनों घटनाओं में से कौन सी घटना होगी। इस सिद्धान्त के अनुसार इनकी संभावनाएँ बराबर, अर्थात् ½ : ½ हैं। इसी प्रकार ताश की एक गड्डी में से एक पत्ता खींचने पर 'पान का एक्का' निकलने की संभावना १/५२ है, जबकि 'कोई एक्का' निकलने की सम्भावना ४/५२ या १/१३ है। यह सिद्धान्त हमारे जीवन की सभी घटनाओं का अध्ययन करता है और उन पर पर्याप्त प्रकाश डालता है। इसी सिद्धान्त के आधार पर उपज तथा विनिमय विपणि के सदस्य सौदा करते हैं और बीमा कम्पनियाँ जीवन, अग्नि व सामुद्रिक बीमे के प्रसंविदे करती हैं। सांख्यिकीय अनुसंधानों में, मुख्यतः जब अनुसंधान निदर्शन द्वारा किया जाता है, इस सिद्धान्त का बड़ा ही महत्व है।

सांख्यिकीय नियमिता नियम (Law of Statistical Regularity)

'सांख्यिकीय नियमिता नियम' सम्भावना सिद्धान्त का उपप्रमेय है। यह नियम बतलाता है कि यदि किसी समग्र में से दैव निदर्शन रीति द्वारा पर्याप्त संख्या में न्यादर्श निकाले जायँ तो उनमें वे सभी गुण पाये जायेंगे जो उस समग्र में हैं, अर्थात् वे न्यादर्श सभी दृष्टियों से उस समग्र का प्रतिनिधित्व करेंगे।* उदाहरण के लिए यदि किसी विश्वविद्यालय के प्रत्येक छात्रालय से थोड़े थोड़े विद्यार्थियों को चुन लिया जाय और उनकी ऊँचाई नाप कर 'मध्यक ऊँचाई' निकाली जाय, तो यह 'मध्यक ऊँचाई' साधारणतः सम्पूर्ण विश्वविद्यालय में निवास करने वाले विद्यार्थियों की 'मध्यक ऊँचाई' के बराबर होगी। इसी प्रकार यदि किसी गाँव के दस परिवारों में से एक परिवार के आधार पर कुछ परिवार दैव निदर्शन द्वारा चुने जायँ और उनकी आर्थिक-स्थिति का अध्ययन किया जाय, तो इस प्रकार हमें पूरे गाँव की आर्थिक स्थिति का ज्ञान बड़ी सुगमता से प्राप्त हो सकता है। इन उदाहरणों से यह स्पष्ट हो जाता है कि यदि सम्पूर्ण समग्र का अनुसंधान न करके केवल न्यादर्शों का ही विधिवत

---

*The Law of Statistical Regularity formulated in the mathematical Theory of Probability lays down that a moderately large number of items chosen at random from a very large group are almost sure, on the average, to have the characteristics of the large group—**King.**

अध्ययन कर लिया जाय तो सामान्यतः उस समग्र की सभी विशेषताएँ ज्ञात की जा सकती हैं। सम्भावना सिद्धान्त किसी घटना के होने या न होने पर प्रकाश डालता है जब कि यह नियम उसकी यथार्थता व नियमिता की जाँच करता है। सिक्के को जितनी ही अधिक बार उछाला जायगा, चित्त' और 'पट्ट' के अनुपात में उतनी ही अधिक स्थिरता दृष्टिगोचर होगी। यही नियम इस बात की ओर संकेत करता है कि समंकों की व्यक्तिगत विशेषताएँ भिन्न भिन्न हो सकती हैं किन्तु सम्पूर्ण समग्र की विशेषताएँ स्थायी होती हैं। इस नियम की सफलता के लिए आवश्यक है कि समंक पर्याप्त मात्रा में चुने गए हों तथा उनके चुनाव में दैव निदर्शन का समुचित प्रयोग किया गया हो।

महांक जड़ता नियम (Law of Inertia of Large Numbers)

सांख्यिकी की सीमाओं का वर्णन करते समय यह बतलाया गया था कि यह विज्ञान किसी समस्या के आंकिक स्वरूप का ही अध्ययन करता है तथा समंकों की व्यक्तिगत विशेषताओं पर कोई ध्यान नहीं देता। महांक जड़ता नियम इन सीमाओं को और भी स्पष्ट करता है। यह नियम बतलाता है कि यदि बड़ी मात्रा में समंक लिये जायँ तो उनकी विभिन्न विशेषतायें आपस में ही एक दूसरे के प्रभावों को नष्ट कर देती हैं, जिसके फलस्वरूप समग्र की वास्तविक विशेषताएँ ही प्रतिलक्षित होती हैं। उदाहरण के लिए यदि गेहूँ की उपज से सम्बन्धित समंक एकत्र किए जायँ तो अनेक देशों की उपज अनावृष्टि, अतिवृष्टि, बाढ़ अथवा अन्य दैवी करणों से घटी हुई पाई जायगी, किन्तु साथ ही हमें ऐसे देश भी मिलेंगे जहां गत वर्षों की अपेक्षा अधिक गेहूँ पैदा हुआ हो। अतः समस्त समंकों का अध्ययन बतलाएगा कि गेहूँ की उपज में स्थिरता है। यदि कुछ अन्तर पाया भी जाता है तो वह कोई महत्व नहीं रखता। इसी प्रकार प्रत्येक नगर की जनसंख्या में प्रति वर्ष कुछ अन्तर दिखाई पड़ता है किन्तु सारे देश की जनसंख्या में स्थिरता पाई जाती है। संक्षेप में यह कहा जा सकता है कि बड़े समंकों में छोटे समंकों की अपेक्षा बहुत ही अधिक जड़ता, स्थिरता या अपरिवर्तनशीलता होती है। अतः बड़े समंकों के आधार पर यदि कोई परिणाम ज्ञात किया जाता है तो वह अधिक विश्वसनीय व निश्चयात्मक होता है। किन्तु यह याद रखना चाहिए कि समंकों की यह जड़ता दीर्घकालीन नहीं होती। समय के साथ ही साथ उसमें कुछ परिवर्तन भी होता रहता है, जैसे भारत की जनसंख्या में अल्पकालीन स्थिरता तो दिखाई पड़ेगी किन्तु यदि

पिछले चालीस या पचास वर्षों की जनसंख्या को लेकर तुलनात्मक अध्ययन किया जाय तो उसमें स्थिरता के स्थान पर क्रमिक वृद्धि दृष्टिगोचर होगी। फिर भी महांक जड़ता नियम निदर्शन अनुसंधान में अत्यन्त महत्वपूर्ण योग देता है। न्यादर्श का आकार जितना ही बड़ा होता है उतना ही वह समग्र की विशेषताएँ सूचित करने में समर्थ होता है।

निदर्शन की रीतियाँ (Methods of Sampling)

समग्र में से न्यादर्श चुनने की मुख्य चार रीतियाँ हैं :—

(१) विस्तृत निदर्शन (Extensive Sampling)

(२) सविचार निदर्शन (Deliberate, Purposive, Conscious or Representative Sampling)

(३) दैव निदर्शन (Random Sampling or Chance Selection)

(४) मिश्रित या स्तरित निदर्शन (Mixed or Stratified Sampling)

विस्तृत निदर्शन (Extensive Sampling)

निदर्शन की यह रीति संगणना अनुसंधान की रीति के ही समान है क्योंकि इसमें भी अधिकाधिक समंकों का अध्ययन किया जाता है। केवल अन्तर यह है कि संगणना पद्धति में समग्र की प्रत्येक इकाई का अध्ययन किया जाता है, जबकि विस्तृत निदर्शन केवल उन्हीं समंकों का अध्ययन करता है जो सुविधा-पूर्वक प्राप्त हो सकते हैं। जो समंक प्राप्त नहीं होते या जिन्हें प्राप्त करना कठिन होता है उन्हें पूर्णतया छोड़ दिया जाता है। इस प्रकार इस रीति द्वारा समग्र के सभी समंकों का तो अध्ययन नहीं हो पाता, किन्तु उसके एक बहुत बड़े भाग का अध्ययन हो जाता है। फिर भी इस रीति के अनेक दोष हैं। सबसे बड़ा दोष तो यह है कि जो तथ्य एकत्र किए जाते हैं वे अनुसंधानकर्ता के पक्षपात से प्रभावित हो सकते हैं। इसके अतिरिक्त अनेक स्थितियों में ये समंक दोषपूर्ण व भ्रामक सूचनाएँ प्रदान कर सकते हैं, क्योंकि ऐसा हो सकता है कि अधिक महत्वपूर्ण समंकों का संकलन ही न हो पाया हो।

सविचार निदर्शन (Deliberate or Purposive Sampling)

इस रीति के अनुसार किसी समग्र को विभिन्न क्षेत्रों में बाँट दिया जाता है और फिर प्रत्येक क्षेत्र से कुछ प्रतिनिधि न्यादर्श चुन लिये जाते हैं। किन न्यादर्शों को लेना है व किन्हें छोड़ना है यह अनुसंधानकर्ता की इच्छा पर निर्भर

रहता है। साधारणतः वह इसके लिए कोई प्रमाप निश्चित कर लेता है। तदुपरान्त वह इन्हीं न्यादर्शों का विस्तारपूर्वक अध्ययन करके प्राप्त परिणामों के आधार पर समग्र की विशेषताओं का विवेचन करता है।

यद्यपि निदर्शन की यह पद्धति बड़ी सरल है किन्तु इसमें भी पक्षपात हो जाने की बहुत सम्भावना रहती है। ऐसा हो सकता है कि अनुसंधानकर्ता अपने पूर्वनिश्चित परिणाम को सिद्ध करने के लिये केवल उन्हीं समंकों को चुने जिनमें उसे इच्छित विशेषता दिखलाई पड़ती हो। अतएव इस रीति द्वारा भ्रामक समंकों के चुने जाने का डर रहता है, जिनकी वजह से अनुसंधान पक्षपातपूर्ण हो सकता है। अतः यह रीति तभी उपयोगी हो सकती है जब अनुसंधानकर्ता व्यक्तिगत पक्षपात से समंकों को दूर रक्खे। फिर ऐसे अनुसंधान द्वारा प्राप्त परिणामों में विभ्रमों (Errors) की यथाविधि जाँच करना कठिन होता है।

दैव निदर्शन (Random Sampling or Chance Selection)

सांख्यिकी में दैव निदर्शन सबसे महत्वपूर्ण रीति समझी जाती है क्योंकि इसमें पक्षपात की कोई सम्भावना नहीं रहती। समग्र में से जितने न्यादर्श लिये जाते हैं वे सब सम्भावना के आधार पर ही चुने जाते हैं। इस रीति के अनुसार प्रत्येक समंक की न्यादर्श में चुने जाने की पूरी पूरी सम्भावना रहती है।* उनका चुनाव अनुसंधानकर्ता की इच्छा पर निर्भर नहीं रहता। दैव निदर्शन के कारण सम (Positive) और विषम (Negative) दोनों प्रकार के समंक चुने जा सकते हैं, इसलिये उनकी निजी विशेषतायें एक दूसरे को काट कर समग्र की वास्तविकता का स्पष्ट दिग्दर्शन करने में सफल होती हैं।

दैव निदर्शन की रीतियाँ (Methods of Random Sampling)

दैव निदर्शन के आधार पर न्यादर्शों को चुनने की निम्नलिखित रीतियाँ हैं :—

(क) गोली (Lottery) डाल कर, अर्थात् आँखें वन्द करके न्यादर्शों को चुनना। उदाहरण के लिये यदि सौ गाँवों में से दस गाँव चुनने हैं तो उनके नाम की सौ गोलियां डालकर उनमें से किन्हीं दस गोलियों को उठा लेना।

---

*A sample is considered a simple *random one* if its members are drawn in such a way that each observation of the universe has an equal chance of being included in the sample, and every possible combination of observations in the universe has the same chance of being included—**Lillian Cohen.**

(ख) संख्यात्मक (Numerical), वर्णात्मक (Alphabetical) या भौगोलिक (Geographical) आधार पर न्यादर्शों को चुनना। इस ढंग से न्यादर्शों को चुनने के लिये पहले समग्र की विभिन्न इकाइयों को संख्यात्मक, वर्णात्मक अथवा भौगोलिक आधार पर क्रम से विन्यासित कर लिया जाता है। फिर सुविधानुसार उनमें से पर्याप्त संख्या में न्यादर्श चुन लिये जाते हैं। उदाहरण के लिये यदि सौ गाँवों में से केवल दस गाँव चुनने हैं, जबकि उन्हें संख्यात्मक ढंग से विन्यासित किया गया है, तो प्रत्येक दसवें गाँव को न्यादर्श के रूप में लिया जा सकता है।

(ग) न्यादर्शों का चुनाव किसी संख्यात्मक तालिका द्वारा करना, जैसे **टिपेट की तालिका** (Tippet's Table of Numbers)। इसमें चार अंकों वाली कुल 10,400 संख्यायें दी हुई हैं जिनका संकलन जनसंख्या की रिपोर्टों में दिए हुए अंकों के आधार पर किया गया है। इस तालिका के प्रथम पृष्ठ पर दी हुई कुछ संख्यायें ये हैं :—

2952	6641	3992	9792	7979	5911	3170	5624
4167	9524	1545	1396	7023	5356	1300	2693
2370	7483	3048	2762	3563	1089	6913	7691
0560	5246	1112	6107	6008	8126	4433	8776

इस तालिका की सहायता से न्यादर्शों का चुनाव बड़ा सरल है। जैसे यदि सौ गाँवों में से दस गाँव लेने हैं तो सभी गाँवों को क्रम संख्या देकर टिपेट तालिका के किसी पृष्ठ पर से क्रमानुसार ऐसी दस संख्यायें चुन लेनी चाहिये जो 100 से कम हों। यद्यपि इस तालिका में चार अंकों वाली संख्यायें दी हैं किन्तु बहुत सी संख्यायें 10, 100 तथा 1000 से कम हैं, जैसे ऊपर दी हुई संख्याओं में एक संख्या 0560 है जिसमें हजार के स्थान पर शून्य है। तत्पश्चात जिन गाँवों पर ये क्रम संख्यायें पड़ी हैं उन्हें छाँट लेना चाहिये। इन्हीं गाँवों को न्यादर्श के रूप में लिया जा सकता है। अब प्रश्न यह उठता है कि क्या इन संख्याओं के आधार पर चुने गए न्यादर्श वास्तव में विश्वसनीय हैं। यह सिद्ध तो नहीं किया जा सकता, किन्तु इतना अवश्य कहा जा सकता है कि इस तालिका के आधार पर संसार में किए गए अनेक अनुसंधान सफल हुए हैं। प्रसिद्ध सांख्यिक **केंडल और बैबिंग्टन स्मिथ** ने भी 1,00,000 संख्याओं वाली एक ऐसी ही तालिका दी है।

दैव निदर्शन के गुण (Merits of Random Sampling)

(१) दैव निदर्शन का सबसे बड़ा लाभ यह है कि इसके आधार पर अनुसंधान करने में धन, श्रम व समय की बचत होती है।

(२) इसके द्वारा जिन न्यादर्शों का चुनाव किया जाता है वे पक्षपातरहित होते हैं क्योंकि इसमें किसी भी समंक के चुने जाने की पूरी पूरी सम्भावना रहती है। यह विशेषता अन्य निदर्शन प्रणालियों में नहीं पाई जाती क्योंकि उनमें सम्भावना सिद्धान्त का पूर्णतया प्रयोग नहीं हो पाता।

(३) दैव निदर्शन में न्यादर्शों की संख्या जितनी ही अधिक होती है, सम और विषम समंक उतना ही अधिक एक दूसरे की विशेषताएँ नष्ट करते चलते है, क्योंकि यह रीति सांख्यिकीय नियमिता तथा महांक जड़ता नियम पर आधारित है। अतः अंतिम परिणाम यह होता है कि इस प्रणाली से किया गया निदर्शन अनुसंधान समग्र की वास्तविक विशेषताओं पर प्रकाश डालने में भलीभाँति समर्थ होता है।

(४) इस पद्धति से किये गए अनुसंधानों में अनुमान विभ्रम (Error of Estimation) कितना है इसका पता संभावना सिद्धान्त से लगाया जा सकता है।

दैव निदर्शन के दोष (Dangers of Random Sampling)

(१) जब अनुसंधान का क्षेत्र छोटा होता है, दैव न्यादर्शों की संख्या भी कम हो जाती है। ऐसी दशा में अपर्याप्त न्यादर्शों के आधार पर किसी तथ्य का अध्ययन करना उचित नहीं कहा जा सकता।

(२) कभी कभी ऐसा भी हो सकता है कि इस रीति से चुने गये न्यादर्शों में कोई भी न्यादर्श समग्र का प्रतिनिधित्व न करता हो। ऐसी स्थिति में जो निष्कर्ष हमें प्राप्त होंगे वे समग्र के विषय में भ्रामक सूचनायें देंगे। ऐसा तव होता है जब समग्र में वहुत ही अधिक विषमता होती है।

इन दोषों को दूर करने के लिये दैव न्यादर्शों की यथार्थता व विश्वसनीयता की यथोचित जाँच प्रारम्भ में ही कर लेनी चाहिए। इसके लिये दो रीतियाँ अपनाई जाती हैं। पहली रीति के अनुसार उस समग्र में से उसी आकार के व उतनी ही संख्या में दूसरे दैव न्यादर्श ले कर इस बात की जाँच करनी चाहिये कि दोनों की विशेषतायें एक सी हैं या नहीं। यदि दोनों कोटि के न्यादर्शों

में समान विशेषतायें प्रतिलक्षित होती हैं तो जो न्यादर्श लिए गए हैं वे न्याय-संगत हैं। दूसरी रीति यह है कि चुने गए न्यादर्शों को दो बराबर भागों में बाँट कर दोनों की अलग अलग विशेषताओं का अध्ययन करना चाहिये। यदि दोनों न्यादर्शों की विशेषतायें समान हैं तो यह निश्चितरूप से कहा जा सकता है कि चुने गये न्यादर्श समग्र का प्रतिनिधित्व कर रहे हैं।

मिश्रित या स्तरित निदर्शन (Mixed or Stratified Sampling)

निदर्शन की यह आधुनिक रीति सविचार व दैव निदर्शन की रीतियों के मिश्रण पर आधारित है। इसके अनुसार पहले समग्र को सविचार निदर्शन द्वारा कई भागों या स्तरों (Strata) में विभक्त कर लिया जाता है और फिर उनमें से दैव निदर्शन का प्रयोग करते हुए आवश्यक न्यादर्शों को छाँट लिया जाता है, जैसे उदाहरण के लिये किसी जिले के निवासियों के जीवन-स्तर का अनुसंधान करते समय पहले जिले को विभिन्न तहसीलों में बाँट लिया जाय और तब विभिन्न तहसीलों में से जनसंख्या के आधार पर आवश्यक संख्या में दैव न्यादर्श चुन लिये जायँ। इस रीति द्वारा न्यादर्शों का चुनाव अधिक विश्वसनीय समझा जाता है क्योंकि वे समग्र के विभिन्न स्तरों का प्रतिनिधित्व करते हैं व उनकी विशेषताओं पर प्रकाश डालते हैं। इसके विपरीत दैव निदर्शन में कभी ऐसा भी हो सकता है कि समग्र के किसी स्तर का प्रति-निधित्व करने वाला कोई भी न्यादर्श चुनाव में न आ पाये। अतः इन विशेषताओं के कारण स्तरित निदर्शन की यह रीति आजकल बहुत लोकप्रिय होती जा रही है।

प्रश्न

1. **Distinguish between a census and a sample inquiry, and discuss briefly their comparative advantages. Explain the conditions under which each of these methods may be used with advantage.**

संगणना व निदर्शन अनुसंधानों का अन्तर बतलाइये तथा संक्षेप में उनके तुलनात्मक लाभों का वर्णन कीजिये। जिन परिस्थितियों में इनमें से प्रत्येक का प्रयोग लाभदायक हो सकता हो, उनका स्पष्टीकरण कीजिये।

(बी० कॉम०, बनारस, १९५६)

2. Describe in detail how the Census Enquiry and the two kinds of Sample Enquiry are conducted ? What are the prob'ems peculiar to each one of them ? Compare their relative merits.

विस्तारपूर्वक वर्णन कीजिये कि संगणना अनुसंधान व दोनों प्रकार के निदर्शन अनुसंधान किस प्रकार संचालित किये जाते हैं ? उनमें से प्रत्येक की विशेष समस्यायें क्या हैं ? उनके सापेक्ष गुणों की तुलना कीजिये।

(बी० कॉम०, बनारस, १९४६)

3. Discuss the relative advantages and disadvantages of the method of complete enumeration and the method of random sample survey in social and economic enquiries.

सामाजिक तथा आर्थिक जाँचों में सम्पूर्ण आगणन तथा दैव निदर्शन अनुसंधानों के सापेक्ष गुण-दोषों का विवेचन कीजिये।

(एम० ए०, पंजाव, १९५२)

4. Show the necessity of using random sampling methods in any extensive statistical investigation. How far does the reliability of a random sample vary with (a) the size of the sample, and (b) the degree of variation in the Universe ?

किसी विस्तृत सांख्यिकीय अनुसंधान में दैव निदर्शन रीतियों के प्रयोग की आवश्यकता पर प्रकाश डालिये। दैव न्यादर्श की यथार्थता में (अ) न्यादर्श के आकार व (ब) समग्र में विचलन की मात्रा के कारण किस प्रकार भिन्नता होती है ?

(एम० कॉम०, बनारस, १९५४ तथा पी० सी० एस०, १९४८)

5. Distinguish between a random and a purposive sample. Illustrate your answer by reference to an investigation on family budgets, assuming that your main criteria of classification are (a) family income and (b) size of family.

दैव तथा सविचार न्यादर्शों का अन्तर बतलाइये। किसी पारिवारिक आय-व्यय सम्बन्धी अनुसंधान का उदाहरण ले कर तथा यह कल्पना करते हुए

कि आप के वर्गीकरण के मुख्य प्रमाप (अ) पारिवारिक आय व (ब) परिवार के आकार हैं, अपने उत्तर को स्पष्ट कीजिये।

(बी० कॉम०, बनारस, १९५१)

6. Distinguish between a census and a sample enquiry and briefly discuss their comparative advantages. Which of these methods would you prefer for calculating the total wages of workers in a given industry ?

संगणना तथा निदर्शन अनुसंधानों का अन्तर बतलाइये तथा संक्षेप में उनके तुलनात्मक गुणों की व्याख्या कीजिये। किसी उद्योग में काम करने वाले मजदूरों की कुल मजदूरी ज्ञात करने के लिये आप इनमें से किस रीति को पसंद करेंगे ?

(एम० कॉम०, आगरा, १९४६)

7. Write a note on 'Methods of Sampling'. What precautions would you take to avoid errors in sampling ?

'निदर्शन रीतियों' पर एक लेख लिखिये। निदर्शन करते समय आप विभ्रमों को दूर रखने के लिये क्या सावधानियाँ रखेंगे ?

(एम० कॉम०, आगरा, १९५७)

8. State the Law of Statistical Regularity, and explain how it is useful in making investigations.

सांख्यिकीय नियमिता नियम का वर्णन कीजिये और यह समझाइये कि यह नियम अनुसंधान कार्य में किस प्रकार उपयोगी है।

(बी० कॉम०, बनारस, १९५२, आगरा, १९५७)

अध्याय ५

परिशुद्धता, सन्निकटता तथा विभ्रम
(Accuracy, Approximation and Errors)

(समंकों का सम्पादन—परिशुद्धता—सन्निकटता अथवा अनुमान—प्रतिशतों का अनुमान एवं प्रयोग—अनुमानित समंकों के लिखने की रीति—विभ्रम—सांख्यिकीय विभ्रम के कारण—निरपेक्ष व सापेक्ष विभ्रम—प्रतिशत विभ्रम—शक्य विभ्रम—सांख्यिकीय विभ्रम के भेद—अभिनत व अनभिनत विभ्रम—प्रश्न)

समंकों का सम्पादन (Editing the Statistical Data)

समंकों का यथोचित संकलन करने के उपरान्त अनुसंधानकर्ता को यह देखने की आवश्यकता पड़ती है कि वे अनुसंधान की प्रकृति के अनुकूल हैं अथवा नहीं। यद्यपि अनुसंधान कार्य का नियोजन करने के पूर्व ही यह आशा कर ली जाती है कि संग्रहीत समंकों का क्या स्वरूप होगा, फिर भी प्रगणकों की सामान्य बुद्धि व कार्यक्षमता में विभिन्नता के कारण उनमें अनेक दोष आ जाते हैं। कभी कभी तो प्रगणकों की लापरवाही व प्रबन्धकों या निरीक्षकों की असावधानी के कारण समंकों में इतने दोष आ जाते हैं कि उनके आधार पर कोई अनुसंधान करना असम्भव हो जाता है। चाहे जो भी त्रुटियाँ हों, उन्हें दूर करने के उपरान्त ही समंकों का सांख्यिकीय विश्लेषण करना चाहिए अन्यथा उनके द्वारा किसी यथार्थ परिणाम पर पहुँचना कठिन है। अतएव अनुसंधानकर्ता को इन अशुद्धियों का अनुमान लगा के यह विचार करना चाहिये कि उनका निवारण किस प्रकार किया जा सकता है। अधिकतर अशुद्धियाँ ऐसी होती हैं कि उन्हें केवल संशोधन मात्र से ही दूर किया जा सकता है। वस्तुतः संग्रहीत समंकों में यथोचित संशोधन करना ही समंक-सम्पादन (Editing of Statistical Data) कहलाता है। किन्तु समंकों में आवश्यक परिशुद्धता लाने के लिये यथोचित संशोधन करना एक कठिन कार्य है, जिसके लिये अनुसंधानकर्ता में पर्याप्त अनुभव, दूरदर्शिता व विचार-शक्ति अपेक्षित हैं।

समंक-सम्पादन करते समय निम्नलिखित तीन बातों का ध्यान रखा जाता है:—

(१) परिशुद्धता (Accuracy)

(२) सन्निकटता अथवा अनुमान (Approximation)
(३) विभ्रम (Errors)

परिशुद्धता (Accuracy)

यदि किसी वस्तु या घटना को ठीक उसी प्रकार प्रस्तुत किया जाता है जिस प्रकार वह वास्तव में है, तो यह कहा जा सकता है कि उसमें पूर्ण परिशुद्धता है। किन्तु सांख्यिकी में पूर्ण परिशुद्धता की प्राप्ति एक कल्पना मात्र है क्योंकि संग्रहीत समंक साधारणतः दो प्रकार की अशुद्धियों से प्रभावित रहते हैं। कुछ अशुद्धियाँ अनुसंधानकर्ता अथवा प्रगणकों की अनुभवहीनता या लापरवाही के कारण और कुछ उन यंत्रों अथवा साधनों के कारण हो जाती हैं, जिनका समंक-संकलन के लिए प्रयोग किया जाता है। यद्यपि समंकों में परिशुद्धता लाने का पूर्णतया प्रयत्न किया जाता है फिर भी इन कारणों की वजह से उसकी प्राप्ति कठिन है। अनुसंधानकर्ता व प्रगणकों से किसी न किसी प्रकार का पक्षपात हो ही जाता है, चाहे वे कितनी भी सावधानी रखें। समंकों में दोष आने का एक कारण यह भी है कि हमारे पास कोई ऐसा यन्त्र नहीं है जिससे उनकी परिशुद्धता जाँची जा सके।

सांख्यिकी 'अनुमान व संभावनाओं का विज्ञान' है, इसलिए इसमें पूर्ण परिशुद्धता के स्थान पर 'यथोचित परिशुद्धता' (Reasonable Accuracy) को विशेष महत्व दिया जाता है। यदि किसी देश की जनगणना करते समय दस-बीस या सौ-दो सौ व्यक्तियों की भूल हो जाय तो इससे उस देश की सामाजिक अथवा आर्थिक समस्याओं के अध्ययन में कोई अन्तर नहीं पड़ेगा। उसी प्रकार जहाँ खानों से लाखों टन कोयला निकाला जा रहा हो, वहाँ दो चार मन कोयला कोई महत्व नहीं रखता। किन्तु यथोचित परिशुद्धता की कोई सार्वभौम परिभाषा देना सांख्यिक के लिये कठिन है क्योंकि यह समंकों की प्रकृति व अनुसंधान के प्रयोजन पर निर्भर है। प्रत्येक स्थिति में यथोचित परिशुद्धता क्या होनी चाहिए, इसका निर्णय सांख्यिक को करना पड़ता है। इसके लिये वह अपने अनुभव एवं तर्क का प्रयोग तो करता ही है, आवश्यकता पड़ने पर कभी कभी कुछ विशिष्ट प्रमापों का भी सहारा लेता है। उदाहरण के लिये कृषि-कार्य में लगी हुई भूमि से सम्बन्धित समंकों को व्यक्त करते समय 'फीट' या 'इंच' तक की परिशुद्धता अनावश्यक है, किन्तु इस सीमा तक परिशुद्धता रखना तब आवश्यक हो जाता है जब हमें किसी खाद्यान्न के पौधों की ऊँचाई का अध्ययन करना हो। इसी प्रकार लोहे या ताँबे का उत्पादन व्यक्त

करते समय 'टन' तक की परिशुद्धता पर्याप्त हैं, जब कि सोने के उत्पादन में 'औंस' तक की परिशुद्धता होनी चाहिए।

परिशुद्धता के सम्बन्ध में एक बात और ध्यान में रखनी है। वैज्ञानिक उन्नति के कारण माप के यन्त्रों में दिन प्रति दिन उन्नति होती जा रही है। आज जिस वस्तु को हम पूर्णरूप से परिशुद्ध कहते हैं कल उसे और भी परिशुद्ध बनाया जा सकता है। अतः सांख्यिकी में यथोचित परिशुद्धता का ध्यान रखना ही पर्याप्त है। यथोचित परिशुद्धता से हमें सापेक्ष परिशुद्धता (Relative Accuracy) सुगमतापूर्वक प्राप्त हो जाती है जिसे सांख्यिकी में विशेष महत्व दिया जाता है।

सन्निकटता अथवा अनुमान (Approximation)

सांख्यिकीय अनुसंधानों में यथोचित परिशुद्धता के समान ही सन्निकटता अथवा अनुमान का वड़ा महत्व है। इससे समंको को प्रस्तुत करने तथा उनका अध्ययन करने में बड़ी सुविधा होती है। इसके अतिरिक्त अनुमानित समंकों को याद रखना भी सुगम है। अपने देश की जनसंख्या, जो १९५१ की जनगणना के अनुसार 36,/11,/01,/760 थी, इकाई तक याद रखना कठिन है किन्तु इतना तो सभी याद रख सकते हैं कि भारतवर्ष की जनसंख्या 36 करोड़ है। समंकों में सन्निकटता रखने के कारण गणन-क्रिया भी सरल हो जाती है। जैसे, 320·984 को 137·43105 से गुणा करने के लिये थोड़ी कठिनाई उठानी पड़ेगी, परन्तु 321 व 137 का गुणनफल ज्ञात करना सरल है।

सन्निकटता का ध्यान रखते हुये समंको को प्रस्तुत करने की अनेक रीतियाँ हैं जिनमें निम्नलिखित तीन रीतियाँ विशेषरूप से प्रचलित हैं :—

(१) इकाई, दहाई, सैकड़ा, आदि के कुछ अंकों को छोड़कर (Discarding certain Digits) शेष पूर्ण संख्यायें लेना, जैसे :—

14,38,400 के लिये 14,38,000 लेना (निकटतम हजार तक);
33,90,722 के लिये 33,90,700 लेना (निकटतम सैकड़े तक);
42,539 के लिये 42,530 लेना (निकटतम दहाई तक);
56·362 के लिये 56 लेना (निकटतम इकाई तक);
8·624 के लिये 8·6 लेना (निकटतम एक दशमलव अंक तक)।

इस रीति के अनुसार जिस स्थानीयमान तक अंकों को रखना रहता है वहाँ तक तो रख लिया जाता है और शेष अंक छोड़ दिये जाते हैं। समंकों की सन्निकटता किस सीमा तक रखनी है इसका निर्णय उनके महत्व को ध्यान में रखते हुये करना पड़ता है। कभी कभी जिन अंकों को छोड़ दिया गया है उनके स्थानीयमान को ब्रैकेट में रख कर दिखला दिया जाता है, जैसे :—

14,38,400 के लिये 1,438 लेना (000 छोड़ कर);
33,90,722 के लिये 33,907 लेना (00 छोड़ कर);

सन्निकटता की यह रीति सरल तो है किन्तु इसमें सांख्यिकीय विभ्रम अधिक होता है।

(२) जिस अंक तक संख्या रखनी है उसके बाद आने वाली पूर्ण संख्या (Next Higher Whole Number) लेना, जैसे :—

14,38,400 के लिये 14,39,000 लेना (निकटतम हजार तक);
33,90,722 के लिये 33,90,800 लेना (निकटतम सैकड़े तक);
42,539 के लिये 42,540 लेना (निकटतम दहाई तक);
56·362 के लिये 57 लेना (निकटतम इकाई तक);
8·624 के लिये 8·7 लेना (निकटतम एक दशमलव अंक तक)।

पहली रीति के अनुसार आवश्यक अंकों को रख कर शेष अंकों को बिल्कुल छोड़ दिया जाता है, किन्तु इस रीति के अनुसार जिस अंक के बाद के अंकों को हटाना रहता है उसमें एक बढ़ा दिया जाता है। समंकों की सन्निकटता इस प्रकार से व्यक्त करने में भी सांख्यिकीय विभ्रम अधिक होता है।

(३) निकटतम पूर्ण संख्या (Nearest Whole Number) लेना, जैसे :—

14,38,400 के लिये 14,38,000 लेना (निकटतम हजार तक);
33,90,722 के लिये 33,91,000 लेना (निकटतम हजार तक);
42,539 के लिये 42,500 लेना (निकटतम सैकड़े तक);
13·564 के लिये 14 लेना (निकटतम इकाई तक);
8·624 के लिये 9 लेना (निकटतम इकाई तक);
5·783 के लिये 5·8 लेना (निकटतम एक दशमलव अंक तक)।

इस रीति के अनुसार समंकों का अनुमान करते समय निम्न क्रिया करनी पड़ती है :—

(क) प्रथम, यह निश्चित करना पड़ता है कि किस स्थानीयमान तक समंकों का अनुमान करना है;

(ख) पुनः यह देखना पड़ता है कि जो अंक छोड़े जा रहे हैं उनसे बनने वाली संख्या उस स्थानीयमान (जहां तक अनुमान करना है) के आधे से अधिक है या कम;

(ग) यदि छोड़ी जाने वाली संख्या उसके आधे से अधिक है अथवा आधे के बराबर है तो अनुमानित संख्या में एक बढ़ा दिया जाता है;

(घ) यदि वह संख्या आधे से कम है तो उसे पूर्णतया छोड़ दिया जाता है ।

उपर्युक्त उदाहरणों में प्रथम समंक को हजार तक अनुमानित करते समय 400 को पूर्णतया छोड़ दिया गया है क्योंकि वह हजार के आधे से कम है, जब कि दूसरी स्थिति में 722 छोड़ते समय 90 को 91 कर दिया गया है क्योंकि यह हजार के आधे से अधिक है । सन्निकटता की यह रीति सबसे उत्तम समझी जाती है क्योंकि इसमें सांख्यिकीय विभ्रम बहुत कम होने की सम्भावना रहती है ।

प्रतिशतों का अनुमान एवं प्रयोग

(Approximation and Use of Percentages)

जिस प्रकार समंकों का अनुमान किया जाता है उसी प्रकार उनके द्वारा ज्ञात किये गये प्रतिशतों का भी अनुमान किया जा सकता है, जैसे, 15·82% के लिये 15.8% अथवा 14.694% के लिये 14.7% । किन्तु प्रतिशतों का प्रयोग करते समय उनके तत्सम्बंधी आधारों का ध्यान रखना आवश्यक है । उदाहरण के लिये यदि किसी औद्योगिक संस्था के पिछले पाँच वर्षों के लाभ क्रमशः 10%, 10%, 8%, 7% तथा 6% हैं, तो साधारणतः यह जान पड़ता है कि उसकी आर्थिक स्थिति में उत्तरोत्तर ह्रास होता जा रहा है । किन्तु यदि हम उन आंकड़ों को भी लेते हैं जिनके आधार पर ये

प्रतिशत निकाले गये हैं तो हमें उस संस्था की आर्थिक-स्थिति कुछ और ही दृष्टिगोचर होती है :—

Year	Capital Rs.	Profit Rs.	Percentage
1953	2,00,000	20,000	10%
1954	2,00,000	20,000	10%
1955	3,00,000	24,000	8%
1956	4,00,000	28,000	7%
1957	5,00,000	30,000	6%

उपर्युक्त तालिका में दिये गये समंकों से यह स्पष्ट हो जाता है कि यद्यपि लाभ के प्रतिशत घट रहे हैं, किन्तु पूंजी व लाभ की मात्रा में उत्तरोत्तर वृद्धि होती गई है।

अनुमानित समंकों को लिखने की रीति
(Method of writing the Approximated Figures)

अनुमानित समंकों को लिखते समय यथोचित परिशुद्धता का ध्यान रखना चाहिये। उदाहरण के लिये यदि किसी क्षेत्र में गन्ने की उपज 7,240 टन है तो उसके अनुमान इस प्रकार प्रस्तुत किये जा सकते हैं :—

(अ) गन्ने की उपज 7,000 टन है (निकटतम हजार तक); अथवा

(ब) गन्ने की उपज 7,000±250 टन है (अर्थात् 6,750 टन तथा 7,250 टन के अन्तर्गत है); अथवा

(स) गन्ने की उपज 7,000±5% टन है (अर्थात् 6,650 टन तथा 7,350 टन के अन्तर्गत है)।

विभ्रम (Errors)

सांख्यिकी में 'विभ्रम' (Error) शब्द का अर्थ 'अशुद्धि' (Mistake) नहीं है। सांख्यिकीय विभ्रम वस्तुतः समंकों के अनुमान (Estimate) व वास्तविक (Actual) मूल्यों का अन्तर है। अतएव सांख्यिकीय रीतियों

६

का प्रयोग करते समय यदि गणन-क्रिया में कोई भूल हो जाती है तो वह विभ्रम नहीं है। किन्तु यदि किसी गाँव की जनसंख्या का अनुमान 5,800 लगाया गया है जबकि वास्तव में वह 5,885 है, तो दोनों का अन्तर, अर्थात् 85, सांख्यिकीय विभ्रम है।

सांख्यिकीय विभ्रम के कारण (Causes of Statistical Errors)

सांख्यिकीय विभ्रम के मुख्यत: तीन कारण हैं :—

(क) सांख्यिकीय अनुसंधान की योजना बनाते समय इकाई की परिभाषा, परिशुद्धता-परिमाण, समस्या की परिभाषा, आदि की अस्पष्टता के कारण सांख्यिकीय विभ्रम हो जाते हैं। अनुसंधानकर्ता की अनुभवहीनता व प्रगणकों की असावधानी के कारण भी अनेक विभ्रम होते हैं। ऐसे विभ्रमों को उद्गम विभ्रम (Errors of Origin) कहते हैं।

(ख) यदि कोई अनुसंधान कार्य अपर्याप्त समंकों के आधार पर किया जाता है, या जब न्यादर्श छोटे होने के कारण सम्पूर्ण समग्र का प्रतिनिधित्व नहीं करते तो इन स्थितियों में भी सांख्यिकीय विभ्रम हो जाते हैं। इन्हें अपर्याप्तता विभ्रम (Errors of Inadequacy) कहते हैं।

(ग) समंकों का संकलन या विश्लेषण करते समय अनेक अशुद्धियाँ अनुसंधानकर्ताओं की अचेतावस्था के कारण भी हो जाती हैं जिन्हें छलसाधन विभ्रम (Errors of Manipulation) कहते हैं।

निरपेक्ष व सापेक्ष विभ्रम (Absolute and Relative Errors)

किसी समंक के वास्तविक (Actual) एवं अनुमानित (Estimate) मूल्यों के अन्तर को निरपेक्ष विभ्रम कहते हैं। अत: यदि Y किसी समंक का वास्तविक मूल्य तथा Y′ उसका अनुमान है तो निरपेक्ष विभ्रम (Y—Y′) हुआ। उदाहरण के लिए यदि किसी नगर की जनसंख्या 4,20,000 है जिसका अनुसंधानकर्ता ने 4,00,000 अनुमान लगाया है, तो निरपेक्ष विभ्रम निम्नलिखित होगा :—

निरपेक्ष विभ्रम = (Y—Y′)
= (4,20,000 − 4,00,000)
= 20,000 व्यक्ति

सापेक्ष विभ्रम, निरपेक्ष विभ्रम एवं अनुमान का अनुपात है। अतः उपर्युक्त उदाहरण में सापेक्ष विभ्रम निम्नलिखित होगा :—

$$\text{सापेक्ष विभ्रम} = \frac{(Y-Y')}{Y'}$$

$$= \frac{(4{,}20{,}000-4{,}00{,}000)}{4{,}00{,}000}$$

$$= \frac{1}{20} \text{ अथवा } 0{\cdot}05$$

सांख्यिकी में सापेक्ष विभ्रम, निरपेक्ष विभ्रम से अधिक महत्वपूर्ण समझा जाता है। इसका स्पष्टीकरण एक उदाहरण द्वारा किया जा सकता है। कल्पना कीजिये कि दो व्यक्तियों की मासिक आय क्रमशः 39 रुपये तथा 390 रुपये है, जिनका अनुमान क्रमशः 40 रुपये और 400 रुपये लगाया गया है। अतः दोनों स्थितियों में निरपेक्ष व सापेक्ष विभ्रम निम्नलिखित होंगे :—

प्रथम व्यक्ति

निरपेक्ष विभ्रम = (39-40) रु०
= 1 रुपया

$$\text{सापेक्ष विभ्रम} = \frac{(39-40)}{40} = \frac{1}{40} = 0.025$$

द्वितीय व्यक्ति

निरपेक्ष विभ्रम = (390-400) रु०
= 10 रुपये

$$\text{सापेक्ष विभ्रम} = \frac{(390-400)}{400} = \frac{1}{40} = 0.025$$

निरपेक्ष विभ्रमों के आधार पर यह ज्ञात होता है कि दूसरी स्थिति में विभ्रम की मात्रा पहली स्थिति की अपेक्षा दस गुनी है। किन्तु सापेक्ष विभ्रम इस निष्कर्ष का खण्डन करते हैं और यह बतलाते हैं कि दोनों स्थितियों में विभ्रम की मात्रा समान है। यही निष्कर्ष उचित भी है, क्योंकि यदि ध्यान-पूर्वक देखा जाय तो दोनों स्थितियों में अनुमान का आधार समान रहा है। अतः इस उदाहरण से यह स्पष्ट हो जाता है कि सांख्यिकी में निरपेक्ष विभ्रम के बजाय सापेक्ष विभ्रम का महत्व अधिक है क्योंकि इनसे तुलनात्मक अध्ययन सुगम होता है।

इस सम्बन्ध में यह याद रखना चाहिये कि निरपेक्ष विभ्रम उसी इकाई में होते हैं जिसमें समंक के वास्तविक मूल्य व अनुमान हैं, किन्तु सापेक्ष विभ्रम अनुपात अथवा भिन्न होने के कारण उस इकाई में प्रकट नहीं किये जा सकते।

प्रतिशत विभ्रम (Percentage Error)

यदि सापेक्ष विभ्रम को प्रतिशत में परिणित कर दिया जाय तो उसे प्रतिशत विभ्रम कहा जाता है। इसके लिये सापेक्ष विभ्रम को 100 से गुणा करना पड़ता है। अतः प्रतिशत विभ्रम ज्ञात करने के लिये इस सूत्र का प्रयोग करना चाहिये :—

$$\text{प्रतिशत विभ्रम} = \frac{(Y - Y')}{Y'} \times 100$$

उपर्युक्त उदाहरणों में प्रतिशत विभ्रम क्रमशः (0.05×100), अर्थात् 5% तथा (0.025×100), अर्थात् 2·50% हैं। प्रतिशत विभ्रम से तुलनात्मक अध्ययन और भी सुगम हो जाता है।

धनात्मक व ऋणात्मक विभ्रम (Positive and Negative Errors)

जब किसी समंक का वास्तविक मूल्य उसके अनुमान से अधिक होता है तो विभ्रम धनात्मक (Positive), और जब कम होता है तो ऋणात्मक (Negative) कहलाता है। अतः निरपेक्ष व सापेक्ष दोनों प्रकार के विभ्रम धनात्मक तथा ऋणात्मक हो सकते हैं। इन विभ्रमों को लिखते समय क्रमशः धन (+) और ऋण (—) चिन्हों का प्रयोग करना पड़ता है। ऊपर दिये गये जनसंख्या वाले उदाहरण में विभ्रम धनात्मक, तथा मासिक आय वाले उदाहरण में ऋणात्मक हैं। प्रतिशत विभ्रम लिखते समय भी इसी प्रकार धन (+) व ऋण (—) का प्रयोग किया जाता है, जैसे पहले उदाहरण में +5% तथा दूसरे में —2·50%।

शक्य विभ्रम (Possible Error)

शक्य विभ्रम किसी अनुमान की ऊपरी (Upper) और निचली (Lower) सीमायें निर्धारित करता है, जिसके अन्तर्गत उसके वास्तविक मूल्य के होने की सम्भावना रहती है। यदि अनुसंधानकर्ता का विश्वास है कि किसी समंक का अनुमान उसके वास्तविक मूल्य से लगभग 100 अधिक या 100 कम होगा तो ऐसी दशा में शक्य विभ्रम ± 100 कहा जायगा। अतः यदि किसी समंक

का अनुमान 42,822 लगाया गया है, और शक्य विभ्रम ± 100 होने की आशा है, तो वास्तविक समंक (42,822±100), अर्थात 42,722 और 42,922 के अन्तर्गत होगा।

सांख्यिकीय विभ्रम के भेद (Kinds of Statistical Errors)

सांख्यिकीय विभ्रमों को दो वर्गों में बाँटा जा सकता है :—

(१) अभिनत या संचयी विभ्रम (Biassed or Cumulative Errors)

(२) अनभिनत या क्षतिपूरक विभ्रम (Unbiassed or Compensating Errors)

अभिनत या संचयी विभ्रम (Biassed or Cumulative Errors)

अभिनत विभ्रम (Biassed Errors) वे हैं जो अनुसंधानकर्ताओं, प्रगणकों एवं सूचकों के पक्षपात, अथवा नाप व तौल के साधनों की अशुद्धियों के कारण उत्पन्न होते हैं। इन विभ्रमों का प्रभाव एक ही दिशा में रहता है, अतः इन्हें संचयी विभ्रम (Cumulative Errors) भी कहा जाता है। जहाँ तक सम्भव हो सके समंकों को अभिनत अथवा संचयी विभ्रमों के प्रभाव से बचाने का प्रयत्न करना चाहिए, अन्यथा उन्हें जितनी ही अधिक मात्रा में एकत्र किया जायगा, विभ्रम की मात्रा भी उतनी ही अधिक होती जायगी। उदाहरण के लिये अपने देश के ग्रामीण क्षेत्रों में रहने वाले अशिक्षित लोग अपनी उम्र वास्तविक उम्र की अपेक्षा अधिक बतलाते हैं। अतः जितने ही अधिक व्यक्तियों के उम्र सम्बन्धी समंकों का संकलन किया जायगा, विभ्रम की मात्रा उतनी ही अधिक होगी। इसी प्रकार यदि किसी खाद्यान्न के व्यापारी का मन तौल में एक सेर कम है तो वह जितना ही अधिक अन्न तौलेगा अभिनत विभ्रम उतना ही अधिक होगा। इन उदाहरणों से यह स्पष्ट हो जाता है कि जो समंक इस प्रकार के विभ्रमों से प्रभावित रहते हैं उनके संकलन व विश्लेषण में महांक जड़ता नियम व सांख्यिकीय नियमिता नियम लागू नहीं होते।

अनभिनत या क्षतिपूरक विभ्रम (Unbiassed or Compensating Errors)

इसके विपरीत यदि सांख्यिकीय विभ्रम विपरीत दिशाओं में होते रहते हैं तो उन्हें अनभिनत या क्षतिपूरक विभ्रम (Unbiassed or Compensating

Errors) कहते हैं। ये विभ्रम साधारणत: अनुसंधानकर्ताओं, प्रगणकों या सूचकों की असावधानी के कारण दैवयोग से ही हो जाते हैं। विपरीत दिशाओं में होने के कारण धनात्मक व ऋणात्मक विभ्रम एक दूसरे के प्रभावों को नष्ट करते रहते हैं। अत: समंकों की मात्रा जितनी ही अधिक बढ़ाई जाती है, कुल विभ्रम की मात्रा उतनी ही कम होती जाती है। उपर्युक्त उदाहरण में यदि व्यापारी कुछ लापरवाही के कारण कभी एक मन से कम और कभी एक मन से अधिक तौलता है, तो वह जितना ही अधिक खाद्यान्न तौलेगा विभ्रम की मात्रा उतनी ही कम होगी। अत: जो समंक अनभिनत विभ्रमों से प्रभावित रहते हैं उनमें महांक जड़ता नियम व सांख्यिकीय नियमिता नियम का पूर्णरूप से प्रयोग होता रहता है।

सांख्यिकी में अनभिनत विभ्रमों का विशेष महत्व है क्योंकि इनके कारण सांख्यिकीय विश्लेषणों पर न्यूनतम प्रभाव पड़ता है। इसका स्पष्टीकरण एक उदाहरण द्वारा किया जा रहा है। निम्नलिखित तालिका में किसी कक्षा के सात विद्यार्थियों की विभिन्न ढंगों से नापी गई ऊँचाइयाँ दी गई हैं :—

Table showing the Height of Seven Students of a Class

Name of the Students	Actual Height (Inches)	Height taken with a Scale 0·5″ short	Height taken with a Scale 0·5″ long	Height taken arbitrarily
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
A ...	62·5	62·0	63·0	62·5
B ...	63·5	63·0	64·0	63·6
C ...	64·5	64·0	65·0	64·9
D ...	65·5	65·0	66·0	65·2
E ...	66·5	66·0	67·0	66·4
F ...	67·5	67·0	68·0	67·8
G ...	68·5	68·0	69·0	68·7
Total	458·5	455·0	462·0	459·1

उपर्युक्त तालिका में दिये गये अभिनत विभ्रमों का अध्ययन निम्न परिणामों को सूचित करता है :—

(१) जब ऊँचाई की माप करने वाला यंत्र 0·5″ छोटा है—

निरपेक्ष विभ्रम = (458·5″ − 455·0″) = +3·5″

सापेक्ष विभ्रम $= (+3.5'' \div 455.0'') = 0.0077$

प्रतिशत विभ्रम $= (0.0077 \times 100) = 0.77\%$

(२) जब ऊँचाई की माप करने वाला यंत्र $0.5''$ बड़ा है—

निरपेक्ष विभ्रम $= (458.5'' - 462.0'') - 3.5''$

सापेक्ष विभ्रम $= (-3.5'' \div 462.0'') = 0.0076$

प्रतिशत विभ्रम $= (0.0076 \times 100) = 0.76\%$

(३) जब विद्यार्थियों की ऊँचाई मनमाने ढंग से ली गई है :—

निरपेक्ष विभ्रम $= (458.5'' - 459.1'') - 0.6''$

सापेक्ष विभ्रम $= (-0.6'' \div 459.1'') = 0.0013$

प्रतिशत विभ्रम $= (0.0013 \times 100) = 0.13\%$

तीसरी स्थिति में सापेक्ष व प्रतिशत विभ्रमों की मात्रा अन्य स्थितियों से न्यूनतम है। अतः यह स्पष्ट है कि अनभिनत अथवा क्षतिपूरक विभ्रम कुल विभ्रमों की मात्रा को हमेशा कम कर देते हैं।

प्रश्न

1. 'In any sample survey there are many sources of errors. A perfect survey is a myth'. Discus the statement.

'किसी निदर्शन अनुसंधान में विभ्रमों के अनेक स्रोत होते हैं। पूर्ण अनुसंधान तो केवल कल्पना है।' इस कथन की व्याख्या कीजिए।

(एम० ए०, आगरा, १९५७)

2. Discuss the standard of accuracy required in statistical calculation. To what extent should approximation be used ?

सांख्यिकीय गणनाओं में परिशुद्धता का क्या प्रमाप होना चाहिये, इसकी व्याख्या कीजिये। किस सीमा तक सन्निकटता का प्रयोग करना उपयुक्त है ?

(एम० ए०, आगरा, १९४९)

3. In what way does a 'Statistical Error' differ from a 'Mistake' ? What classes of errors are there and how may they be measured ?

'सांख्यिकीय विभ्रम' 'अशुद्धि' से किस प्रकार भिन्न है ? विभ्रम कितने प्रकार के होते हैं और किस प्रकार उनकी माप की जाती है ?

(बी० कॉम०, इलाहाबाद, १९४३)

4. Mention the advantages of approximation in Statistics. What degree of accuracy is generally required in each statistical investigation.

सांख्यिकी में सन्निकटता का महत्व बतलाइये। प्रत्येक सांख्यिकीय अनुसंधान में साधारणतः परिशुद्धता परिणाम कितना होना चाहिए।

(एम० कॉम०, राजपूताना, १९५१)

5. Discuss the various types of errors likely to creep into statistical investigations and suggest how to avoid or correct them,

सांख्यिकीय अनुसंधानों में जितने प्रकार के विभ्रमों के पाये जाने की सम्भावना रहती है उनकी व्याख्या कीजिये और बतलाइये कि उन्हें किस प्रकार दूर अथवा शुद्ध किया जा सकता है।

(बी० कॉम०, आगरा, १९४९)

6. (*a*) Discuss the main sources of error in Statistics and their effects.

(*b*) State the varions methods of approximation and their utility in Statistics.

(अ) सांख्यिकी में विभ्रमों के मुख्य स्रोतों की व्याख्या कीजिये तथा उनके परिणाम बतलाइये।

(ब) सन्निकटता की विभिन्न रीतियों का वर्णन कीजिये तथा सांख्यिकी में उनका महत्व बतलाइये।

(बी० कॉम०, आगरा, १९४०)

7. 'Of the Biassed Errors the statistician should have none; but of the Unbiassed ones the more the merrier, notwithstanding that they are also errors'—Elucidate.

'अभिनत विभ्रमों में सांख्यिक को एक भी विभ्रम नहीं चाहिये किन्तु अनभिनत विभ्रम जितने ही अधिक हों उतनी ही प्रसन्नता की बात है, यद्यपि ये भी विभ्रम ही हैं'—व्याख्या कीजिये।

(बी० कॉम०, इलाहाबाद, १९४७)

अध्याय ६

समंकों का वर्गीकरण तथा सारणीयन
(Classification and Tabulation of Statistics)

(वर्गीकरण—वर्गीकरण के कार्य—वर्गीकरण की रीतियाँ—गुणों के अनुसार वर्गीकरण—वर्गान्तरों के अनुसार वर्गीकरण—वर्गान्तरों के अनुसार वर्गीकरण की कठिनाइयाँ—वर्गान्तरों की संख्या—वर्गान्तरों का विस्तार—वर्ग-सीमायें—वर्गान्तरों में आवृत्तियों का विन्यास—सांख्यिकीय माला—कालान्तर माला—स्थानिक माला—परिस्थिति माला—विछिन्न माला—अविच्छिन्न माला—अनुविन्यास—सारणीयन—सारणीयन से लाभ—प्राथमिक तथा व्युत्पन्न सारणियाँ—सारणीयन की रीतियाँ—साधारण या एक-गुण सारणीयन—द्विगुण सारणीयन—त्रिगुण सारणीयन—बहुगुण सारणीयन—सारणीयन के नियम—यांत्रिक सारणीयन—यांत्रिक सारणीयन की रीति—यांत्रिक सारणीयन के लाभ—प्रश्न)

वर्गीकरण (Classification)

समंकों का पर्याप्त मात्रा में संकलन तथा उनका विधिवत संशोधन या सम्पादन करने के उपरान्त उनका वर्गीकरण किया जाता है। वर्गीकरण वह सांख्यिकीय रीति है जिसके अनुसार एकत्रित समंकों को उनकी समानता एवं असमानता के आधार पर विभिन्न वर्गों में अनुविन्यसित किया जाता है।* सांख्यिकीय अनुसंधान द्वारा उपलब्ध समंकों का सुचारुरूप से अध्ययन तब तक नहीं किया जा सकता जब तक उनके विशाल परिमाण में लघुता लाने का प्रयास न किया जाय। वर्गीकरण वास्तव में एक ऐसी सांख्यिकीय क्रिया है जो समंकों का परिमाण घटाने के साथ ही साथ उनको विभिन्न गुणात्मक अथवा संख्यात्मक वर्गों में विभाजित करती है। जब समंक विभिन्न वर्गों में बँट जाते हैं तो उन्हें समझना, विश्लेषण करना या उनकी विशेषताओं पर प्रकाश डालना सरल हो जाता है। उदाहरण के लिये यदि किसी नगर में रहने वाले एक लाख व्यक्तियों की आर्थिक-स्थिति से सम्बन्धित समंकों का संकलन किया जाय

---

*Classification is the process of arranging things (either actually or notionally) in the groups or classes according to their resemblances and affinities—**Connor.**

तो उनके आधार पर कुछ निश्चित निष्कर्षों की प्राप्ति तब तक कठिन है जब तक उन्हें विभिन्न वर्गों में विभाजित न कर लिया जाय। वर्गीकरण के कारण समंकों में इतनी स्पष्टता आ जाती है कि फिर उनका सारणीयन सरलता से किया जा सकता है।

वर्गीकरण के कार्य (Functions of Classification)

उपर्युक्त वर्णन के आधार पर हमें वर्गीकरण के चार प्रमुख कार्य ज्ञात होते हैं :—

(१) एकत्रित समंकों को विभिन्न गुणात्मक अथवा संख्यात्मक वर्गों में विभाजित करना;

(२) समंकों के विशाल परिमाण को घटाना तथा अनावश्यक समंकों को छाँट कर अलग करना;

(३) उन्हें तुलनात्मक अध्ययन के योग्य बनाना जिससे साधारण व्यक्ति भी उनके महत्व को समझ सकें; तथा

(४) उनके सारणीयन के लिये आवश्यक सामग्री प्रस्तुत करना।

वर्गीकरण की रीतियाँ (Methods of Classification)

समंकों का वर्गीकरण करने की निम्नलिखित प्रमुख रीतियाँ है :—

(क) गुणात्मक समंकों का गुणों के अनुसार वर्गीकरण (Classification of Descriptive or Qualitative Data by Attributes);

(ख) संख्यात्मक समंकों का वर्गान्तरों के अनुसार वर्गीकरण (Classification of Numerical or Quantitative Data by Class-intervals or Groups)

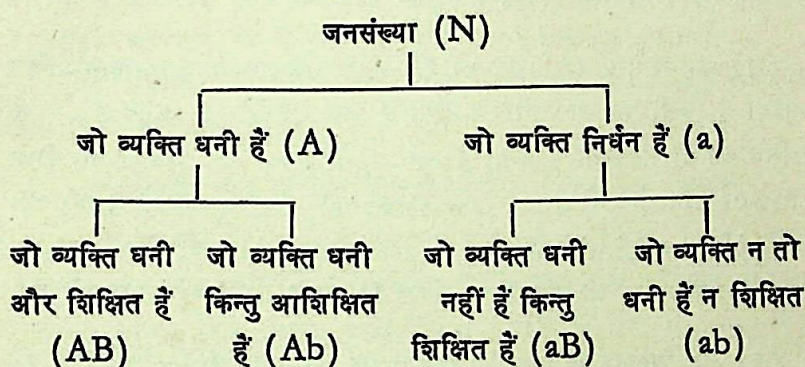
गुणों के अनुसार वर्गीकरण (Classification by Attributes)

गुणात्मक समंकों का वर्गीकरण उनके गुणों के अनुसार किया जाता है। इस रीति से वर्गीकरण करते समय साधारणतः किसी गुण की उपस्थिति (Presence) एक वर्ग में और अनुपस्थिति (Absence) दूसरे में रखी जाती है। गुणों की उपस्थिति वर्णमाला के बड़े अक्षरों (Capital Letters, A, B, etc.,) द्वारा तथा अनुपस्थिति छोटे अक्षरों (Small Letters, a, b, etc.,) द्वारा प्रकट की जाती है।

यदि हम कल्पना करें कि किसी स्थान की जनसंख्या (N) है जिसे दो गुणों के आधार पर विभाजित करना है—

(१) धनी (A) व निर्धन (a), तथा

(२) शिक्षित (B) व अशिक्षित (b),

तो उसका वर्गीकरण इस प्रकार होगा :—

इस प्रकार के वर्गीकरण को सरल वर्गीकरण (Simple Classification) या द्वन्द-भाजन वर्गीकरण (Classification by Dichotomy) कहते हैं। यदि इन गुणों व उप-गुणों को पुनः विभाजित किया जाय तो ऐसे वर्गीकरण को बहुगुण वर्गीकरण (Manifold Classification) कहते हैं।

गुणों के अनुसार वर्गीकरण करना बड़ा सरल कार्य है, किन्तु यहाँ दो बातों का ध्यान रखना आवश्यक है। पहली बात तो यह कि विभिन्न गुणों की स्पष्ट परिभाषा होनी चाहिये, जैसे साक्षरता और निरक्षरता के आधार पर वर्गीकरण करते समय यह निश्चित कर लेना चाहिये कि साक्षरता की कोटि में किस स्तर तक पढ़े हुये लोग आयेंगे और निरक्षरता की कोटि में किन्हें माना जायगा। दूसरे, इस बात का भी ध्यान रखना चाहिये कि अनेक गुण बदलते रहते हैं, जैसे निरक्षर से लोग साक्षर अथवा अविवाहित से विवाहित होते रहते हैं।

वर्गान्तरों के अनुसार वर्गीकरण
(Classification by Class-intervals or Groups)

संख्यात्मक समंकों का वर्गीकरण साधारणतः वर्गान्तरों के अनुसार किया जाता है। समंकों की समता व विषमता का ध्यान रखते हुये कुछ छोटे छोटे वर्ग निर्धारित कर लिये जाते हैं और फिर उन्हें सावधानी के साथ उन वर्गों में

वितरित कर दिया जाता है। जैसे किसी कक्षा के एक सौ विद्यार्थियों की ऊंचाइयाँ नाप कर उन्हें ($4\frac{1}{4}'-4\frac{1}{2}'$), ($4\frac{1}{2}'-4\frac{3}{4}'$), ($4\frac{3}{4}'-5.0'$), ($5{\cdot}0'-5\frac{1}{4}'$), आदि वर्गों में विभाजित किया जाय तो इस प्रकार का वर्गीकरण वर्गान्तरों के अनुसार होगा, जो हमें सूचित करेगा कि विभिन्न वर्गों में आने वाले कितने विद्यार्थी हैं। वर्गीकरण के सम्बन्ध में जिन विशेष शब्दों का प्रयोग किया जाता है उनका स्पष्टीकरण आवश्यक है :—

(अ) **वर्ग-सीमायें (Limits of Class-intervals or Groups)**—जिन संख्याओं से किसी वर्ग का निर्धारण होता है उन्हें वर्ग-सीमायें कहते हैं। वर्ग का निधारण दो संख्याओं से होता है अतः पहली संख्या को निचली वर्ग-सीमा (Lower Limit of the Class-interval) तथा दूसरी को ऊपरी वर्ग-सीमा (Upper Limit of the Class-interval) कहते हैं। उपर्युक्त उदाहरण में प्रथम वर्ग की निचली वर्ग-सीमा $4\frac{1}{4}'$ तथा ऊपरी वर्ग-सीमा $4\frac{1}{2}'$ है।

(ब) **वर्ग-विस्तार (Class-interval or Magnitude)**—किसी वर्ग की दोनों सीमाओं के मध्यान्तर को वर्ग-विस्तार कहते हैं। प्रथम वर्ग का विस्तार ($4\frac{1}{4}'-4\frac{1}{2}'$), अर्थात् $\frac{1}{4}'$ अथवा $0{\cdot}25'$ है।

(स) **वर्ग-आवृत्ति (Class Frequency)**—एकत्रित समंकों के जितने चल-मूल्य (Variables) अथवा अवलोकन (Observations) किसी वर्ग की सीमाओं के अन्तर्गत आते हैं वे उस वर्ग की आवृत्ति कहलाते हैं। यदि कक्षा में $4\frac{1}{4}'$ व $4\frac{1}{2}'$ के अन्तर्गत ऊँचाई वाले केवल दो विद्यार्थी हैं, तो यह संख्या उस वर्ग की आवृत्ति कही जायगी।

(द) **मध्य-मूल्य (Mid-Value)**—किसी वर्ग की सीमाओं के मध्य-स्थान को मध्य-मूल्य कहते हैं। मध्य-मूल्य ज्ञात करने के लिये वर्ग की दोनों सीमाओं को जोड़ कर उनका आधा करना पड़ता है। अतः उपर्युक्त उदाहरण में प्रथम वर्ग का मध्य-मूल्य इस प्रकार निकाला जायगा :—

$$\text{मध्य-मूल्य} = \frac{\text{Lower Limit} + \text{Upper Limit}}{2}$$

$$= \frac{4\frac{1}{4}' + 4\frac{1}{2}'}{2}$$

$$= 4\frac{3}{4}' \text{ अथवा } 4.75'$$

वर्गान्तरों के अनुसार वर्गीकरण की कठिनाइयाँ
(Difficulties in Classification by Class-intervals)

वर्गान्तरों के आधार पर समंकों का वर्गीकरण करते समय निम्न चार समस्याओं का सामना करना पड़ता है :—

(१) वर्गान्तरों की संख्या (Number of Class-intervals)

(२) वर्गान्तरों का विस्तार (Magnitude of Class-intervals)

(३) वर्गान्तरों की सीमायें (Limits of Class-intervals)

(४) वर्गान्तरों में आवृत्ति का विन्यास (Arrangement of Frequencies in Class-intervals)

वर्गान्तरों की संख्या (Number of Class-intervals)

समंकों को कितने वर्गों में विभाजित करना है, इसका निश्चय करना सांख्यिक का प्रथम कर्तव्य है। यद्यपि इसके लिये कोई निश्चित मत नहीं दिया जा सकता, फिर भी यह ध्यान रखना चाहिये कि वर्गों की संख्या न तो बहुत अधिक हो न बहुत कम। यदि वर्गों की संख्या बहुत अधिक होती है तो प्रत्येक वर्ग में चल-मूल्यों की संख्या अथवा आवृत्ति कम होगी और कभी ऐसा भी हो सकता है कि किसी वर्ग की आवृत्ति शून्य हो। इसके विपरीत वर्गों की संख्या बहुत कम होने पर प्रत्येक वर्ग में आवृत्तियों के अत्यधिक जमाव के कारण उनका अध्ययन कठिन हो जाता है। अतः वर्गीकरण करते समय इस बात का प्रयत्न करना चाहिये कि यथोचित संख्या में उतने ही वर्ग लिये जायँ जिनसे समंकों व उनकी आवृत्तियों के बारे में अधिक से अधिक जानकारी प्राप्त हो सके।

वर्गान्तरों का विस्तार (Magnitude of Class-intervals)

पर्याप्त संख्या में वर्गान्तरों का निश्चय करने के उपरान्त वर्गों का विस्तार निश्चित करना पड़ता है। वर्ग-विस्तार उपलब्ध समंकों के अधिक से अधिक व कम से कम मूल्यों के अन्तर व वर्गान्तरों की संख्या पर निर्भर है। यदि किसी स्थिति में समंकों का सब से अधिक मूल्य 100 तथा सबसे कम मूल्य 10 है और उन्हें 15 वर्गों में विभाजित करना है, तो वर्ग-विस्तार इस प्रकार ज्ञात किया जायगा :—

$$\text{वर्ग-विस्तार} = \frac{\text{Largest Value} - \text{Smallest Value}}{15}$$

$$= \frac{100-10}{15}$$

$$= 6 \text{ Units}$$

इस प्रकार (10—16), (16—22),......(94—100) जैसे 15 वर्ग बनेंगे, जिनमें प्रत्येक का वर्ग-विस्तार 6 इकाई, अर्थात् समान होगा। साधारणतः जहाँ समंकों में स्थिरता व एकरूपता रहती है, समान वर्ग-विस्तार (Equal Class-intervals) रखना उचित होता है। इसके विपरीत उन स्थितियों में जहाँ समंकों में अत्यधिक विषमता होती है, समान वर्ग-विस्तार की अपेक्षा असमान वर्ग-विस्तार (Unequal Class-intervals) रखना अधिक उचित समझा जाता है। उदाहरण के लिये आय या भूमि के वितरण सम्बन्धी समंकों का वर्गीकरण करते समय हमें इस ढंग के वर्ग-विस्तार लेने पड़ते हैं, यद्यपि इनके कारण एक वर्ग के समंकों की दूसरे वर्ग के समंकों से तुलना करना कठिन होता है।

वर्ग-सीमायें (Limits of Class-intervals)

वर्ग-सीमायें निर्धारित करते समय इस बात का ध्यान रखना चाहिये कि उनमें इतनी स्पष्टता हो कि सभी उपलब्ध समंकों को ठीक ठीक वर्गीकृत किया जा सके। साधारणतः वर्ग-सीमायें निम्न ढंगों से रखी जाती हैं :—

TABLE A

Class-intervals	Frequency
0—10	4
10—20	10
20—30	18
30—40	26
40—50	11
50—60	7
60—70	3

TABLE B

Class-intervals	Frequency
0—9	4
10—19	10
20—29	18
30—39	26
40—49	11
50—59	7
60—69	3

TABLE A—इस तालिका में वर्गान्तरों की निचली व ऊपरी वर्ग-सीमायें दस-दस के अन्तर पर रखी गई हैं। प्रत्येक वर्ग के सामने उसकी आवृत्ति (Frequency) है। समंकों का अधिकतर वर्गीकरण इसी रीति से किया जाता है; किन्तु इसमें एक अस्पष्टता होती है। एक वर्ग की ऊपरी सीमा दूसरे वर्ग की निचली सीमा के बराबर होने के कारण यह प्रश्न उठता है कि इन सीमाओं के बराबर मूल्य वाले समंक को किस वर्ग में रखा जाय, जैसे यदि

किसी समंक का मूल्य 20 है तो उसे दूसरे वर्ग में रखा जाय या तीसरे में। साधारणतः ऐसे समंकों को अगले वर्ग में रखना उचित समझा जाता है। जब समंकों का वर्गीकरण इस प्रकार किया जाता है तो उसे अपवर्जी रीति (Exclusive Method) कहते हैं, क्योंकि इसमें ऊपरी सीमा के बराबर मूल्य वाले समंक को छोड़ दिया जाता है।

TABLE B—यह तालिका पिछली तालिका से भिन्न है क्योंकि इसमें प्रत्येक वर्ग की ऊपरी सीमा अगले वर्ग की निचली सीमा के बराबर नहीं है। वस्तुतः इस प्रकार की वर्ग-सीमायें उस कठिनाई को दूर करने के लिये उपयोग में लाई जाती हैं जिसका वर्णन पहली तालिका के सम्बन्ध में किया जा चुका है। उदाहरण के लिये इस स्थिति में अब यह सोचने की आवश्यकता नहीं रह जाती कि 10 को पहले वर्ग में रखना है या दूसरे में। चूँकि प्रत्येक वर्ग में जिन समंकों का समावेश करना है उन्हीं के आधार पर निचली व ऊपरी सीमायें रखी जाती हैं, इसलिये यह रीति समावेशी रीति (Inclusive Method) कहलाती है। किन्तु इसमें दो दोष होते हैं। प्रथम दोष तो यह है कि विभिन्न वर्गों की संततता (Continuity) टूट जाती है, तथा दूसरा दोष यह है कि यदि किसी समंक का मूल्य किसी वर्ग की ऊपरी सीमा व अगले वर्ग की निचली सीमा के अन्तर्गत है, तो उसे किस वर्ग में रखना चाहिये इसका कोई संकेत नहीं मिलता। जैसे यदि कोई समंक 9·75 है तो यह बतलाना कठिन है कि उसे पहले वर्ग में रखा जायगा या दूसरे में। ऐसी स्थिति में इस रीति का प्रयोग अनुचित होता है।

TABLE C

Exceeding	Not exceeding	Frequency
0	10	4
10	20	10
20	30	18
30	40	26
40	50	11
50	60	7
60	70	3

TABLE D

Mid-values	Frequency
5	4
15	10
25	18
35	26
45	11
55	7
65	3

TABLE C—कभी कभी वर्ग-सीमाओं का स्पष्टीकरण करने के लिये 'Exceeding' but 'Not exceeding', 'More than' but 'Less than', आदि शब्दों का प्रयोग किया जाता है जिनके कारण प्रथम तालिका

में होने वाली कठिनाई को दूर किया जा सकता है। इस तालिका में प्रत्येक वर्ग की सीमायें बिल्कुल स्पष्ट हैं।

TABLE D—इस तालिका में वर्गों की सीमायें न दिखला कर उनके मध्य-मूल्य या मध्य-विन्दु दिखलाये गये हैं। यदि इनके आधार पर वर्ग-सीमायें ज्ञात करनी हैं तो निम्न रीति का प्रयोग करना चाहिये :—

(क) पहले मध्य-विन्दुओं के आपसी अन्तर को ज्ञात करके उसका आधा करना चाहिये;

(ख) फिर इस आधे भाग को मध्य-मूल्य में से घटा कर वर्ग की निचली सीमा व जोड़ कर ऊपरी सीमा ज्ञात करना चाहिये।

जैसे, यहाँ मध्य-मूल्यों के बीच का अन्तर 10 है। इस अन्तर का आधा (10÷2) अर्थात् 5 हुआ। अतः पहले वर्ग की सीमायें इस प्रकार हुईं—

निचली सीमा=(5—5)=0; ऊपरी सीमा=(5+5)=10

TABLE E

Class-intervals	Frequency
Below 10	4
„ 20	14
„ 30	32
„ 40	58
„ 50	69
„ 60	76
„ 70	79

TABLE F

Class-intervals	Frequency
Above 0	79
„ 10	75
„ 20	65
„ 30	47
„ 40	21
„ 50	10
„ 60	3

TABLE E—इस तालिका में केवल वर्गों की ऊपरी सीमायें दी हुई हैं। ऐसी तालिका को 'Below Table', 'Less than Table', 'Not Exceeding Table', आदि नाम दिये जा सकते हैं। इसकी सबसे बड़ी विशेषता यह होती है कि इसमें संचयी आवृत्तियाँ (Cumulative Frequency) दी रहती हैं। चूँकि इनका संचय ऊपर से नीचे की ओर करना पड़ता है, इसलिए संचयी आवृत्तियाँ उत्तरोत्तर बढ़ती जाती हैं। अन्तिम ऊपरी सीमा के सामने अधिकतम आवृत्ति (Maximum Frequency) रहती है जो कुल आवृत्ति (Total Frequency) सूचित करती है। ऐसी तालिका में जब वर्गों की दोनों सीमायें रख कर उनकी वास्तविक आवृत्ति ज्ञात करनी आवश्यक हो, तो अगली संचयी आवृत्ति में से पिछली को घटाना चाहिये। इस प्रकार पहले वर्ग (0—10) की आवृत्ति 4; दूसरे वर्ग (10—20) की

आवृत्ति (14—4), अर्थात् 10; तीसरे वर्ग (20—30) की आवृत्ति (32—14), अर्थात् 18;......अन्तिम वर्ग (90—100) की आवृत्ति (79—76), अर्थात् 3 होगी।

TABLE F—इस तालिका में वर्गों की केवल निचली सीमायें दिखलाई गई हैं। इसे 'Above Table', 'More than Table' 'Exceeding Table', आदि नाम दिये जा सकते हैं। यहाँ भी वर्गों की केवल एक ही सीमा दी रहने के कारण आवृत्तियाँ संचयी (Cumulative Frequency) हैं, किन्तु इनका संचय नीचे से ऊपर की ओर किया गया है। इस प्रकार की तालिका में अधिकतम आवृत्ति (Maximum Frequency) प्रथम निचली सीमा के सम्मुख रहती है। यहाँ विभिन्न वर्गों की आवृत्तियाँ ज्ञात करने के लिये पिछली संचयी आवृत्ति में से अगली को घटाना चाहिये। अतः पहले वर्ग (0—10) की आवृत्ति (79—76), अर्थात् 3; दूसरे वर्ग (10—20) की आवृत्ति (75—65), अर्थात् 10; तीसरे वर्ग (20—30) की आवृत्ति (65—47), अर्थात् 18;......अन्तिम वर्ग (90—100) की आवृत्ति 3 होगी।

TABLE G

Class-intervals	Frequency
Below 10	4
10—20	10
20—30	18
30—40	26
40—50	11
50—60	7
60 and above	3

TABLE H

Class-intervals	Frequency
0—5	2
5—10	5
10—20	7
20—30	18
30—40	26
40—60	18
60—90	3

TABLE G—इस तालिका में भी वर्ग-सीमायें अपवर्जी रीति से ही रखी गई हैं, किन्तु प्रथम वर्ग की निचली तथा अन्तिम वर्ग की ऊपरी सीमायें अज्ञात हैं। इन वर्गों को विवर्तमुखी (Open-end) वर्ग कहते हैं। इन स्थितियों में वर्ग-सीमाओं की अस्पष्टता के कारण कुछ चरममूल्य वाले समंकों का अध्ययन नहीं किया जा सकता। किन्तु आवश्यकता पड़ने पर इन सीमाओं का अनुमान अन्य वर्गों की सीमाओं के आधार पर किया जाता है।

TABLE H—इस तालिका में दी गई वर्ग सीमाओं में स्थिरता नहीं है क्योंकि कहीं वर्ग-विस्तार पाँच, कहीं दस, कहीं बीस और कहीं तीस है। इस ढंग की वर्ग-सीमायें तब चुननी पड़ती हैं जब समंकों में अधिक विषमता पाई जाती है।

७

वर्गान्तरों में आवृत्तियों का विन्यास
(Arrangement of Frequencies in Class-intervals)

वर्ग व उनकी सीमाओं का निर्धारण करने के उपरान्त उनके अन्तर्गत समंकों को वितरित करने का प्रश्न उठता है। इस कार्य के लिये एक चिन्ह पत्र (Tally Sheet) बनाया जाता है। सर्वप्रथम इस पत्र की बाईं ओर निश्चित किये गये वर्गान्तरों को ले लिया जाता है। फिर एक एक समंक को लेकर यह देखना पड़ता है कि वह किस वर्गान्तर में प्रविष्ट होता है। जिस वर्गान्तर में उसे सम्मिलित करना रहता है उसके सामने एक तिरछी रेखा लगा दी जाती है। इसी प्रकार सभी समंकों के लिये उनके तत्सम्बन्धी वर्गों के सामने रेखायें लगानी पड़ती हैं। साधारणतः गणन-कार्य की सुविधा के लिये चार चिन्हों को पाँचवें चिन्ह से काट दिया जाता है। तदुपरान्त प्रत्येक वर्ग के चिन्हों की संख्या गिन ली जाती है। इन्हीं संख्याओं को विभिन्न वर्गान्तरों की आवृत्तियाँ (Frequencies) कहते हैं।

Illustration 1 :—

The marks obtained by 100 candidates in Mathematics are given below :—

84	91	58	72	44	87	76	43	43	83
40	73	86	77	75	73	71	54	46	10
55	33	43	76	95	65	74	50	27	65
80	57	73	5	36	33	91	53	63	69
47	29	37	6	11	82	40	27	84	53
19	35	72	44	17	51	67	58	76	38
16	37	24	46	50	19	59	60	25	92
13	45	0	61	86	39	78	23	12	71
62	22	41	38	27	66	51	11	29	63
33	45	63	36	35	80	42	39	68	55

Form a Frequency Distribution, with suitable Class-intervals.

Solution :—

उपर्युक्त उदाहरण में दिये गये प्राप्तांकों का वर्गीकरण करने के पूर्व हमें निश्चित कर लेना चाहिये कि इन्हें कितने वर्गान्तरों में रखना है, व प्रत्येक वर्ग की क्या सीमायें होंगी। यहाँ सम्पूर्ण समंकों का विस्तार (95—0), अर्थात् 95 होने के कारण यदि दस-दस प्राप्तांकों के वर्ग-विस्तार वाले दस वर्ग

लिये जायँ तो उत्तम होगा। नीचे इन प्राप्तांकों का वर्गीकरण अपवर्जी (Exclusive) व समावेशी (Inclusive) रीतियों से कर के दिखलाया जा रहा है :—

प्राप्तांकों का अपवर्जी रीति से वर्गीकरण

MARKS OBTAINED BY 100 STUDENTS IN MATHEMATICS
(CLASSIFICATION BY EXCLUSIVE METHOD)

CLASS INTERVALS	TALLY MARKS	FREQUENCY
0-10	///	3
10-20	~~////~~ ////	9
20-30	~~////~~ ////	9
30-40	~~////~~ ~~////~~ ///	13
40-50	~~////~~ ~~////~~ ////	14
50-60	~~////~~ ~~////~~ ///	13
60-70	~~////~~ ~~////~~ //	12
70-80	~~////~~ ~~////~~ ////	14
80-90	//// ////	9
90-100	////	4
	TOTAL	100

प्राप्तांकों का समावेशी रीति से वर्गीकरण

MARKS OBTAINED BY 100 STUDENTS IN MATHEMATICS
(CLASSIFICATION BY INCLUSIVE METHOD)

CLASS INTERVALS	TALLY MARKS	FREQUENCY
0-9	///	3
10-19	~~////~~ ////	9
20-29	~~////~~ ////	9
30-39	~~////~~ ~~////~~ ///	13
40-49	~~////~~ ~~////~~ ////	14
50-59	~~////~~ ~~////~~ ///	13
60-69	~~////~~ ~~////~~ //	12
70-79	~~////~~ ~~////~~ ////	14
80-89	~~////~~ ////	9
90-99	////	4
	TOTAL	100

सांख्यिकीय माला (Statistical Series)

समंकों के व्यवस्थित अनुविन्यसन के फलस्वरूप जो माला अथवा श्रेणी उपलब्ध होती है उसे सांख्यिकीय माला (Statistical Series) कहते हैं। **कॉनर** के मतानुसार यदि दो चल-मूल्यों (Variables) का एक साथ ही इस प्रकार प्रदर्शन किया जाय कि एक के मापनीय अन्तर दूसरे के मापनीय अन्तर से सम्बन्धित हों, तो ऐसे प्रदर्शन के परिणामस्वरूप जो माला हमें प्राप्त होती है उसे सांख्यिकीय माला कहते हैं।* सांख्यिकीय मालायें तीन प्रकार की होती हैं :—

(१) **कालान्तर माला (Time Series)**
(२) **स्थानिक माला (Spatial Series)**
(३) **परिस्थिति माला (Condition Series)**

कालान्तर माला (Time Series)

जब समंकों का वर्गीकरण समय (दिन, मास, वर्ष, आदि) के आधार पर किया जाता है, तो ऐसे वर्गीकरण से कालान्तर माला का निर्माण होता है। निम्न तालिका में भारतीय संघ की १९५०-५१ से १९५५-५६ तक की मुद्रा-पूर्ति दिखलाई गई है। यह एक कालान्तर माला का उदाहरण है, जिसे कभी कभी ऐतिहासिक माला (Historical Series) भी कहते हैं :—

MONEY SUPPLY IN THE INDIAN UNION†
(In crores of rupees)

Last Friday	Notes	Rupee Coins	Balance with Treasuries	Cash with Banks
1950-51 ...	1238.60	144·11	4·42	39·10
1951-52 ...	1128·29	131·11	3·70	39·13
1952-53 ...	1119·06	125·22	7·34	37·69
1953-54 ...	1150·17	120·71	4·26	37·19
1954-55 ...	1236·44	115·01	2·83	36·85
1955-56 ...	1424·23	123·45	1·14	41·45

*If two variable quantities can be arranged side by side so that measurable difference in the one correspond with measurable differences in the other, the result is said to form a statistical series—**Connor.**

†Source: *Report on Currency and Finance*, Reserve Bank of India, 1955-56.

स्थानिक माला (Spatial Series)

स्थानिक माला में समंकों का प्रदर्शन किसी भौगोलिक आधार पर किया जाता है। निम्न तालिका में भारतवर्ष की जनसंख्या प्राकृतिक प्रदेशों के आधार पर दिखलाई गई है :—

POPULATION BY NATURAL REGIONS‡

Region	Population (Census of 1951)
Himalayan Region	1,70,42,697
Northern Plains	13,94,47,952
Peninsular Hills and the Plateau ...	10,85,98,645
Western Ghats and the Coastal areas ...	3,99,26,793
Eastern Ghats and the Coastal areas ...	5,18,32,336
Andman and Nicobar Islands ...	30,971
INDIA	35,68,79,394

परिस्थिति माला (Condition Series)

यदि समंकों का वर्गीकरण किसी परिस्थिति में होने वाले परिवर्तनों के आधार पर किया जाता है, तो इसके फलस्वरूप निर्मित होने वाली सांख्यिकीय माला को परिस्थिति माला कहते हैं। उदाहरण के लिये यदि किसी उद्योग में काम करने वाले श्रमिकों की आय से सम्बन्धित समंकों का वर्गीकरण आय के विभिन्न वर्गों के आधार पर किया जाय, तो इस प्रकार बनने वाली सांख्यिकीय माला परिस्थिति माला कहलायेगी।

परिस्थिति मालाओं को साधारणत: दो वर्गों में बाँटा जा सकता है :—

(१) विच्छिन्न माला (Discrete Series)

(२) अविच्छिन्न माला (Continuous Series)

विच्छिन्न माला (Discrete Series)

जिस सांख्यिकीय माला में समंकों के चल-मूल्य विच्छिन्न (Discrete) अथवा (Exact) होते हैं, उसे विच्छिन्न माला (Discrete Series) कहते हैं। विच्छिन्न मूल्यों से हमारा तात्पर्य उन मूल्यों से है जिनकी ठीक-ठीक माप

‡Source: INDIA, 1956.

की जा सकती है, और जिनकी इकाइयाँ फिर किसी छोटे भागों में विभक्त नहीं की जा सकतीं, जैसे व्यक्ति, दुर्घटना, आदि। इनके अन्य विभाग अथवा उप-विभाग नहीं किये जा सकते। निम्नलिखित तालिका में एक विच्छिन्न माला का उदाहरण दिया जा रहा है :—

No. of accidents per day			No. of days in a year
0	...	...	140
1	...	...	80
2	...	...	65
3	...	...	38
4	...	...	25
5	...	...	12
6	...	...	5

अविच्छिन्न माला (Continuous Series)

जिस सांख्यिकीय माला में समंकों के चल-मूल्यों की ठीक-ठीक माप कठिन होती है व जिनकी इकाइयों को छोटे-छोटे अन्य विभागों में विभक्त किया जा सकता है, उसे अविच्छिन्न माला (Continuous Series) कहते हैं। उदाहरण के लिये आय, उत्पादन, मज़दूरी, आदि समंकों की शुद्धतम माप करना कठिन है। साथ ही इन समंकों को अनेक विभागों अथवा उपविभागों में बाँटा जा सकता है। अतः इस प्रकार की माला में कुछ वर्ग निर्धारित कर लिये जाते हैं, जिनके अन्तर्गत कितने अवलोकन (Observations) आते हैं, इसका पता लगाने का प्रयास किया जा सकता है। अविच्छिन्न माला का एक नमूना देखिए :—

Weight in lbs.			**No. of students**
115—120	...	...	15
120—125	...	...	20
125—130	...	...	26
130—135	...	...	43
135—140	...	...	21
140—145	...	...	15
145—150	...	...	10

अनुविन्यास (Array)

कभी कभी एकत्र किये गये समंकों का अनुविन्यसन करने की भी आवश्यकता पड़ती है। अनुविन्यसन एक सांख्यिकीय क्रिया है जिसकी सहायता से समंकों को आरोही (Ascending) अथवा अवरोही (Descending) क्रम में रक्खा जाता है। इससे समंकों के विस्तार (Range) की पूर्ण जानकारी प्राप्त हो जाती है। निम्न तालिका में किसी विश्वविद्यालय की बी० कॉम० परीक्षा में बैठने वाले प्रथम पचास छात्रों के सांख्यिकी के प्राप्तांक दिये गये हैं, जिनका अनुविन्यसन आरोही व अवरोही क्रमों से दिखलाया गया है :—

MARKS OBTAINED BY FIRST 50 STUDENTS OF A UNIVERSITY IN STATISTICS

Roll No.	Marks	Roll No.	Marks	Roll No.	Marks	Roll No.	Marks	Roll No.	Marks
1	90	11	50	21	50	31	79	41	78
2	80	12	55	22	60	32	53	42	76
3	20	13	90	23	70	33	33	43	50
4	10	14	37	24	70	34	33	44	52
5	25	15	35	25	25	35	30	45	53
6	55	16	55	26	90	36	50	46	60
7	60	17	60	27	33	37	45	47	60
	80	18	39	28	42	38	52	48	10
	80	19	87	29	45	39	60	49	65
10	88	20	98	30	60	40	70	50	69

प्राप्तांकों का आरोही क्रम

(Marks arranged in Acending Order)

10	10	20	25	25	30	33	33	33	35
37	39	42	45	45	50	50	50	50	52
52	53	53	55	55	55	60	60	60	60
60	60	60	65	69	70	70	70	76	78
79	80	80	80	87	88	90	90	90	98

प्राप्तांकों का अवरोही क्रम

(Marks arranged in Descending Order)

98	90	90	90	88	87	80	80	80	79
78	76	70	70	70	69	65	60	60	60
60	60	60	60	55	55	55	53	53	52
52	50	50	50	50	45	45	42	39	37
35	33	33	33	30	25	25	20	10	10

यदि हम उपर्युक्त क्रमों के अनुसार अनुविन्यसित किये गये प्राप्तांकों का ध्यानपूर्वक अध्ययन करें तो हम परीक्षा में बैठने वाले विद्यार्थियों के बारे में अनेक सूचनायें प्राप्त कर सकते हैं, जैसे 60 अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या सबसे अधिक, अर्थात् 7 है; कुल 12 विद्यार्थियों को 75 से अधिक अंक प्राप्त हुए है; कुल 6 विद्यार्थी असफल हुये हैं, जिन्हें 33% से कम अंक मिले हैं, आदि।

सारणीयन (Tabulation)

समंकों का विधिपूर्वक वर्गीकरण करने के उपरान्त उनको तालिकाओं अथवा सारणियों में एक उपयुक्त क्रम से विन्यासित किया जाता है, जिसे सारणीयन (Tabulation) कहते हैं। सीक्रिस्ट के विचारानुसार सारणियाँ वर्गीकरण द्वारा प्राप्त विश्लेषणों को स्थायीरूप से प्रस्तुत करने तथा तुलना योग्य समान वस्तुओं को पारस्परिक ढंग से रखने का एक माध्यम हैं।* कॉनर ने भी सारणीयन की परिभाषा इस प्रकार दी है—सारणीयन आंकिक सामग्री को किसी व्यवस्थित एवं क्रमानुसार ढंग से प्रदर्शित करने की एक पद्धति है जिससे किसी विचारणीय समस्या पर पर्याप्त प्रकाश पड़ सके।† वास्तव में सारणियों द्वारा समंकों के महत्व पर जितना प्रकाश डाला जा सकता है उतना प्रकाश अन्य रीतियों द्वारा नहीं डाला जा सकता। अतएव साधारण लोग भी अत्यन्त सुगमतापूर्वक उनके द्वारा प्रदर्शित समंकों की विशेषताओं को समझ सकते हैं।

सारणीयन से लाभ (Advantages of Tabulation)

सारणीयन के निम्नलिखित लाभ है :—

(१) इसके द्वारा विशाल समंकों को संक्षिप्तरूप दिया जा सकता है, और उन्हें एक व्यवस्थित क्रम से रखा जा सकता है।

---

* Tables are a means of recording in permanent form the analysis that is made through classification and of placing in juxtaposition things that are similar and should be compared—**Secrist.**

† Tabulation involves the orderly and systematic presentation of numerical data in a form designed to elucidate the problem under consideration—**Connor.**

(२) सारणीयन के कारण शीर्षकों को बार बार दोहराने की आवश्यकता नहीं पड़ती।

(३) सारणियों में रखे गये समंकों को कई ओर से पढ़ा भी जा सकता है।

(४) सारणीयन के कारण समय और स्थान की बचत होती है।

(५) सारणियों में अनुपात, प्रतिशत, गुणक (Coefficient) आदि का भी प्रयोग किया जाता है, इसलिये तुलनात्मक अध्ययन अधिक सुगम होता है।

(६) सारणीयन से समंकों का जोड़ना और घटाना सुगम हो जाता है। साथ ही साथ अशुद्धियों का भी शीघ्र पता लग सकता है।

(७) सारणियों में दिये गये आँकड़ों को आसानी से याद रखा जा सकता है।

प्राथमिक तथा व्युत्पन्न सारणियाँ
(Primary and Derivative Tables)

जो सारणी वास्तविक समंकों के आधार पर बनाई जाती है उसे प्राथमिक (Primary), तथा जो उनके द्वारा निकाले गये योग, अनुपात, गुणक, प्रतिशत या मध्यक आदि के आधार पर बनती है, उसे व्युत्पन्न (Derivative) सारणी कहते हैं। व्युत्पन्न सारणियों में केवल समंकों के सारांश रहते हैं, अतः इनकी सहायता से समंकों की महत्ता समझना और भी सुगम हो जाता है।

सारणीयन की रीतियाँ (Methods of Tabulation)

सारणीयन की प्रमुख चार रीतियाँ हैं:—

(१) साधारण या एक-गुण सारणीयन (Single Tabulation)

(२) द्विगुण सारणीयन (Double Tabulation)

(३) त्रिगुण सारणीयन (Treble Tabulation)

(४) बहुगुण सारणीयन (Manifold Tabulation)

साधारण या एक-गुण सारणीयन (Single Tabulation)

इस रीति के अनुसार जो सारणी बनाई जाती है वह केवल समंकों के एक ही गुण-विशेष का स्पष्टीकरण करती है। इसका एक उदाहरण देखिये :—

TABLE SHOWING THE DISTRIBUTION OF THE TEXTILE WORKERS IN DIFFERENT WAGE-GROUPS

Wages in Rupees (1)	No. of Workers (2)
Below Rs. 30	69
Rs. 30 but below Rs. 40	167
Rs. 40 „ „ Rs. 50	207
Rs. 50 „ „ Rs. 60	65
Rs. 60 „ „ Rs. 70	58
Rs. 70 „ „ Rs. 80	27
Rs. 80 and Over	10
Total ...	603

द्विगुण सारणीयन (Double Tabulation)

इस रीति द्वारा बनाई गई सारणियों में समंकों के दो गुणों पर एक साथ ही प्रकाश डाला जाता है। जैसे उपर्युक्त सारणी में केवल यही ज्ञात होता है कि किस मज़दूरी-वर्ग में कितने मज़दूर हैं, परन्तु यह नहीं जाना जा सकता कि उनमें कितने पुरुष और कितनी स्त्रियाँ हैं। द्विगुण सारणीयन इसका स्पष्टीकरण कर रहा है :—

TABLE SHOWING THE DISTRIBUTION OF THE TEXTILE WORKERS ACCORDING TO SEX IN DIFFERENT WAGE-GROUPS

Wages in Rupees	Number of Workers		
	Males	Females	Tota
(1)	(2)	(3)	(4)
Below Rs. 30	49	20	69
Rs. 30 but below Rs. 40	135	32	167
Rs. 40 „ „ Rs. 50	163	44	207
Rs. 50 „ „ Rs. 60	40	25	65
Rs. 60 „ „ Rs. 70	45	13	58
Rs. 70 „ „ Rs. 80	20	7	27
Rs. 80 and Over	8	2	10
Total ...	460	143	603

त्रिगुण सारणीयन (Treble Tabulation)

इस रीति द्वारा जो सारणी बनती है उसमें समंकों के तीन गुणों पर प्रकाश पड़ता है। उदाहरण के लिये यदि उपर्युक्त सारिणी में दिये गये मज़दूरों में कितने पुरुष और कितनी स्त्रियाँ हैं, यह दिखाने के साथ ही साथ यह भी दिखाना हो कि उनमें कितने विवाहित और कितने अविवाहित हैं, तो हमारी सारणी का यह स्वरूप हो जायगा :—

TABLE SHOWING THE DISTRIBUTION OF THE TEXTILE WORKERS ACCORDING TO SEX AND CIVIL CONDITIONS IN DIFFERENT AGE-GROUPS

Wages in Rupees	Number of Workers								
	Males			Females			Total		
	Married	Un-married	Total	Married	Un-married	Total	Married	Un-married	Total
1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
Below Rs. 30	30	19	49	15	5	20	45	24	69
30—40	105	30	135	27	5	32	132	35	167
40—50	120	43	163	30	14	44	150	57	207
50—60	31	9	40	17	8	25	48	17	65
60—70	38	7	45	9	4	13	47	11	58
70—80	16	4	20	5	2	7	21	6	27
Above Rs. 80	7	1	8	2	0	2	9	1	10
Total ...	347	113	460	105	38	143	452	151	603

बहुगुण सारणीयन (Manifold Tabulation)

बहुगुण सारणीयन में समंकों के अनेक गुणों पर एक साथ प्रकाश डाला जाता है। निम्नलिखित उदाहरण में एक ऐसी ही सारणी बनाई गई है :—

Illustration 2 :—

Prepare a blank table to show the distribution of population according to sex and four religions, in five age-groups, in five important cities of Uttar Pradesh.

(बी० कॉम०, बनारस, १९५०)

Distribution of Population according to Sex in four Religions and five Age-groups in the five important Cities of U. P.

CITY	Religion	MALES						FEMALES						TOTAL					
		Below 20	20—40	40—60	60—80	80 & Above	Total	Below 20	20—40	40—60	60—80	80 & Above	Total	Below 20	20—40	40—60	60—80	80 & Above	Total
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1. Agra	Hindu Muslim Sikh Christian																		
	Total																		
2. Allahabad	Hindu Muslim Sikh Christian																		
	Total																		
3. Kanpur	Hindu Muslim Sikh Christian																		
	Total																		
4. Varanasi	Hindu Muslim Sikh Christian																		
	Total																		
5. Lucknow	Hindu Muslim Sikh Christian																		
	Total																		

सारणीयन के नियम (Rules for Tabulation)

सारणियों का महत्व उनके सुव्यवस्थित प्रदर्शन पर निर्भर है। सारणी समंकों की जितनी अधिक से अधिक सूचनायें व्यक्त करती है, उतनी ही वह अच्छी समझी जाती है। अतएव सारणीयन करते समय निम्न नियमों का ध्यान रखना आवश्यक है :—

(१) प्रत्येक सारणी के ऊपर एक शीर्षक (Heading) होना चाहिये जो स्पष्ट होने के साथ ही उसके अन्तर्गत दी गई सूचनाओं पर पर्याप्त प्रकाश डाले। शीर्षक संक्षिप्त होना चाहिये, किन्तु यदि संक्षिप्त शीर्षक से काम न चलता हो तो लम्बे शीर्षक को सुविधानुसार कई पंक्तियों में विभक्त कर देना चाहिये।

(२) इसी प्रकार प्रत्येक कॉलम के ऊपर भी एक एक स्पष्ट उप-शीर्षक (Caption) का होना आवश्यक है।

(३) सारणी में कितने कॉलम बनाने हैं इसका पूर्व-निश्चय कर लेना चाहिये। जहाँ तक हो सके प्रत्येक सूचना को प्रदर्शित करने के लिये अलग कॉलम बनाना चाहिये, किन्तु साथ ही इस बात का भी ध्यान रहे कि अत्यधिक कॉलम होने से सारणी जटिल व अस्पष्ट हो जाती है।

(४) विभिन्न सूचनाओं को अधिक स्पष्ट करने के लिये सारणी में मोटी व पतली या एकहरी व दोहरी रेखाओं का प्रयोग करना चाहिये। सारणी के सौंदर्य को बढ़ाने के लिये उसके ऊपर व नीचे या चारो ओर गहरी काली रेखाओं का प्रयोग किया जा सकता है।

(५) प्रत्येक कॉलम के शीर्षक के नीचे उस कॉलम की क्रमसंख्या होनी चाहिये।

(६) सारणी का आकार ऐसा चुनना चाहिये कि वह एक ही पृष्ठ पर आ जाय जिससे उसके विभिन्न भागों का अवलोकन एक ही दृष्टि में किया जा सके।

(७) सारणी में समान व असमान समंकों का प्रदर्शन इस प्रकार करना चाहिये कि उनका तुलनात्मक अध्ययन भी हो सके। यदि उसमें व्युत्पन्न

समंकों (Derivatives), अर्थात् प्रतिशत, अनुपात, गुणक, आदि का भी प्रदर्शन करना है तो उन्हें सम्बन्धित समंकों के पास ही रखना चाहिये।

(८) महत्वपूर्ण सूचनाओं की ओर लोगों का ध्यान आकृष्ट करने के लिये उन्हें मोटे या टेढ़े अक्षरों में दिखलाना चाहिये।

(९) सारणी की स्पष्टता के लिये यह आवश्यक है कि विभिन्न समंकों का प्रदर्शन इस प्रकार किया जाय कि उनके स्थानीयमान एक दूसरे के नीचे हों। यदि उपलब्ध समंक विशाल आकार के हैं तो उन्हें कोई सन्निकटता-प्रमाप लेकर संक्षिप्त रूप दे देना चाहिये, किन्तु समंकों की इकाई के साथ ही इस प्रमाप का संकेत दिया जाना आवश्यक है।

(१०) जहाँ तक हो सके सारणी में ऊपर की ओर (बाईं ओर से दाहिनी ओर) कम तथा नीचे की ओर (ऊपर से नीचे) अधिक कॉलम रखने का प्रयास करना चाहिये, ताकि आवश्यकता पड़े तो लम्बी सारणियों को सुविधापूर्वक अगले पृष्ठों पर बिना शीर्षक दिये ही स्थान्तान्तरित किया जा सके।

(११) समंकों के सम्बन्ध में यदि कोई आवश्यक सूचनायें देनी हों तो सारणी के नीचे टिप्पणियों (N. B.) का प्रयोग करना चाहिये।

(१२) यदि सम्भव हो तो सारणी में गत वर्षों के तत्सम्बन्धी समंकों का भी प्रदर्शन करना चाहिये।

(१३) सारणी में अशुद्धियों को रोकने के लिये विभिन्न कॉलमों का निर्माण इस ढंग से करना चाहिये कि उनके द्वारा प्रदर्शित तथ्यों को दूसरी ओर से भी जाँचा जा सके।

(१४) जहाँ तक सम्भव हो इस बात का ध्यान रखना चाहिये कि सारणीयन के लिये प्रयोग में लाई जाने वाली रीति सरल, मितव्ययी व श्रम की बचत करने वाली हो।

(१५) वस्तुतः किसी उत्तम सारणी का निर्माण सांख्यिक की कुशलता, विवेक-शक्ति व उसके अनुभव पर निर्भर है। अतः किस परिस्थिति में किस ढंग से समंकों का सारणीयन करना उचित है, यह वही निर्णय कर सकता है।*

---

* In collection and tabulation commonsense is the chief requisite and experience the chief teacher—**Bowley.**

यांत्रिक सारणीयन (Mechanical Tabulation)

आधुनिक युग में समंकों का वर्गीकरण एवं सारणीयन करने के लिये अनेक यंत्रों का आविष्कार हुआ है। इनकी सहायता से विविध गुणों या वर्गों के आधार पर विशाल समंकों को छाँटना तथा उनका यथोचित ढंग से सारणीयन करना अत्यन्त सरल हो गया है। इसके अंतिरिक्त इन यंत्रों द्वारा किया गया सारणीयन अधिक विश्वसनीय होता है और इससे सांख्यिक के बहुमूल्य समय की बचत भी होती है। वर्तमान समय में यांत्रिक सारणीयन की प्रमुख प्रणालियाँ निम्नलिखित हैं :—

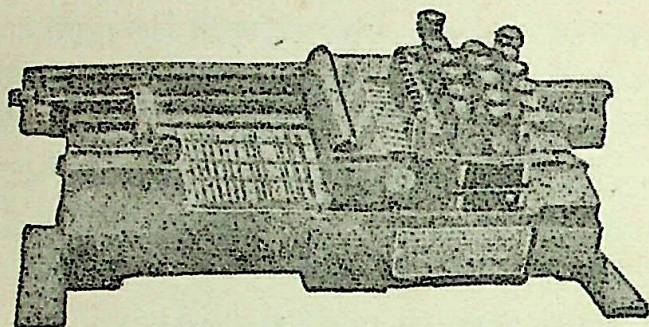
(१) हॉलेरिथ प्रणाली (Hollerith System)

(२) पावर्स-साम्स प्रणाली (Powers-Sams System)

(३) पैरामाउन्ट प्रणाली (Paramount System)

यांत्रिक सारणीयन की रीति
(Method of Mechanical Tabulation)

उपर्युक्त सभी प्रणालियों में समान आकार के कार्डों का प्रयोग किया जाता है जिनमें अनुसंधान द्वारा प्राप्त सूचनाओं के लिये छोटे छोटे गोल या चौकोर छिद्र बनाये जाते हैं। हॉलेरिथ प्रणाली में प्रयुक्त होने वाले कार्डों का आकार $7\frac{3}{8}'' \times 3\frac{1}{4}''$ होता है। प्रत्येक कार्ड में 0 से 9 तक के अंकों वाले 45 या 80 कॉलम (Fields) होते हैं। पावर्स-साम्स के कार्ड भी इसी आकार के होते हैं, किन्तु उनमें 45 से 90 तक कॉलम मुद्रित रहते हैं। पावर्स-साम्स के कुछ छोटे सारणीयन यंत्र भी होते हैं जिनमें 26 कॉलम वाले $2.0'' \times 4\frac{11}{16}''$ आकार के कार्डों का प्रयोग होता है। कार्डों का ऊपरी एक कोना साधारणतः तिरछा कटा रहता है। इसका अभिप्राय यह है कि यदि कोई कार्ड उल्टा रख जाय तो उसका तुरंत ही पता चल सके। पैरामाउन्ट प्रणाली में प्रयुक्त होने वाले कार्डों के चारो ओर के किनारों पर पहले से ही गोल छिद्र बने रहते हैं। जो छिद्र अपनी सूचनाओं से सम्बन्ध रखते हैं उन्हें किसी काटने वाले यंत्र से कुतर दिया जाता है। कार्डों में छिद्र करने के लिये जो यंत्र हॉलेरिथ व पावर-साम्स प्रणालियों में अपनाया जाता है उसे 'की-पंच' (Key Punch) कहते हैं। इसकी सहायता से एक मिनट में दो-सौ से

चार-सौ कार्डों में छिद्र किया जा सकता है। नीचे 'हॉलेरिथ की-पंच' का एक नमूना दिया जा रहा है :—

HOLLERITH KEY PUNCH

'की-पंच' से कार्डों में किस प्रकार छिद्र किये जाते हैं इसका स्पष्टीकरण निम्नलिखित उदाहरण द्वारा किया जा सकता है :—

Illustration 3 :—

On 18th April, 1958, 205 maunds of the commodity No. 349 has been sold to Customer No. 239 @ Rs. 22.25 per maund, the total amount of sales being Rs. 4,561.25. The Invoice No. of this sale is 7,069 and this transaction has been posted on Page No. 327 of the Ledger.

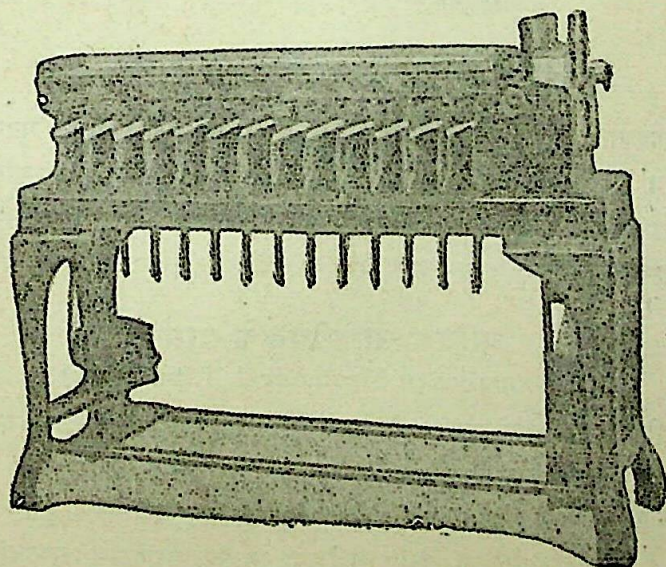
On the basis of the information given above, how would you punch a card for tabulation ?

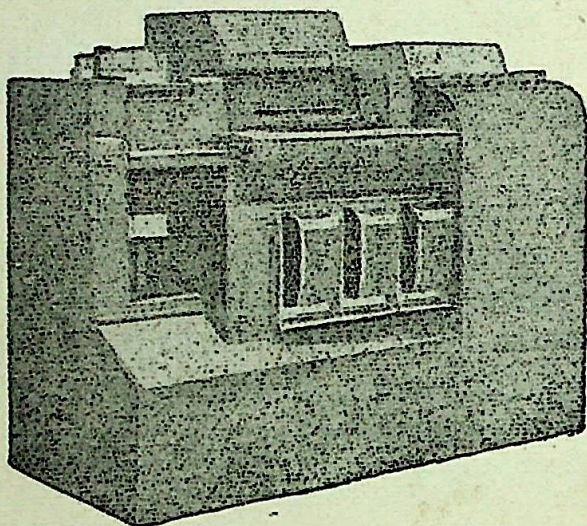
उपर्युक्त सूचनाओं के आधार पर कार्ड में इस प्रकार छिद्र किये जायेंगे (स्पष्टता के लिये केवल ३२ कॉलम ही दिखलाये गये हैं) :—

SALES ANALYSIS

DATE		MONTH		YEAR		CUSTOMER NO.			COMMODITY NO.			QUANTITY MAUNDS			RATE RS.		RATE NP.		AMOUNT RS.				AMOUNT NP.		INVOICE NO.				LEDGER FOLIO		
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	●	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	●	O	O	O	O	O
●	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	●	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	●	2	2	2	2	2	●	2	2	●	●	●	2	2	2	2	2	●	2	2	2	2	2	2	●	2
3	3	3	3	3	3	3	●	3	●	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	●	3	3
4	4	4	●	4	4	4	4	4	4	●	4	4	4	4	4	4	4	4	●	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	●	5	5	5	5	5	5	5	5	5	●	5	5	5	●	5	●	5	5	5	●	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	●	6	6	6	6	6	●	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	●	7	7	7	7	7	●
8	●	8	8	8	●	8	8	●	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	●	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	●	9	9	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32

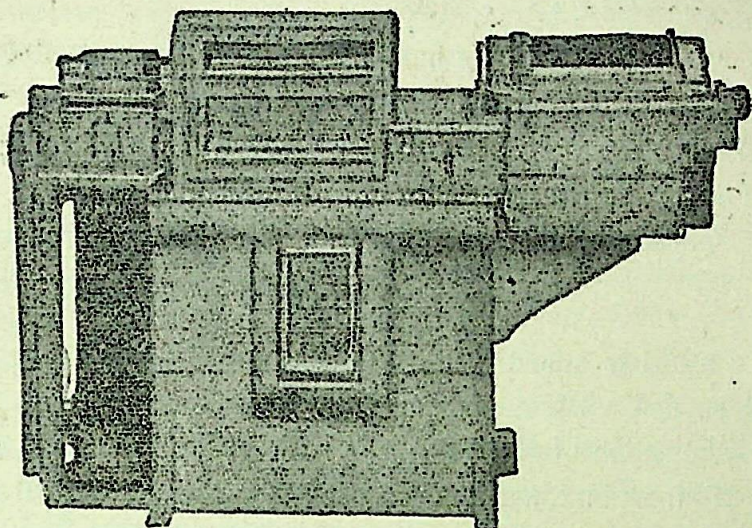
कार्डों में आवश्यक छिद्र करने के उपरान्त यह देखने की आवश्यकता होती है कि उनके सब छिद्र सही हैं अथवा नहीं। इसके लिये एक दूसरे यंत्र का प्रयोग किया जाता है जिसे 'जाँच करने वाला पंच' (Verifying Punch) कहते हैं। यह यंत्र कार्डों में छिद्र नहीं करता, बल्कि उन कार्डों को फँसा लेता है जिनके छिद्र गलत बने हैं। अतः इस बात की तुरन्त ही जानकारी हो जाती है कि किन कार्डों में छिद्रों का कटाव त्रुटिपूर्ण है। कभी कभी इन छिद्रों में एक लोहे की सलाख डाल कर भी देखा जाता है। यदि सलाख कार्डों की गड्डी के आर-पार नहीं हो जाती, तो जिस कार्ड में वह टकराती है उसे अशुद्ध समझना चाहिये। इस प्रकार का परीक्षण अधिकतर पैरामाउन्ट प्रणाली में किया जाता है।

यांत्रिक सारणीयन की तीसरी क्रिया कार्डों को विभिन्न गुणों के अनुसार छाँटना है। इसके लिये एक विद्युत-संचालित 'छाँटने वाले यंत्र' (Sorting Machine) को काम में लाया जाता है। इस यंत्र में कई खाने होते हैं। प्रत्येक गुण के लिये एक खाना निश्चित कर दिया जाता है। यंत्र कार्डों को उस गुण के अनुसार छाँट-छाँट कर इन खानों में डालता जाता है। हॉलेरिथ का कार्ड छाँटने वाला यंत्र एक घंटे में करीब 24,000 कार्ड तक छाँट सकता है। इस यंत्र का चित्र नीचे दिया जा रहा है :—

HOLLERITH SORTING MACHINE

छँटे हुये कार्डों को फिर **'सारणीयन-यंत्र'** (Tabulating Machine) में लगा दिया जाता है जो इच्छित सूचनाओं की सूची बना कर समान व असमान गुण वाले समंकों का योग निकालता जाता है। इस यंत्र द्वारा विभिन्न गुणों के योगों का कुल योग भी निकाला जा सकता है। यंत्र में कितने कार्डों का सारणीयन होता जा रहा है, इसकी सूचना भी लगातार मिलती जाती है। नीचे हॉलेरिथ सारणीयन-यंत्र का एक चित्र दिया जा रहा है :—

HOLLERITH TABULATING MACHINE

तत्पश्चात सारणीयन द्वारा उपलब्ध होने वाली सूचनाओं को **'मुद्रण करने वाले यंत्र'** (Printing Tabulator) की सहायता से अलग-अलग कागजों पर मुद्रित कर लिया जाता है। अगले पृष्ठ पर हॉलेरिथ के एक विद्युत-संचालित अड़तीस-कालम मुद्रित करने वाले यंत्र का चित्र दिखलाया गया है।

यांत्रिक सारणीयन के लाभ
(Advantages of Mechanical Tabulation)

यांत्रिक सारणीयन सांख्यिकीय क्षेत्रों में अत्यन्त ही लाभदायक व महत्व-पूर्ण समझा जाता है। न्यूनतम समय में जिस गति व शुद्धता के साथ ये यंत्र समंकों का वर्गीकरण व सारणीयन करते हैं, वह प्रशंसनीय है। गति व शुद्धता के साथ ही यांत्रिक रीति से किया गया सारणीयन सुव्यवस्थित व मितव्ययी भी होता है। यद्यपि यंत्रों के प्रतिस्थापन पर अत्यधिक व्यय करने

HOLLERITH 38-COLUMN PRINTING MACHINE

की आवश्यकता पड़ती है, फिर भी उनसे जो लाभ हमें प्राप्त होता है वह उस व्यय की तुलना में अधिक महत्वपूर्ण है। उन संस्थाओं में जहाँ सांख्यिकीय कार्यों की अधिकता होती है, इन यंत्रों का प्रयोग तो विशेषरूप से हितकर समझना चाहिये। यांत्रिक सारणीयन का एक लाभ यह भी है कि हम किसी भी स्तर पर अशुद्धियों की जाँच करके उनको दूर करने का प्रयास कर सकते हैं। भारतवर्ष में इन यंत्रों का प्रयोग अभी बहुत ही सीमित है। केवल कुछ बड़ी-बड़ी संस्थाओं में ही इनका प्रयोग किया जाता है।

प्रश्न

1. Write an essay on the process of collection and tabulation of statistical data.

सांख्यिकीय समंकों के वर्गीकरण व सारणीयन की विधि पर एक लेख लिखिये।

(बी० ए०, ट्रावनकोर, १९५४)

2. "Classification is the process of arranging things (either actually or notionally) in groups or classes according to their resemblances and affinities giving expression to the unity of attributes that may subsist amongst a diversity of individuals".

Elucidate the above statement.

"वर्गीकरण वस्तुओं को संभागों या वर्गों में उनकी समानता व एकरूपता के अनुसार अनुविन्यसित करने (वास्तव में या भावानुसार) की एक विधि है जिससे व्यक्तिगत असमानताओं के बीच उपलब्ध होने वाली समान गुण की इकाइयों को प्रकट किया जाता है।

उपर्युक्त कथन की व्याख्या कीजिये।

(बी० कॉम० इलाहाबाद, १९४७)

3. How would you proceed to classify the observations made, and what points will you take into consideration in tabulating them ? Mention the kinds of tables generally used.

किसी अनुसंधान द्वारा उपलब्ध अवलोकनों का वर्गीकरण करने के लिये आप किस तरह अग्रसर होंगे तथा उनका सारणीयन करते समय किन बातों का ध्यान रखेंगे ? साधारणतः जितनी प्रकार की सांख्यिकीय सारणियों का प्रयोग होता है उनका उल्लेख कीजिये।

(बी० कॉम०, आगरा, १९४१)

4. Exaplain the purpose of 'Tabular Presentation' of the statistical data. Draft a form of tabulation to show the distribution of population according to community by age, sex and married status

सांख्यिकीय समंकों के 'सारणीयन' के उद्देश्य की व्याख्या कीजिये। किसी स्थान के जन-समुदाय का उम्र, लिंग तथा वैवाहिक स्थिति के अनुसार वितरण दिखलाने के लिए एक सारणी का प्रारूप बनाइये।

(बी० कॉम०, राजपूताना, १९५५)

5. What precautions would you take in tabulating your data ? Prepare a blank table to show the distribution of population according to sex and four religions, in five age—groups, in seven important cities of U. P.

अपने समंकों का सारणीयन करते समय आप किन बातों का ध्यान रखेंगे ? यू० पी० के सात प्रमुख शहरों में लिंग, चार धर्म व पाँच वय-वर्गों के अनुसार

जनसंख्या का वितरण प्रदर्शित करने के लिये एक रिक्त सारणी का निर्माण कीजिये ।

(बी० कॉम०, बनारस, १९५०)

6. "Either for one's own use or for the use of others, the data must be presented in some suitable form". Comment on this statement, and discuss the functions and importance of tabulation in a scheme of investigation. What points should be taken into consideration in tabulating statistical data ?

"या तो अपने या दूसरों के प्रयोग के लिये समंकों का किसी उपयुक्त प्रारूप में प्रदर्शित किया जाना आवश्यक है ।" इस कथन की समीक्षा कीजिये, और किसी अनुसंधान कार्य में सारणीयन के कार्यों व महत्वों का वर्णन कीजिये । समंकों का सारणीयन करते समय किन बातों का ध्यान रखना चाहिये ।

(बी० कॉम०, आगरा, १९५५)

7. Discuss the functions and importance of tabulation in a scheme of investigation.

Prepare blank tables, showing the distribution of students of a college according to age, class and residence for arranging (a) Physical Training, and (b) Tutorial Classes.

किसी अनुसंधान-योजना में सारणीयन के कार्यों व महत्वों का वर्णन कीजिये । एक महाविद्यालय के विद्यार्थियों की (अ) शारीरिक शिक्षा व (ब) शिक्षण वर्गों की व्यवस्था उम्र, कक्षा तथा निवास-स्थान के अनुसार करने के लिये रिक्त तालिकाओं का निर्माण कीजिये ।

(बी० कॉम०, आगरा, १९४२)

8. You are given a statistical table. What questions would you ask before accepting it ? Draft a form of tabulation to show :—

(*a*) Sex; (*b*) Three ranks—Supervisors, assistants, and clerks; (*c*) Years 1918 and 1943; (*d*) Age-groups :—18 years and under, Over 18 but less than 55 years, Over 55 years.

आप को एक सांख्यिकीय सारिणी दी जाती है। उसे स्वीकृत करने के पूर्व आप किन शंकाओं को उपस्थिति करेंगे ? निम्न सूचनायें प्रदर्शित करने के लिये एक सारिणी का निर्माण कीजिये :—

(अ) लिंग; (ब) तीन पद—निरीक्षक, सहायक, व लिपिक; (स) 1918 व 1953 वर्ष; (द) वय-वर्ग :—18 वर्ष व उससे कम, 18 वर्ष से अधिक किन्तु 55 वर्ष से कम, 55 वर्ष से अधिक।

(बी॰ ए॰, मद्रास, १९५३)

9. Define Frequency Distribution. State the principles to be observed in its formation.

The following is a record of weights of 70 students (in lbs.). Tabulate the data in the form of Frequency Distribution, taking the lowest class as (60—69) :—

आवृत्ति-वितरण की परिभाषा दीजिये। उसके निर्माण में प्रयुक्त होने वाले सिद्धान्तों का उल्लेख कीजिये।

नीचे 70 विद्यार्थियों की वजन (पौंड में) दी गई है। इन समंकों का न्यूनतम वर्ग (60–69) लेकर इनका सारणीयन एक आवृत्ति-वितरण के रूप में कीजिये :—

61	73	93	107	112	76	78	69	96	72
80	88	96	109	103	84	84	106	91	75
91	92	102	91	101	90	77	105	90	86
113	101	114	72	77	118	95	63	99	82
100	106	87	89	92	107	111	76	83	86
106	107	62	94	73	108	115	85	98	93
109	97	74	98	67	82	104	88	88	92

(बी॰ ए॰, ट्रावनकोर, १९५४)

10. Explain the procedure for processing any raw data into a Frequency Table. In particular, how would you fix the magnitude and centre of class-intervals ?

The following is the record of marks obtained by 90 candidates in an examination. Form a Frequency Distribution :—

सांख्यिकीय समंकों से आवृत्ति-सारिणी बनाने की प्रक्रिया का वर्णन कीजिये । मुख्यत:, वर्गान्तरों के विस्तार व केन्द्र को आप किस प्रकार निर्धारित करेंगे ?

नीचे किसी परीक्षा में 90 विद्यार्थियों के प्राप्तांक दिये गये हैं । आवृत्ति-वितरण का निर्माण कीजिये :—

84	91	58	72	44	87	76	43	83	40	73	86	77
75	73	71	54	46	55	43	33	76	95	65	74	50
65	80	57	73	36	33	91	53	63	69	47	29	37
11	82	40	27	84	53	19	35	72	44	19	51	67
58	76	38	16	37	74	46	50	18	59	27	92	13
45	61	86	39	78	23	12	71	62	22	41	38	27
66	51	29	63	47	39	19	22	35	39	80	37	

(बी० ए०, मद्रास, १९५३)

11. Arrange the following marks in a Frequency Table, taking the lowest class-interval as (10—20; :—

निम्नलिखित प्राप्तांको को न्यूनतम वर्गान्तर (10-20) लेकर एक आवृत्ति वितरण में अनुविन्यसित कीजिये :—

3	84	61	87	43	72	62	78	69	47
81	84	59	76	33	29	57	49	51	69
58	81	58	43	76	43	64	55	22	63
81	87	57	83	95	85	70	64	78	53
85	67	75	40	73	42	95	92	80	91
75	65	72	73	65	80	57	73	36	33
61	62	84	86	77	75	74	73	70	69
70	62	91	73	72	85	50	96	85	30

(बी० ए०, आंध्र, १९५४)

12. What precautions should be taken in tabulation of data? Point out the mistakes made in the following blank table drawn to show the distribution of population according to sex, age, and literacy :—

समंकों का सारणीयन करते समय किन बातों का ध्यान रखना चाहिये ? निम्न सारणी में अशुद्धियों की ओर संकेत कीजिये, जो जनसंख्या का वितरण लिंग, उम्र तथा साक्षरता प्रदर्शित करने के लिये बनाई गई है :—

Sex	0 to 25		25 to 50		50 to 75		75 to 100	
	Literate	Illiterate	Literate	Illiterate	Literate	Illiterate	Literate	Illiterate
Males								
Females								

(बी० कॉम०, लखनऊ, १९३७)

13. Re-arrange the following blank table with a view to make it more intelligible :—

निम्नलिखित रिक्त सारिणी में विशेष स्पष्टता लाने के लिये उसका पुनः विन्यसन कीजिये :—

Sex	Brahmin		Rajput		Vaishya		Harijan	
	Literate	Illiterate	Literate	Illiterate	Literate	Illiterate	Literate	Illiterate
Male								
Female								

(बी० कॉम०, इलाहाबाद, १९४०)

14. The State of Rajputana had only one city with population of a lakh and over in 1921 and 1931. It was Jaipur. In 1941, two more cities—Jodhpur and Bikaner—were added. 1951 was no further additions. It is significant that in 1941

the two new cities had identical population which was exactly the same as that of Jaipur twenty years ago. The total population of three cities in 1941 was 430 thousand, of which about 40% (the true figure being 1,76,000) was accounted for by Jaipur alone, the remainder being shared equally by the other two cities. In 1941, while Jaipur and Jodhpur added respectively 26,000 and 32,000 to their 1931 numbers, the addition in the case of Bikaner was much larger, being 15 thousand more than that in Jaipur. In 1921, the combined population of Jaipur and Jodhpur was just two lakhs and Bikaner had four thousand souls less than Jodhpur. The effect of events like partition and integration of states on the size of these cities was reflected in 1951 census figures. In that year, as compared with 1941, Bikaner registered a decline of 10,000 persons, Jodhpur an increase of 47,000 souls, and Jaipur an increase which was only two thousand less than the total population of Bikaner in 1951, or which was five times the increase Jaipur registered between 1921 and 1931. It will be seen that during the thirty years intervening 1921 and 1951, the growth of population in Bikaner was only 48,000 while that in Jodhpur was 1,01,000 and that in Jaipur higher still—164 thousand. It will also be seen that while Jaipur continued to enjoy the distinction of being Rajsthan's city No. 1, Bikaner, which occupied the 2nd place in 1941 along with Jodhpur, gave that place to Jodhpur in 1951 and got relegated to the third.

From the above account, prepare a table showing the population of the three cities for the different census years.

1921 तथा 1931 में राजपूताना-राज्य में केवल एक ही नगर ऐसा था जिसकी जनसंख्या एक लाख से अधिक थी। यह नगर जयपुर था। 1941 में दो नगर–जोधपुर और बीकानेर–इस श्रेणी में और सम्मिलित हुए। 1951 में फिर और कोई सम्मिलित नहीं हुआ। यह एक महत्वपूर्ण बात थी कि 1941 में सम्मिलित होने वाले दोनों नगरों की जनसंख्या समान थी तथा ठीक

उतनी ही थी जितनी जयपुर की बीस वर्ष पूर्व थी। 1941 में तीनों नगरों की कुल जनसंख्या 430 हजार थी, जिसमें करीव 40% (शुद्ध जनसंख्या 1,76,000) केवल जयपुर की थी, शेष जनसंख्या दोनों नगरों में समान रूप से बँटी थी। 1941 में जयपुर तथा जोधपुर की जनसंख्या क्रमशः 1931 की अपेक्षा 26,000 तथा 32,000 से बढ़ी थी, किन्तु बीकानेर की जनसंख्या में जयपुर की जनसंख्या में होने वाली वृद्धि से करीब 15,000 अधिक की वृद्धि हुई थी। 1921 में जयपुर और जोधपुर की सम्मिलित जनसंख्या ठीक दो लाख थी और बीकानेर में जोधपुर की अपेक्षा चार हजार व्यक्ति कम थे। 1951 की जनगणना में देश के विभाजन व राज्य-संगठन जैसी घटनाओं का प्रभाव इन नगरों के आकार पर दिखलाई पड़ा। 1941 की अपेक्षा उस वर्ष बीकानेर में 10,000 व्यक्तियों की कमी, जोधपुर में 47,000 व्यक्तियों की वृद्धि तथा जयपुर में बीकानेर की 1951 की कुल जनसंख्या से दो हजार कम की, अथवा जयपुर की जो जन-वृद्धि 1921 व 1931 के मध्य हुई थी, उसके पाँच-गुने के बराबर की वृद्धि दिखलाई पड़ी। देखने से यह स्पष्ट होगा कि 1921 तथा 1951 के मध्य के तीस वर्षों में, बीकानेर में 48,000 जोधपूर में 1,01,000 तथा जयपुर में इससे भी अधिक 164 हजार की जन-वृद्धि हुई। यह भी ज्ञात होता है कि जब जयपुर आज भी राजस्थान का प्रथम नगर होने का गौरव प्राप्त कर रहा है, बीकानेर, जो जोधपुर के समान ही 1941 में द्वितीय स्थान प्राप्त कर रहा था, 1951 में यह स्थान उसे देकर स्वयं तीसरे स्थान पर पहुँच जाता है।

उपर्युक्त वर्णन से एक सारणी का निर्माण कीजिए जो विभिन्न जनगणना वाले वर्षों में तीनों नगरों की जनसंख्या प्रदर्शित करे।

(एम० कॉम०, राजस्थान, १९५२)

उत्तर :—

POPULATION OF JAIPUR, JODHPUR & BIKANER IN 1921, 1931, 1941 AND 1951

Year	Jaipur	Jodhpur	Bikaner	Total
1921	1,27,000	73,000	69,000	2,69,000
1931	1,50,000	95,000	86,000	3,31,000
1941	1,76,000	1,27,000	1,27,000	4,30,000
1951	2,91,000	1,74,000	1,17,000	5,82,000

15. Present the data given in the following paragraph in the form of a table, so as to bring out clearly all the facts, indicating the source and bearing a suitable title :—

According to the Census of Manufactures Report, 1945, the John Smith Manufacturing Company employed 400 non-union and 1,250 union employees in 1941. Of these, 220 were females of which 140 were non-union. In 1942, the number of union employees increased to 1,475 of which 1,300 were males. Of the 250 non-union employees, 200 were males. In 1943, 1,700 employees were union-members and 50 were non-union. Of all the employees in 1943, 250 were females of which 240 were union-members. In 1944, the total number of employees was 2,000 of which one per cent were non-union. Of all the employees in 1944, 300 were females of which only 5 were non-union.

निम्नलिखित पैराग्राफ में दिये गये समंकों का एक सारणी द्वारा प्रदर्शन कीजिये जिससे सभी तथ्य स्पष्ट हो सकें। साथ ही उनके स्रोत का संकेत करते हुये एक उपयुक्त शीर्षक भी दीजिये :—

1945 की उत्पादन-गणना की रिपोर्ट के अनुसार जॉन स्मिथ कम्पनी ने 1941 में 400 गैर-संघी तथा 1,250 संघी कर्मचारियों को नौकरी दी। इन कर्मचारियों में 220 स्त्रियाँ थीं जिनमें 140 गैर-संघी थीं। 1942 में संघी सदस्यों की संख्या बढ़कर 1,475 हो गई, जिसमें 1,300 पुरुष थे। 250 गैर-संघी कर्मचारियों में 200 पुरुष थे। 1943 में 1,700 कर्मचारी संघी तथा केवल 50 गैर-संघी थे। 1943 में कुल जितने सदस्य थे उनमें 250 स्त्रियाँ थीं जिनमें 240 संघी सदस्य थीं। 1944 में कुल कर्मचारियों की संख्या 2,000 थी, जिसमें एक प्रतिशत गैर-संघी कर्मचारी थे। 1944 के कुल कर्मचारियों में 300 स्त्रियाँ थीं जिनमें केवल 5 ही गैर-संघी थीं।

उत्तर :—

TABLE SHOWING THE EMPLOYEES OF THE JOHN SMITH MANUFACTURING CO., ACCORDING TO SEX & TRADE-UNION MEMBERSHIP

Year	Union-members			Non-union			Total		
	Males	Females	Total	Males	Females	Total	Males	Females	Total
1941	1,170	80	1,250	260	140	400	1,430	220	1,650
1942	1,300	175	1,475	200	50	250	1,500	225	1,725
1943	1,460	240	1,700	40	10	50	1,500	250	1,750
1944	1,685	295	1,980	15	5	20	1,700	300	2,000

16. Prepare a table with proper title, division and sub-divisions to represent the following heads of information :—

(*a*) Export of Cotton piece-goods from India ; (*b*) To Burma, China, Java, Iran, Iraq ; (*c*) Quantity of piece-goods to each country ; (*d*) Value of piece-goods to each country ; (*e*) From 1939-40 to 1945-46, year by year ; (*f*) Total quantity exported each year ; (*g*) Total value of exports each year.

निम्न सूचनाओं को प्रस्तुत करने के लिये यथोचित शीर्षक, विभाग तथा उप-विभाग दिखलाते हुये एक सारणी का निर्माण कीजिये :—

(अ) भारत से सूती कपड़ों का निर्यात; (ब) बर्मा, चीन, जावा, इरान तथा इराक को; (स) प्रत्येक देश को भेजे जाने वाले कपड़े का परिमाण; (द) प्रत्येक देश को भेजे जाने वाले कपड़े का मूल्य; (इ) 1939-40 से 1945-46 तक, वर्ष प्रति वर्ष; (क) प्रति वर्ष निर्यात का कुल परिमाण; (च) प्रति वर्ष निर्यात का कुल मूल्य।

(एम० कॉम०, इलाहाबाद, १९४६)

17. Write a short essay on 'Mechanical Tabulation'.

'यांत्रिक सारणीयन' पर एक संक्षिप्त निबन्ध लिखिये।

अध्याय ७

समंकों का विन्दुरेखीय प्रदर्शन

(Graphic Presentation of Statistics)

(विन्दुरेखीय प्रदर्शन का महत्व—विन्दुरेखीय प्रदर्शन के लाभ—विन्दुरेखीय प्रदर्शन के दोष—रेखाचित्र की बनावट—रेखाचित्र बनाने के नियम—मापदण्ड के भेद—प्राकृतिक मापदण्ड के रेखाचित्र—कालान्तर अथवा ऐतिहासिक माला के रेखाचित्र—निरपेक्ष कालिक चित्र—सापेक्ष कालिक चित्र—असत्य आधार रेखा—एक से अधिक कालान्तर मालाओं का प्रदर्शन—आयात, निर्यात व व्यापार के अन्तर का रेखाचित्र—दो मापदण्डों के रेखाचित्र—अधिकतम व न्यूनतम मूल्यों के रेखाचित्र—पट्टीदार वक्र—आवृत्ति-वितरण के रेखाचित्र—विच्छिन्न माला का विन्दुरेखीय प्रदर्शन—अविच्छिन्न माला का विन्दुरेखीय प्रदर्शन—आवृत्ति-चित्र—असमान वर्गान्तरों के आवृत्ति-चित्र—आवृत्ति-बहुभुज—आवृत्ति-वक्र—आवृत्ति-वक्र के भेद—अनुपात-मापदण्ड के रेखाचित्र—अनुपात-मापदण्ड पर रेखाचित्र बनाने की रीतियाँ—अनुपात के आधार पर निर्मित विन्दुरेखीय पत्र—लघुगणक द्वारा अनुपात-मापदण्ड की रचना—अनुपात-मापदण्ड के रेखाचित्रों का निर्वचन—अनुपात-मापदण्ड के रेखाचित्रों का उपयोग—अनुपात-मापदण्ड के दोष—प्रश्न)

विन्दुरेखीय प्रदर्शन का महत्व

(Importance of Graphic Presentation)

सांख्यिकीय समंक इतने विशाल तथा जटिल होते हैं कि उन्हें सरलतापूर्वक समझना सर्वसाधारण के लिये कठिन होता है। यद्यपि वर्गीकरण व सारणीयन द्वारा उनकी विशालता को घटा कर उनमें सरलता लाने का प्रयत्न किया जाता है, फिर भी उनकी विशेषताओं का पूर्णरूप से स्पष्टीकरण नहीं हो पाता। वास्तव में मनुष्य-प्रकृति ही कुछ ऐसी है कि वह क्लिष्ट आंकिक तथ्यों में विशेष रुचि नहीं रखती। अतएव यदि समंकों का प्रदर्शन रेखाओं (Lines) व वक्रों (Curves) द्वारा किया जाता है तो उन्हें केवल समझने में ही सुविधा नहीं होती बल्कि उनकी प्रमुख विशेषताओं को बिना मस्तिष्क

पर जोर दिये ही याद रक्खा जा सकता है।* रेखाचित्रों की सहायता से कालान्तर-मालाओं (Time Series) व आवृत्ति-वितरणों (Frequency Distributions) का अत्यन्त सफलतापूर्वक अध्ययन किया जा सकता है।

विन्दुरेखीय प्रदर्शन के लाभ
(Advantages of Graphic Presentation)

(१) आकर्षक, दिलचस्प एवं सफल प्रभाव (Attractive, interesting and effective impression)—चित्रों में एक ऐसा आकर्षण होता है कि साधारण व्यक्ति भी उनकी ओर प्रभावित हो जाता है। मनोवैज्ञानिकों का भी यह कथन है कि चित्रों में एक ऐसी शक्ति है जो दर्शकों के मन में एक भावना उत्पन्न करती है कि वे उनका अवलोकन करें तथा उनके द्वारा प्रदर्शित विशेषताओं को समझने की चेष्टा करें। विन्दुरेखीय प्रदर्शन केवल आकर्षक व दिलचस्प ही नहीं होता बल्कि उसमें इतनी प्रभावोत्पादकता होती है कि हम उसके द्वारा प्रस्तुत समंकों की सापेक्ष महत्ता भलीभांति याद भी रख सकते हैं।

(२) समंकों की विशेषतायें समझने में सुविधा (Ease in understanding the characteristics of data)—रेखाओं व वक्रों की सहायता से समंकों की विशेषतायें शीघ्रतापूर्वक तथा बिना किसी कठिनाई के समझी जा सकती हैं। गणित में विशेष रुचि रखने वाले व्यक्तियों के लिये तो सारणियों में अनुविन्यसित किये गये समंक बड़े महत्व के हैं किन्तु साधारण व्यक्ति उनका लाभ नहीं उठा सकते। फिर सारणियों में दिये गये समंकों को देखकर उनकी प्रवृत्ति (Tendency) व उच्चावचनों (Fluctuations) का सरलतापूर्वक अध्ययन नहीं किया जा सकता। इस दिशा में विन्दुरेखीय प्रदर्शन अत्यन्त लाभप्रद सिद्ध होता है।

(३) समंकों का एक ही दृष्टि में दृष्टिगोचर हो जाना (Data visible at a glance)—विन्दुरेखीय प्रदर्शन का एक लाभ यह भी है कि हम एक ही दृष्टि में सभी आँकड़ों का अध्ययन कर सकते हैं। यद्यपि वर्गीकरण व सारणीयन द्वारा समंकों की विशेषताओं को अलग-अलग प्रदर्शित करने का

---

*The wandering of a line is more powerful in its effect on the mind than a tabulated statement; it shows what is happening, and what is likely to take place, just as quickly as the eye is capable of working—**Boddington.**

प्रयत्न किया जाता है किन्तु उन्हें एक ही दृष्टि में नहीं देखा जा सकता, क्योंकि उनमें इतने अधिक कॉलम, शीर्षक व उप-शीर्षक होते हैं कि उनका अध्ययन करने के लिये हमें सूक्ष्म दृष्टि डालने की आवश्यकता पड़ती है। उदाहरण के लिये यदि हम यह जानने का प्रयास करें कि पिछले पचास वर्षों में भारतवर्ष की जनसंख्या का क्या रुख था, तो इसके लिये हमें जनसंख्या प्रदर्शित करने वाली तालिकाओं का विधिवत अध्ययन करना पड़ेगा, जबकि एक साधारण रेखाचित्र द्वारा एक ही दृष्टि में हम अपनी जनसंख्या का रुख देख सकते हैं।

(४) समय और श्रम की बचत (Saving of time and energy)—विन्दुरेखीय प्रदर्शन अधिकांश सांख्यिकीय रीतियों से सरल है, अतः सांख्यिक के बहुमूल्य समय व श्रम की बचत होती है। साथ ही दर्शकों के समय व श्रम की भी अत्यधिक बचत होती है। उदाहरण के लिये व्यापारियों को यह हमेशा जानते रहने की आवश्यकता रहती है कि उनके क्रय, विक्रय, लागत, लाभ, आदि की क्या दशा है। आँकड़ों के बजाय यदि इनका प्रदर्शन रेखाओं व वक्रों द्वारा करके उनके सामने प्रस्तुत किया जाय तो वे सरलतापूर्वक इनकी गति-विधि का अध्ययन कर सकते हैं। इससे उनके बहुमूल्य समय व श्रम की बचत होती है जिसका प्रयोग वे अन्य कार्यों में कर सकते हैं। इसी प्रकार तापक्रम के रेखाचित्रों को देख कर चिकित्सक एक क्षण में ही जान जाता है कि रोगियों की दशा में क्या परिवर्तन हुआ है।

(५) तुलनात्मक अध्ययन में सुविधा (Ease in comparing data)—रेखाओं व वक्रों से समंकों के तुलनात्मक अध्ययन में बड़ी सुविधा होती है। साधारण आंकड़ों का बिना विश्लेषण किये यह कहना कठिन होता है कि दो देशों की राष्ट्रीय आय, जनसंख्या, आयात-निर्यात अथवा किसी वस्तु के उत्पादन में क्या अन्तर है, किन्तु इनके रेखाचित्र हमें बड़ी सरलता से इन समस्याओं का तुलनात्मक अध्ययन करने का अवसर देते हैं। रेखाचित्र द्वारा समंक-मालाओं के सहसम्बन्ध (Correlation) पर भी प्रकाश डाला जा सकता है।

(६) समंकों के आन्तरगणन, बाह्यगणन व पूर्वानुमान में सुविधा (Ease in interpolation, extrapolation and forecasting)—रेखाचित्रों की सहायता से आन्तरगणन, बाह्यगणन व पूर्वानुमान शीघ्रतापूर्वक किया जा सकता है। जनसंख्या प्रदर्शित करने वाले वक्र से हम किसी भी वर्ष की जनसंख्या का अनुमान कर सकते हैं। वक्र के उच्चावचनों का विश्लेषण करके हम किसी समंक-माला की दीर्घकालीन या अल्पकालीन प्रवृत्ति भी जान सकते

हैं। वक्रों की सहायता से मध्यका (Median), चतुर्थांश (Quartiles) तथा भूयिष्ठक (Mode) आदि का भी अनुमान लगाया जा सकता है।

उपर्युक्त लाभों के कारण ही विन्दुरेखीय प्रदर्शन का महत्व दिन प्रति दिन बढ़ता जा रहा है। उन सभी क्षेत्रों में जहाँ आंकिक-तथ्य उपलब्ध होते हैं विन्दुरेखीय प्रदर्शन का सफलतापूर्वक प्रयोग किया जा सकता है। इस संबंध में नेशनल ब्यूरो ऑफ स्टैंडर्ड्स (National Bureau of Standards) के अधिकारी मि० हब्बर्ड के विचार उल्लेखनीय हैं।*

विन्दुरेखीय प्रदर्शन के दोष
(Defects of Graphic Presentation)

विन्दुरेखीय प्रदर्शन के प्रमुख दोष निम्न हैं :—

(१) रेखायें व वक्र समंकों के उच्चावचनों का ही प्रदर्शन करते हैं, अतः उनकी शुद्धता की जानकारी नहीं हो पाती। वक्रों द्वारा हम यह नहीं जान सकते कि उन समंकों का वास्तविक मूल्य क्या है, विशेषतः उस समय जब समंकों का विशाल आकार रहा हो।

(२) रेखाचित्रों में मापदण्ड के परिमाण में थोड़ा परिवर्तन करने से वक्रों के उच्चावचनों में अत्यधिक अन्तर पड़ जाता है, जिसे समझना साधारण व्यक्तियों के लिए कठिन होता है। अतः इस दोष की आड़ में पक्षपाती व स्वार्थी व्यक्ति रेखाचित्रों का दुरुपयोग भी कर सकते हैं।

(३) रेखाचित्र किसी बात की पुष्टि के लिये उद्धरण (Quotation) के रूप में नहीं दिये जा सकते।

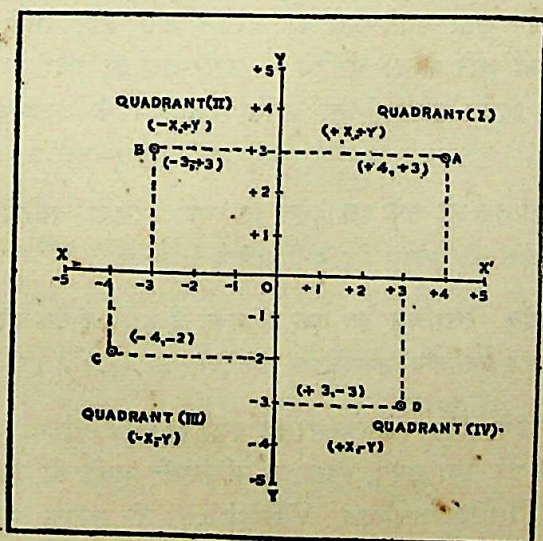
---

*We may portray by simple graphic methods whole masses of intricate routine, the organization of an enterprize, or the plan of a campaign. Graphs serve as storm signals for the Manager, Statesman, Engineer; as potent narratives for the Actuary, Statist, Naturalist; and as forceful engines of research for Sciences, Technology and Industry.

Graphs are dynamic, dramatic. They may epitomise an epoch, each dot a fact, each slope an event, each curve a history. Wherever there are data to record, inferences to draw, or facts to tell, graphs furnish the unrivalled means whose power we are just beginning to realise and apply—**Hubbard.**

रेखाचित्र की बनावट (Construction of a Graph)

साधारणतः रेखाचित्र विन्दुरेखीय पत्र (Graph Paper) पर बनाये जाते हैं। इस पत्र में बारीक रेखायें होती हैं जो प्रत्येक इंच को दस समान भागों में विभक्त करती हैं। कुछ विन्दुरेखीय पत्रों में गणन की सुविधा के लिये मोटी-पतली अथवा लाल व नीली रेखाओं का भी प्रयोग किया जाता है। रेखाचित्र बनाते समय किसी भी कटान-विन्दु (Intersecting Point) को मूल-विन्दु या शून्य-विन्दु (Origin) मान लिया जाता है और उस पर नीचे से ऊपर तथा बायें से दायें दो रेखायें लम्बवत (Perpendiculars) डाल ली जाती हैं। इस प्रकार सम्पूर्ण विन्दुरेखीय पत्र चार भागों में विभक्त हो जाता है, जिन्हें चरण (Quadrants) कहा जाता है। बाईं ओर से दाईं ओर जाने वाली रेखा (Horizontal Line) को भुजाक्ष (Abscissa) तथा नीचे से ऊपर की ओर जाने वाली रेखा (Vertical Line) को कोटि-अक्ष (Ordinate) कहते हैं। रीत्यानुसार भुजाक्ष के लिये य य' (XX') तथा कोटि-अक्ष के लिये र र' (Y Y') संकेतों का प्रयोग किया जाता है।

विन्दुरेखीय पत्र पर प्रत्येक विन्दु को प्रांकित (Plot) करने के लिये दो मूल्यों की—य-मूल्य तथा र-मूल्य (X-Variable and Y-Variable)—की आवश्यकता पड़ती है। चूँकि ये मूल्य धनात्मक (+) व ऋणात्मक (—) दोनों कोटियों के हो सकते हैं, इसलिये इनको प्रांकित करने की अलग-अलग व्यवस्थायें करनी पड़ती हैं।

उपर्युक्त चित्र में चार विन्दुओं (+4, +3), (−3, +3), (−4, −2) तथा (+3, −3) को प्रांकित करके दिखलाया गया है। इन दिये हुये मूल्यों में प्रथम मूल्य य (X) तथा द्वितीय मूल्य र (Y) के संकेत हैं।

इस चित्र के क्रमशः A, B, C व D विन्दुओं को देखने से यह स्पष्ट हो जाता है कि य व र के मूल्य धनात्मक व ऋणात्मक होने पर उनका प्रदर्शन विन्दुरेखीय पत्र के किस चरण में करना चाहिए। सांख्यिकी में उपलब्ध होने वाले दोनों मूल्य अधिकतर धनात्मक होते हैं, इसलिये विन्दु-रेखीय पत्र के बाईं ओर नीचे के कोने में शून्य-विन्दु लेकर केवल प्रथम चरण का ही प्रयोग किया जाता। साधारणतः समय, स्थान व परिस्थिति से सम्बन्धित समंको को जिन्हें स्वतंत्र-चल (Independent Variables) कहते हैं OX पर, तथा मूल्य, आय, जनसंख्या, उत्पादन, आदि से सम्बन्धित समंकों को जिन्हें परतंत्र-चल (Dependent Variables) कहते हैं OY पर दिखलाया जाता है।

रेखाचित्र बनाने के नियम (Rules for constructing Graphs)

समंकों का विन्दुरेखीय प्रदर्शन करते समय निम्नलिखित नियमों का ध्यान रखना आवश्यक है :—

(१) साधारणतः रेखाचित्रों की बनावट बाईं ओर से दाहिनी ओर को बढ़नी चाहिये। अतः कोटि-अक्ष का प्रदर्शन बाईं ओर तथा भुजाक्ष का प्रदर्शन नीचे की ओर करना चाहिये। कोटि-अक्ष का प्रदर्शन यदि दाहिनी ओर भी कर दिया जाता है तो उससे रेखाचित्र के अध्ययन में विशेष सुविधा होती है।

(२) जहाँ तक हो सके इस बात का ध्यान रखना चाहिये कि भुजाक्ष लगभग कोटि-अक्ष की अपेक्षा डेढ़ गुनी अधिक लम्बी हो।

(३) प्रत्येक रेखाचित्र का एक उपयुक्त व पूर्ण शीर्षक होना चाहिये। आवश्यकता पड़ने पर अन्य उप-शीर्षक भी दिये जा सकते हैं।

(४) समंकों के परिमाण अथवा परतंत्र चलों (Dependent Variables) को कोटि-अक्ष पर तथा समय, स्थान या परिस्थिति आदि की इकाइयाँ अथवा स्वतंत्र चलों (Independent Variables) को भुजाक्ष पर दिखलाना

चाहिये। किन्तु दोनों के लिये एक समान मापदण्ड (Scale) लेना आवश्यक नहीं है।

(५) रेखाचित्र का मापदण्ड इस ढंग से चुनना चाहिये कि वह समंकों के आकार का अधिक से अधिक प्रदर्शन कर सके। साधारणतः मापदण्ड का निर्धारण विन्दुरेखीय पत्र (Graph Paper) के आधार पर निर्भर रहता है। यह ध्यान रखना चाहिये कि रेखाचित्र न तो बहुत बड़ा हो और न बहुत छोटा क्योंकि पहली दशा में सभी उच्चावचन एक ही दृष्टि में नहीं पाते और दूसरी दशा में उनका स्पष्ट प्रदर्शन नहीं हो पाता। साथ ही इस बात का भी ध्यान रहे कि रेखाचित्र विन्दुरेखीय पत्र के बिल्कुल मध्य में हो।

(६) मापदण्ड लेते समय इस बात का पूरा-पूरा ध्यान रखना चाहिये कि कोटि-अक्ष का पूर्णरूप से प्रदर्शन हो सके। यदि सम्पूर्ण कोटि-अक्ष का प्रदर्शन कठिन प्रतीत होता हो तो असत्य आधार रेखा (False Base Line) का प्रयोग किया जा सकता है। किन्तु मूल-विन्दु, अर्थात 0 का प्रदर्शन हर दशा में अनिवार्य है।

(७) मापदण्ड प्रदर्शित करने वाले मूल्यों का प्रदर्शन भुजाक्ष के नीचे और कोटि-अक्ष के बगल में करना चाहिये।

(८) जब रेखाचित्र अनुपात या लघुगणक मापदण्ड (Ratio or Logarithmic Scale) पर बनाया जा रहा हो तो कोटि-अक्ष पर उनके लघुगणक का प्रदर्शन करने के साथ ही उन मूल्यों का भी प्रदर्शन कर देना चाहिये जिनके वे लघुगणक हैं।

(९) फिर रेखाचित्र के अध्ययन की सुविधा के लिये भुजाक्ष व कोटि-अक्ष के मापदण्डों का आधार भी उसके किसी विशिष्ट भाग में सूचित किया जाना बहुत आवश्यक है।

(१०) अधिक परिशुद्ध व विस्तृत अध्ययन के लिये रेखाओं व वक्रों के साथ ही वास्तविक समंकों का भी प्रदर्शन कर देना चाहिये।

(११) रेखाचित्र में प्रत्येक विन्दु को स्पष्टरूप से प्रांकित करना चाहिये। अतः इसके लिये ⊙, (*) अथवा (×) आदि चिन्हों का भी प्रयोग किया जा सकता है। इसके अतिरिक्त विभिन्न विन्दुओं को मिलाने वाली रेखायें इतनी स्पष्ट होनी चाहिये कि वे विन्दुरेखीय पत्र की मुद्रित रेखाओं से भिन्न दिखलाई पड़ें।

(१२) रेखाचित्र में बनाई जाने वाली रेखायें सब जगह समानरूप से मोटी या पतली होनी चाहिये। रेखायें बनाते समय इस बात का ध्यान रहे कि वे विन्दुओं के मध्य से हो कर जायें।

(१३) यदि एक ही चित्र में एक से अधिक रेखाओं का प्रदर्शन करना है, तो विभिन्न ढंगों की रेखाओं का प्रयोग करना चाहिये, जैसे :—

(क) गहरी काली रेखा ———— (ब) हल्की रेखा ————

(ख) विन्दुमय रेखा .... (द) खण्डित रेखा - - - - -

(१४) इन रेखाओं का अर्थ स्पष्ट करने के लिये रेखाचित्र के किसी विशिष्ट भाग में एक संकेत (Index) अथवा कुंजी (Key) भी देनी चाहिये।

मापदण्ड के भेद (Types of Scale)

रेखाचित्र दो प्रकार के मापदण्डों पर बनाये जाते हैं :—

(१) प्राकृतिक मापदण्ड (Natural Scale)

(२) अनुपात मापदण्ड (Ratio Scale)

प्राकृतिक मापदण्ड के रेखाचित्र (Graphs on Natural Scale)

जो रेखाचित्र साधारण विन्दुरेखीय पत्रों पर बनाये जाते हैं उन्हें प्राकृतिक मापदण्ड के रेखाचित्र कहते हैं। इन विन्दुरेखीय पत्रों में एक वर्ग इंच सौ छोटे-छोटे वर्गों में विभक्त रहता है। गणितीय वृद्धि (Arithmetic Progression) से युक्त समंकों का प्रदर्शन करने के लिये प्राकृतिक मापदण्ड विशेषरूप से उपयुक्त समझा जाता है क्योंकि इसमें कोटि-अक्ष की समान दूरियों पर समंकों की निरपेक्ष गतियाँ भलीभांति प्रदर्शित की जा सकती हैं। प्राकृतिक मापदण्ड पर साधारणतः निम्न प्रकार के रेखाचित्र बनाये जाते हैं :—

कालान्तर अथवा ऐतिहासिक माला के रेखाचित्र (Graphs of Time or Historical Series)

ऐसे रेखाचित्रों को बनाने के लिये समय को भुजाक्ष (Abscissa) तथा मूल्यों को कोटि-अक्ष (Ordinate) पर दिखलाया जाता है। भुजाक्ष व कोटि-अक्ष के मापदण्डों को निश्चित करते समय इस बात का ध्यान रखना पड़ता है कि कोटि-अक्ष का मापदण्ड सर्वदा शून्य से ही प्रारम्भ हो, किन्तु भुजाक्ष का शून्य से प्रारम्भ होना कोई आवश्यक नहीं, क्योंकि समय की कोई

इकाई शून्य नहीं होती। मापदण्ड निश्चित करने के उपरान्त समय की प्रत्येक इकाई के ऊपर उनके मूल्यों के आधार पर विभिन्न विन्दुओं को प्रांकित कर लिया जाता है। तत्पश्चात इन विन्दुओं को क्रमश: एक पटरी की सहायता से मिला कर एक सतत (Continuous) रेखा बना दी जाती है। यही कालान्तर माला का रेखाचित्र है, जिसे कालिक चित्र (Historigram) भी कहते हैं।

कालान्तर माला में दिये गये मूल्य यदि निरपेक्ष-मूल्य हैं, जैसे टन, पौंड, रुपया, आदि, तो इनके आधार पर बनाये जाने वाले रेखाचित्र को निरपेक्ष कालिक चित्र (Absolute Historigram) कहते हैं। इसके विपरीत यदि सापेक्ष मूल्यों के आधार पर कोई रेखाचित्र बनाया गया है, तो उसे निर्देशांक कालिक चित्र (Index Historigram) कहते हैं।

निरपेक्ष कालिक चित्र (Absolute Historigram)

Illustration 1 :—

Represent graphically the following data relating to India's export of Jute—Yarns and Manufactures (by Sea, Air and Land) in crores of rupees* :—

Year		Exports (including re-exports)
1948—49	···	148·3
1949—50	···	128·1
1950—51	···	115·5
1951—52	···	271·7
1952—53	···	130·1
1953—54	···	113·8
1954—55	···	124·2
1955—56	···	118·4

उपर्युक्त समंकों के आधार पर बनाये जाने वाले रेखाचित्र का यह स्वरूप होगा :—

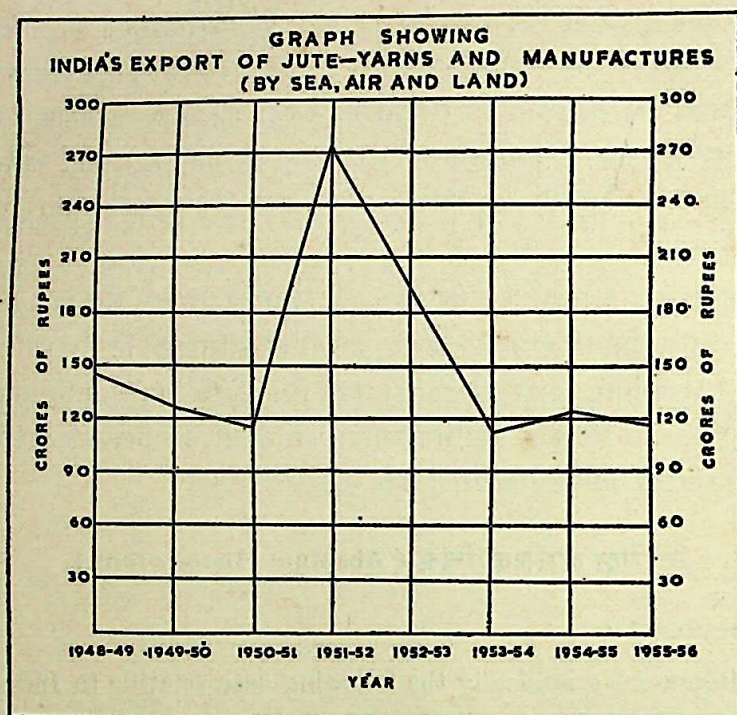
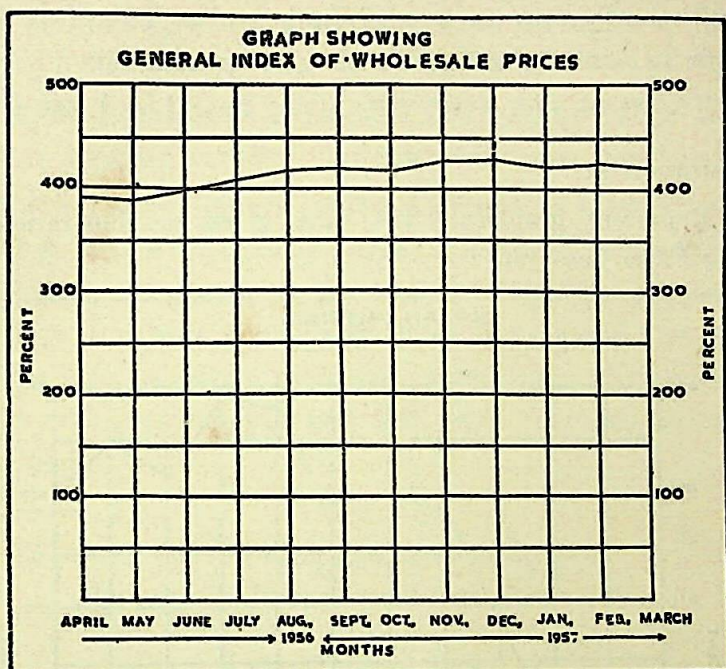
*Source: *Director General of Commercial Intelligence and Statistics*, Government of India.

सापेक्ष कालिक चित्र (Index Historigram)

Illustration 2 :—

Given below are the General Index Numbers of Wholesale Prices (*Base* : Year ended August 1939=100)* :—

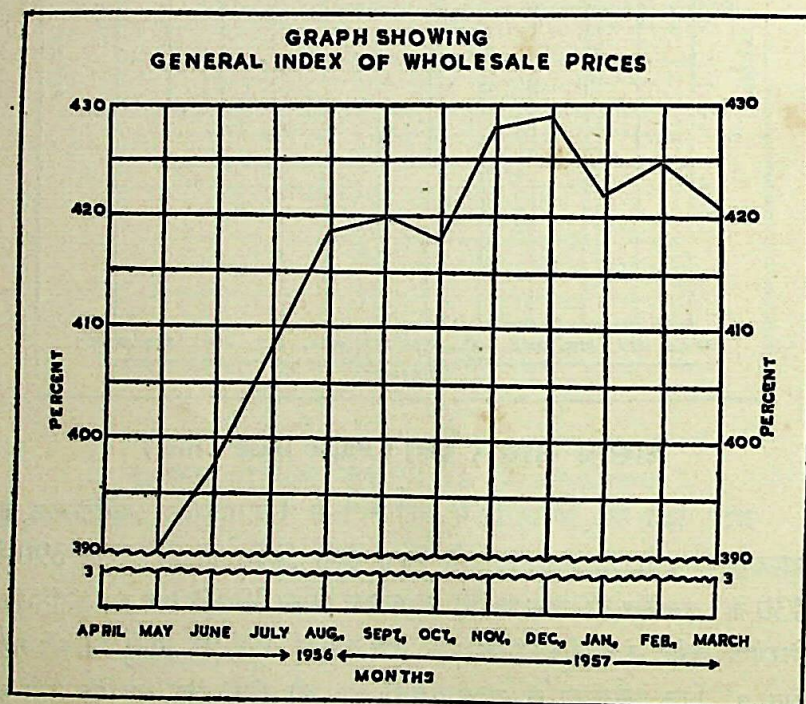
Months			General Index
April,	1956	...	391·3
May	„	...	390·3
June	„	...	397·9
July	„	...	409·2
August	„	...	418.5
September	„	...	419·8
October	„	...	417·8
November	„	...	427·7
December	„	...	428·8
January,	1957	...	422·3
February	„	...	425.0
March	„	...	421·3

*Source: *Office of the Economic Adviser to the Govt. of India.*

असत्य आधार रेखा (False Base Line)

ऊपर दिये गये उदाहरण में रेखाचित्र के नियमानुसार कोटि-अक्ष का मापदण्ड शून्य से प्रारम्भ होता है, किन्तु सभी निर्देशांकों का करीब 390 से 430 के अन्तर्गत ही जमाव होने के कारण 0 से 390.3 तक का कोटि-अक्ष निरर्थक प्रतीत होता है क्योंकि वहाँ तक हमारा कोई भी विन्दु प्रांकित नहीं होता। फिर रेखाचित्र के उच्चावचनों का भी ठीक ठीक अध्ययन नहीं हो पाता क्योंकि हमारे प्रांकित किये गये विन्दु करीब-करीब एक सी ही ऊँचाई पर हैं। इन कठिनाइयों से बचने के लिये साधारणतः कोटि-अक्ष का निरर्थक भाग (अर्थात् उस स्थान तक जहाँ तक कोई भी विन्दु प्रांकित होने की आशा नहीं है), काट दिया जाता है, और फिर विन्दुरेखीय पत्र का सम्पूर्ण भाग उन उच्चावचनों को प्रदर्शित करने के लिये उपयोग में लाया जाता है। किन्तु इस सम्बन्ध में इस बात का ध्यान रखना चाहिये कि प्रयोग में लाये जाने वाले कोटि-अक्ष के नीचे मापदण्ड का कुछ हिस्सा दिखलाया जाना आवश्यक है, कम से कम इतना जो मापदण्ड के आधार को व्यक्त कर सके। जिस स्थान से कोटि-अक्ष तोड़ा जाता है वहाँ दो खुली हुई (Open-end) लहरदार

रेखाओं का प्रयोग किया जाना चाहिये जिससे रेखाचित्र देखते ही यह जाना जा सके कि कोटि-अक्ष का कुछ निरर्थक भाग काट दिया गया है। इसी लहरदार रेखा को असत्य आधार रेखा (False Base Line) कहते हैं।

Illustration 3 :—

Represent graphically the data given in Illustration 2, using False Base Line :—

उपर्युक्त रेखाचित्र में निर्देशांकों के उच्चावचन दूसरे उदाहरण की अपेक्षा अधिक स्पष्ट हैं। विभिन्न कालान्तर-मालाओं का तुलनात्मक अध्ययन करने में असत्य आधार रेखा का प्रयोग उचित व सुविधाजनक समझा जाता है। इससे स्थान की भी बहुत बचत होती है।

फिर भी असत्य आधार रेखा का प्रयोग कभी-कभी अनुचित समझा जाता है। इससे समानुपातिक विभ्रम होने की संभावना रहती है। अनेक स्थितिओं में इसके कारण उच्चावचनों में अनावश्यक विशालता प्रतीत होने लगती है। इसलिये इसका प्रयोग करते समय विशेष सावधानी रखने की आवश्यकता पड़ती है।

एक से अधिक कालान्तर मालाओं का प्रदर्शन
(Graphs of more than one Time Series)

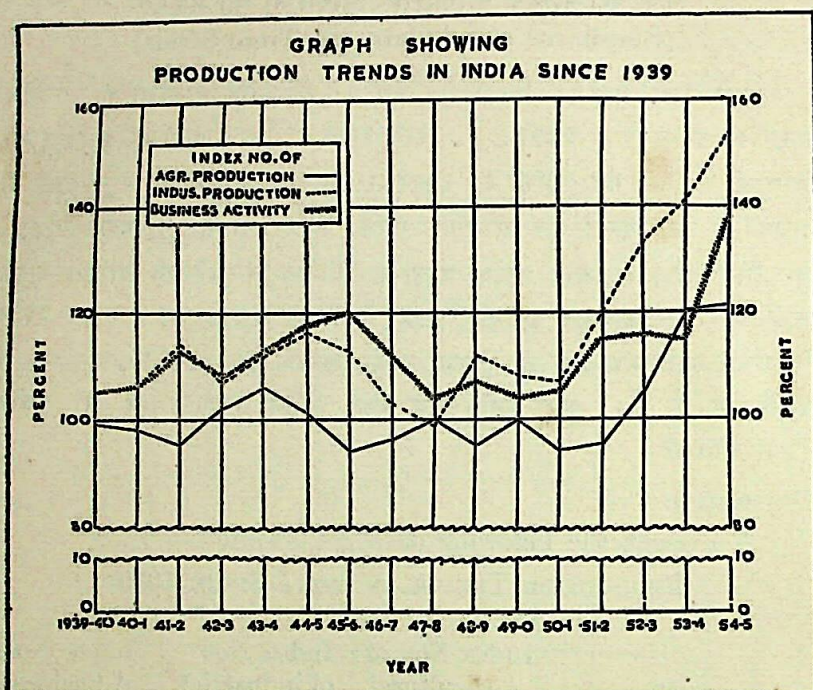
कभी कभी एक ही विन्दुरेखीय पत्र पर कई समंक मालाओं का प्रदर्शन करने की आवश्यकता पड़ती है। किन्तु इसके लिये यह आवश्यक है कि सभी मालाओं में दिये गये समंकों की इकाइयाँ समान हों। अत: सब मालाओं के समंकों के उच्चावचनों का अध्ययन करके कोटि-अक्ष का मापदण्ड निश्चित कर लिया जाता है, और प्रत्येक माला के विभिन्न विन्दुओं को प्रांकित करके उन्हें क्रमशः अलग-अलग ढंग की रेखाओं से मिला दिया जाता है। इस प्रकार रेखाचित्र में विभिन्न ढंगो की रेखायें उनके क्रमिक उच्चावचनों का स्पष्टतया प्रदर्शन करती हैं। कभी-कभी इसके लिये रंगीन रेखाओं का भी प्रयोग किया जाता है।

Illustration 4 :—

Represent the following data graphically :—

PRODUCTION TRENDS IN INDIA SINCE 1939

Year	Index Nos. of Agricultural Production*	Index Nos. of industrial production†	Index Nos. of business activity‡
1939—40	99·0	—	105·2
1940—41	98·0	108·1	105.7
1941—42	95·0	114·3	113·5
1942—43	102·0	106·9	108·0
1943—44	106·0	112.2	111·5
1944—45	101·0	115·7	117·0
1945—46	94·0	112.5	119·7
1946—47	96·0	102·9	111·9
1947—48	100·0	99.1	104·0
1948—49	95·0	112·3	107·3
1949—50	100·0	108·4	104.3
1950—51	94·0	107·2	104.9
1951—52	95·0	120·4	114·6
1952—53	105·0	133·2	115·9
1953—54	120·0	140·8	115·0
1954—55	121·0	153·6	137·6

Sources : **Eastern Economist*, †*Indian Labour Gazette*, ‡*Eastern Economist*.

इस चित्र में तीनों निर्देशांकों का तुलनात्मक अध्ययन किया जा सकता है।

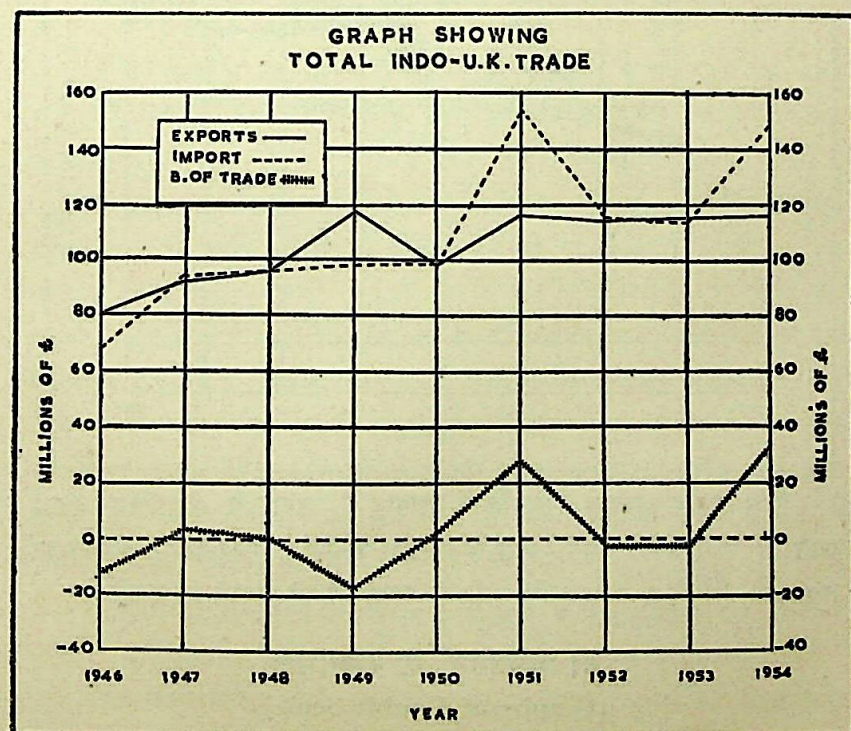
आयात, निर्यात व व्यापार के अन्तर का रेखाचित्र

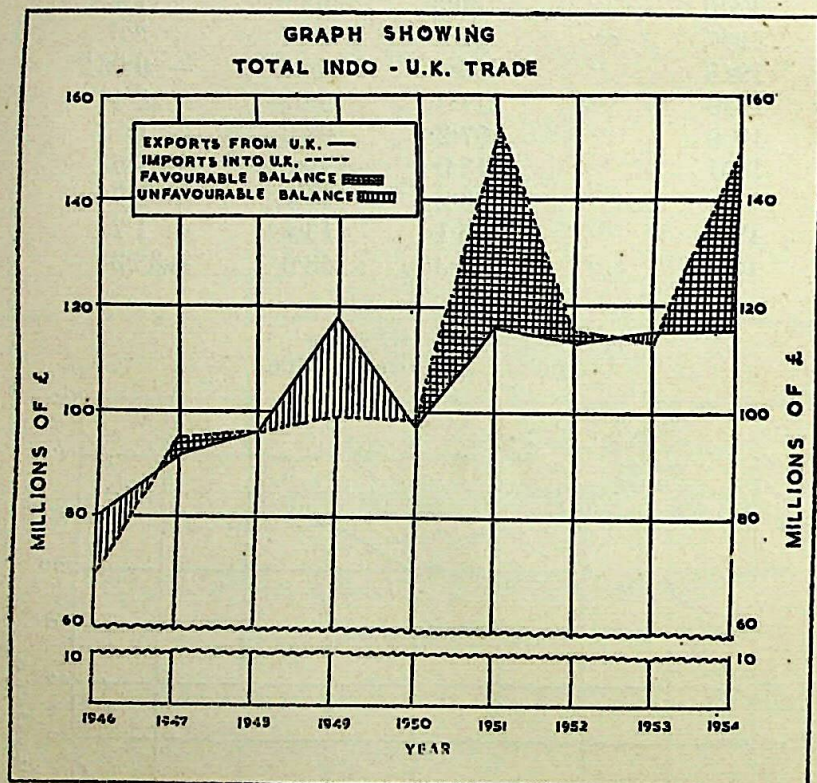
(Graph of Imports, Exports and Balance of Trade)

आयात, निर्यात व व्यापार के अन्तर से सम्बन्धित कालान्तर मालाओं का विन्दुरेखीय प्रदर्शन करते समय उपर्युक्त नियमों का ही पालन करना पड़ता है, किन्तु कोटि अक्ष का मापदण्ड निर्धारित करते समय इस बात का ध्यान रखना आवश्यक है कि व्यापार का अन्तर अनुकूल (Favourable) व प्रतिकूल (Unfavourable) दोनों हो सकता है। जब आयात की मात्रा निर्यात से कम होती है तो अन्तर अनुकूल (+) और जब अधिक होती है तो अन्तर प्रतिकूल (—) होता है। अतः कोटि-अक्ष को शून्य के नीचे तक दिखलाना आवश्यक हो जाता है, जिससे प्रतिकूल व्यापार के अन्तर को भी प्रकट किया जा सके। निम्नलिखित उदाहरण में आयात, निर्यात व व्यापार के अन्तर को प्रदर्शित करने के लिये तीन प्रकार की रेखाओं का प्रयोग किया गया है।

Illustration 5 :—

TOTAL INDO–U.K. TRADE*
(in million £)

Year		Exports from U. K. to India	Imports into U.K. from India	Balance of Trade
1946	...	80·3	68·9	—11·4
1947	...	92·1	94·7	+ 2·6
1948	...	96·4	96·3	— 0·064
1949	...	117·4	98·9	—18·4
1950	...	97·2	98.3	+ 1·1
1951	...	115·9	153·4	+37·5
1952	...	113·2	114·7	+ 1·5
1953	...	115·1	113·4	— 1·7
1954	...	115·3	148·6	+33·3

*Source : *Journal of Industry and Trade*, Government of India.

आयात व निर्यात के साथ ही साथ व्यापार के अन्तर को प्रदर्शित करने की एक दूसरी विन्दुरेखीय रीति भी है। इस रीति के अनुसार आयात व निर्यात के वक्र तो पूर्वोक्त ढंग से ही बनाये जाते हैं, किन्तु व्यापार के अन्तर का प्रदर्शन किसी अन्य वक्र द्वारा न करके आयात व निर्यात के वक्रों के बीच के स्थान को रंग कर या चिन्हित करके दिखलाया जाता है। यह रीति निम्न चित्र से स्पष्ट हो जायगी :—

जिस प्रकार आयात, निर्यात व व्यापार के अन्तर के रेखाचित्र बनाये जाते हैं, उसी प्रकार आय, व्यय व बचत; जन्म-दर, मृत्यु-दर व जीवित-दर तथा क्रय, विक्रय व लाभ-हानि आदि के रेखाचित्र भी बनाये जा सकते हैं।

दो मापदण्डों के रेखाचित्र
(Graphs of Double Scale)

यदि किसी कालान्तर माला में दिये गये चल-मूल्य दो विभिन्न इकाइयों में हैं तो उनका प्रदर्शन एक ही मापदण्ड की सहायता से नहीं किया जा सकता।

इसके लिये भुजाक्ष के दोनों ओर कोटि-अक्ष लेने की आवश्यकता पड़ती है— एक प्रथम चल-मूल्यों की इकाई के लिये व दूसरा द्वितीय चल-मूल्यों की इकाई के लिये। इस प्रकार के रेखाचित्र कैसे वनाये जाते हैं इसकी जानकारी निम्न उदाहरण से हो जायगी :—

Illustration 6 :—

Represent the following data graphically :—

EXPORT OF RAW HEMP FROM INDIA*

Year		Quantity ('000 Cwts.)	Value (Lakhs of Rupees)
1948-49	...	665	339
1949-50	...	342	175
1950-51	...	271	128
1951-52	...	417	248
1952-53	...	342	146
1953-54	...	364	118
1954-55	...	426	184

इस उदाहरण में एक माला के चल-मूल्य हंडरेडवेट में तथा दूसरे के रुपये में हैं। जहाँ तक दोनों मालाओं के विभिन्न चल-मूल्यों को विन्दुरेखीय पत्र पर प्रांकित करने का प्रश्न है, उसके लिये उन्हीं नियमों का पालन करना है जिनका उल्लेख ऊपर किया जा चुका है। किन्तु हंडरेडवेट तथा रुपये का प्रदर्शन करने के लिये क्रमशः दो कोटि-अक्षों की आवश्यकता पड़ेगी। इस सम्बन्ध में यह ध्यान रखना चाहिये कि दोनों कोटि-अक्षों के मापदण्ड इस प्रकार निर्धारित किये जायें कि उनके चल-मूल्यों में अनुपाती (Proportional) परिवर्तन बने रहें। इसके लिये दोनों मालाओं का मध्यक (Average) निकाल कर मापदण्डों का निर्धारण करना चाहिये। इस प्रश्न में परिमाण का मध्यक करीब 400 हजार हंडरेडवेट तथा मूल्य का मध्यक करीब 191 लाख रुपये हैं। अगले पृष्ठ पर दिये गये चित्र में दोनों मध्यकों को एक सीध में रख कर कोटि-अक्षों के मापदण्ड निश्चित किये गये हैं।

अधिकतम व न्यूनतम मूल्यों के रेखाचित्र

(Graphs of Maximum and Minimum Values)

कभी कभी किसी वस्तु के अधिकतम व न्यूनतम मूल्यों का विन्दुरेखीय प्रदर्शन करने की भी आवश्यकता पड़ती है, जैसे सोना, चाँदी, अंश, ऋणपत्र

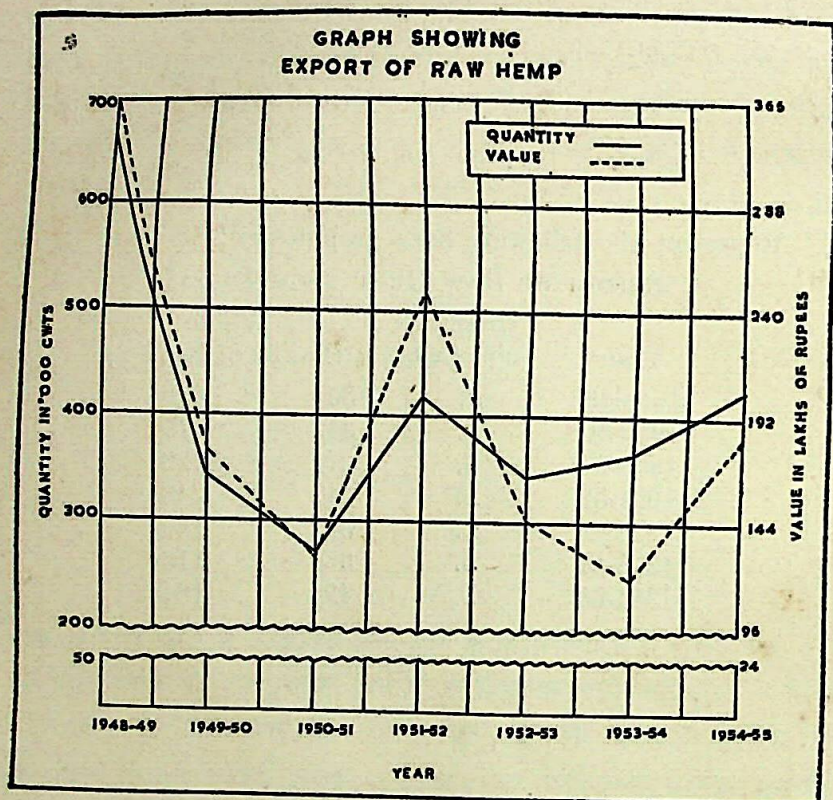
*Source : *Journal of Industry and Trade*, Government of India, 1956

आदि केदैनिक बाजार-भाव। इन मूल्यों को पहले कालिक चित्रों (Historigrams) द्वारा प्रदर्शित कर लिया जाता है; तदुपरान्त उनके मध्य के अन्तर को किसी रंग से रंग दिया जाता है। ऐसे रेखाचित्र का एक नमूना देखिये :—

Illustration 7 :—

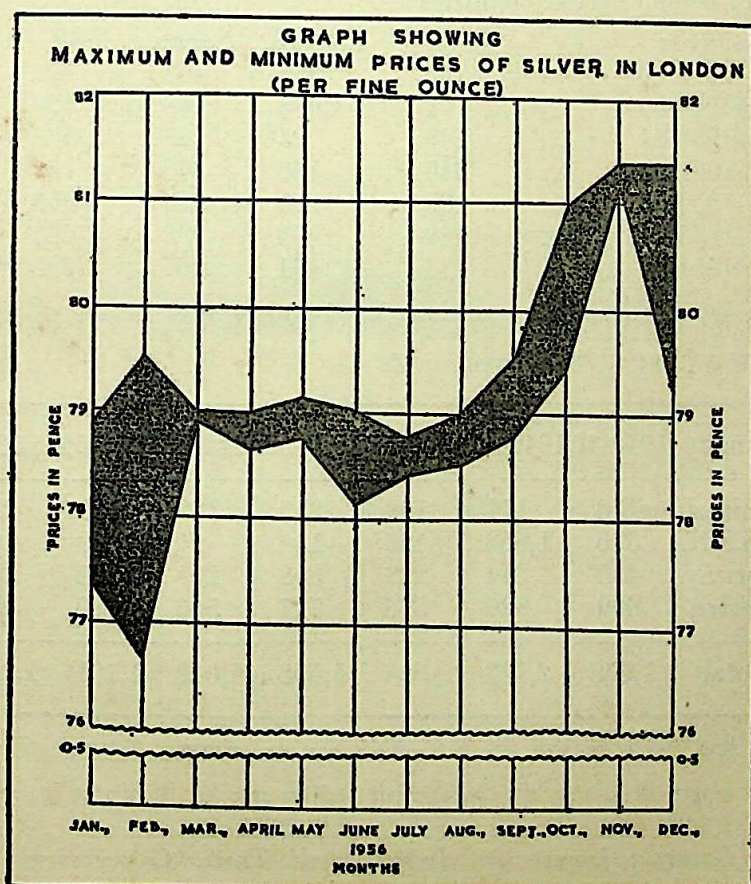
SPOT PRICES OF SILVER IN LONDON*

(*Per fine ounce*)

Months 1956		Maximum (*d*)	Minimum (*d*)
January	...	78.88	77.38
February	...	79.50	76.63

* Source : *Report on Currency and Finance*, Reserve Bank of India, 1957

March	...	79.00	78.88
April	...	79.00	78.63
May	...	79.13	78.75
June	...	79.00	78.13
July	...	78.75	78.38
August	...	79.00	78.50
September	...	79.50	78.75
October	...	81.00	78.38
November	...	81.38	81.25
December	...	81.38	79.25

Represent the above data graphically.

पट्टीदार वक्र (Band Curves)

किसी विषय से सम्बन्धित अनेक समंक मालाओं का प्रदर्शन पट्टीदार वक्रों से भी किया जा सकता है। विन्दुरेखीय प्रदर्शन की यह एक नवीन रीति है। इसमें एक समंक माला के वक्र के ऊपर दूसरी समंक माला के मूल्यों को प्रांकित किया जाता है। इस प्रकार जितनी समंक मालायें रहती हैं उतनी ही पट्टियाँ रेखाचित्र में बन जाती हैं जिन्हें विभिन्न रंगों या चिन्हों से प्रदर्शित कर दिया जाता है। यह रीति समंक-मालाओं की निजी विशेषताओं का प्रदर्शन करने के साथ ही साथ उनके योग का भी प्रदर्शन करती है।

Illustration 8 :—

The following table shows the imports (in lakhs of rupees) from some selected countries :—

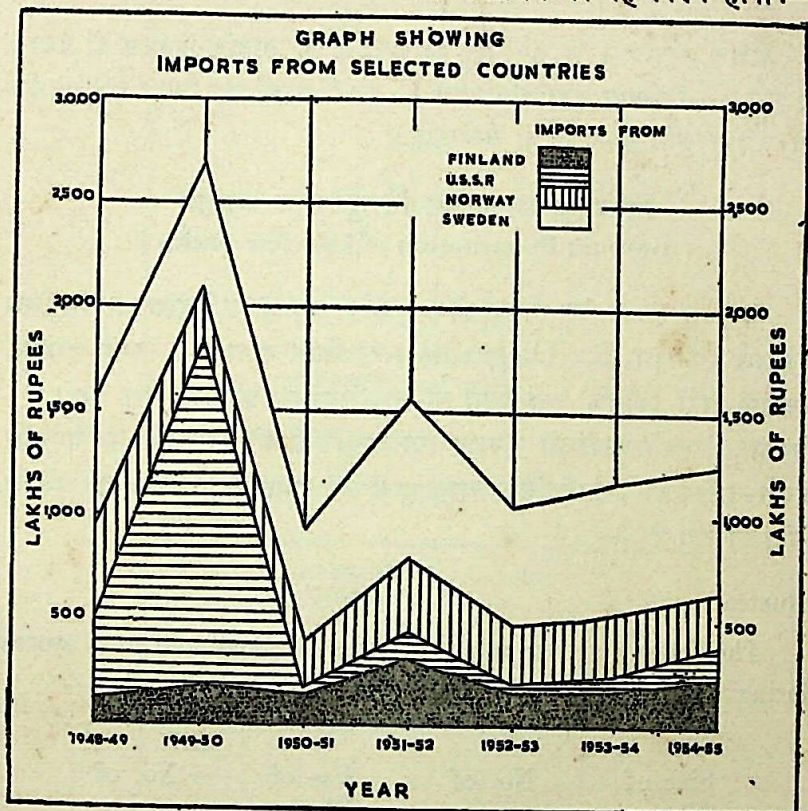
Year		Finland	U.S.S.R.	Norway	Sweden
1948-49	...	138	376	435	609
1949-50	...	171	1,668	244	620
1950-51	...	149	23	223	528
1951-52	...	315	138	358	747
1952-53	...	180	24	279	566
1953-54	...	189	60	292	620
1954-55	...	215	161	267	603

पट्टीदार वक्रों द्वारा उपर्युक्त आयातों का प्रदर्शन करने के लिये सर्वप्रथम निम्न तालिका की रचना करनी पड़ेगी :—

Country	1948-49	1949-50	1950-51	1951-52	1952-53	1953-54	1954-55
Finland	138	171	149	315	180	189	215
U.S.S.R.	376	1,668	23	138	24	60	161
Norway	435	244	223	358	279	292	267
Sweden	609	620	528	747	566	620	603
Total	1,558	2,703	923	1,558	1,049	1,161	1,246

अब रेखाचित्र बनाने के लिये कोटि-अक्ष का मापदण्ड विभिन्न वर्षों के कुल आयात के आधार पर लेना पड़ेगा क्योंकि एक देश के आयात के ऊपर

Source : *Journal of Industry and Trade*, Government of India, 1957

क्रमशः दूसरे देश के आयात को प्रदर्शित करना है। वर्षों का प्रदर्शन भुजाक्ष पर पहले के समान किया जायगा। अतः रेखाचित्र का यह स्वरूप होगा:—

रेखाचित्र को ध्यानपूर्वक देखने से ज्ञात होगा कि फिनलैंड से होने वाले आयात का प्रदर्शन तो साधारण रीति से किया गया है, किन्तु उसके बाद रूस से होने वाले आयात के विभिन्न मूल्यों को फिनलैंड के आयात-वक्र के ऊपर प्रांकित किया गया है। इसी प्रकार नार्वे के आयात रूस के ऊपर तथा स्वेडेन के नार्वे के ऊपर दिखलाये गये हैं। इन वक्रों के बीच की पट्टियों को विभिन्न चिन्हों द्वारा प्रदर्शित कर दिया गया है। चित्र को देख कर हम बड़ी सरलता से ज्ञात कर सकते हैं कि किस वर्ष में इन देशों से कितना-कितना आयात किया गया है व कुल आयात कितने लाख रुपये का हुआ है।

पट्टीदार वक्रों का प्रयोग उन सभी कालान्तर मालाओं के प्रदर्शन के लिए किया जा सकता है जिनमें उनके निजी मूल्यों के साथ ही योग का भी प्रदर्शन करना हो।

१०

आवृत्ति-वितरण के रेखाचित्र
(Graphs of Frequency Distributions)

पिछले अध्याय में यह बतलाया जा चुका है कि आवृत्ति-वितरण दो प्रकार के होते हैं—विच्छिन्न तथा अविच्छिन्न। इन वितरणों का विन्दुरेखीय प्रदर्शन भी बड़ी सरलता से किया जा सकता है।

विच्छिन्न माला का विन्दुरेखीय प्रदर्शन
(Graphic Presentation of Discrete Series)

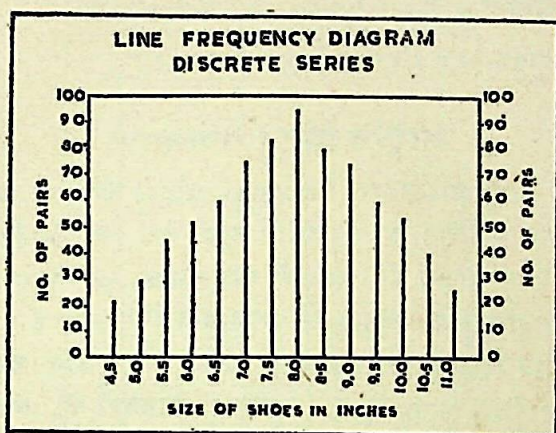
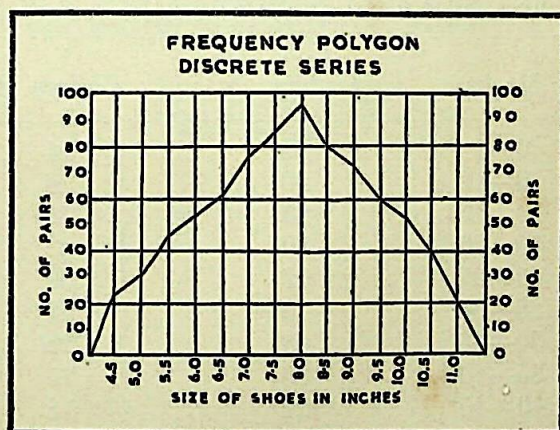
विच्छिन्न माला का विन्दुरेखीय प्रदर्शन साधारणतः रेखा आवृत्ति-चित्र (Line Frequency Diagram) द्वारा किया जाता है। इसमें लम्ववत रेखाओं द्वारा विभिन्न चल-मूल्यों की आवृत्तियों का प्रदर्शन किया जाता है। नियमानुसार चल-मूल्यों को भुजाक्ष तथा आवृत्तियों को कोटि-अक्ष पर प्रदर्शित करना चाहिये। निम्नलिखित उदाहरण में एक रेखा आवृत्ति-चित्र का प्रदर्शन किया जा रहा है :—

Illustration 9 :—

The following data relate to sizes of shoes sold at a stores during a given week. Represent the data graphically :—

Size of Shoes	No. of pairs	Size of Shoes	No. of pairs
4.5″	22	8.0″	96
5.0″	30	8.5″	80
5.5″	45	9.0″	73
6.0″	52	9.5″	60
6.5″	60	10.0″	54
7.0″	75	10.5″	40
7.5″	84	11.0″	25

उपर्युक्त विच्छिन्न माला को रेखा आवृत्ति-चित्र द्वारा अगले पृष्ठ पर प्रदर्शित किया गया है :—

विच्छिन्न मालाओं को प्रदर्शित करने की एक रीति और है। इस रीति के अनुसार विन्दुरेखीय पत्र पर आवृत्तियों के लिये विभिन्न विन्दुओं को प्रांकित

करके उन्हें क्रमशः मिला लिया जाता है। इस प्रकार जो आकृति उपलब्ध होती है उसे आवृत्ति-बहुभुज (Frequency Polygon) कहते हैं :—

अविच्छिन्न माला का विन्दुरेखीय प्रदर्शन

(Graphic Presentation of a Continuous Series)

अविच्छिन्न माला का विन्दुरेखीय प्रदर्शन करने के लिये वर्गान्तरों को भुजाक्ष पर तथा आवृत्तियों को कोटि-अक्ष पर दिखलाया जाता है। इसके प्रदर्शन की तीन रीतियाँ हैं :—

(१) आवृत्ति-चित्र (Histogram)

(२) आवृत्ति-बहुभुज (Frequency Polygon)

(३) आवृत्ति-वक्र (Frequency Curve)

आवृत्ति-चित्र (Histogram)

आवृत्ति-चित्र आयताकार (Rectangular) क्षेत्रों का एक समूह है, जिनकी ऊँचाई आवृत्तियों के अनुपात में रहती है। आवृत्ति-चित्र का निर्माण करने के लिये वर्गान्तरों की सीमाओं को भुजाक्ष पर दिखला कर उन पर सम्बन्धित आवृत्तियों के अनुपात में लम्ब डाल लिये जाते हैं, और फिर इन लम्बों के शीर्ष विन्दुओं को भुजाक्ष के समानान्तर खींच कर आयतों का निर्माण कर लिया जाता है। इस प्रकार वर्गान्तरों की संख्या के बराबर आयतों की रचना हो जाती है।

Illustration 10 :—

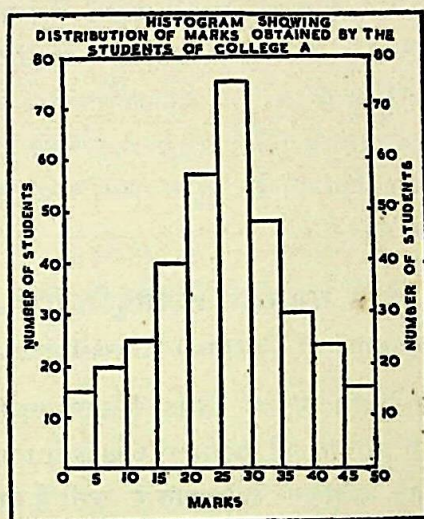
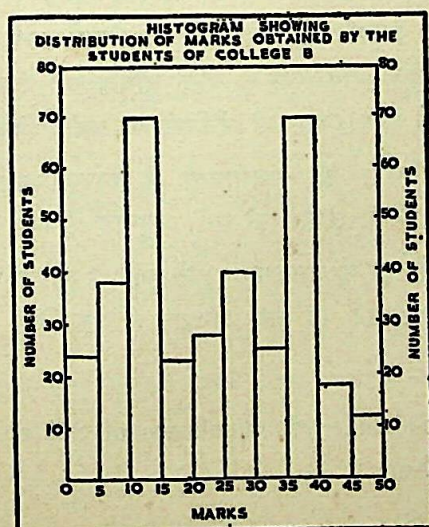
The following distributions show the marks obtained in Statistics by similar number of students in College *A* and *B* :—

Marks	College *A*	College *B*
0—5	15	24
5—10	20	38
10—15	25	70
15—20	40	23
20—25	57	30
25—30	75	40
30—35	48	25
35—40	30	70
40—45	24	18
45—50	16	12
Total	350	350

Construct Histograms to represent the above data.

आवृत्ति-चित्रों का प्रदर्शन अगले पृष्ठ पर किया गया है :—

प्रथम आवृत्ति-चित्र में यह स्पष्टतया दिखलाई पड़ रहा है कि आवृत्तिओं का आकार छ वर्गों तक क्रमशः बढ़ता गया है। छठें वर्ग (25–30) की आवृत्ति, अर्थात् 75, सर्वाधिक है, इसलिये उसके आयत की ऊँचाई भी सबसे

प्रथम महाविद्यालय के विद्यार्थियों के प्राप्तांकों का प्रदर्शन

द्वितीय महाविद्यालय के विद्यार्थियों के प्राप्ताङ्कों का प्रदर्शन

अधिक है। छठें वर्ग के बाद आवृत्तियों का आकार क्रमशः घटने के कारण आयतों की ऊँचाई भी घटती जा रही है। ऐसे आवृत्ति-चित्र को एक चोटी वाला आवृत्ति-चित्र (One-humped Histogram) कहते हैं।

दूसरे आवृत्ति चित्र में आवृत्तियों का एक सा उतार-चढ़ाव न होने के कारण आयतों की ऊँचाई में प्रथम चित्र के समान स्थिरता नहीं है। वर्ग (10-15) तथा (35-40) की आवृत्तियाँ समान, अर्थात् 70, होने के कारण उनके आयतों की ऊँचाई भी समान है। ऐसे आवृत्ति-चित्र को दो चोटी वाला आवृत्ति-चित्र (Two-hnmped Histogram) कहते हैं। विभिन्न वर्गों में आवृत्तियों की गहन विषमता के कारण कभी कभी अनेक चोटी वाले आवृत्ति चित्र भी पाये जाते हैं।

असमान वर्गान्तरों के आवृत्ति-चित्र
(Histograms of Unequal Class-intervals)

आवृत्ति-चित्रों के निर्माण में एक विशेष कठिनाई का सामना तब करना पड़ता है जब वर्गान्तर असमान (Unequal Class-intervals) होते हैं। चूँकि आयतों की ऊंचाई आवृत्तियों के अनुपात में रहती है इसलिए आयतों का क्षेत्रफल क्रमशः वर्गान्तरों की आवृत्तियों के बराबर तथा समस्त आयतों का क्षेत्रफल आवृत्ति-वितरण की कुल आवृत्ति के बराबर होना चाहिये। असमान वर्गान्तरों के कारण आयतों की चौड़ाई असमान रखनी पड़ती है, अतः यदि उनकी आवृत्तियों के अनुपात में ही आयतों की ऊँचाई रखी जाती है तो उन आयतों का क्षेत्रफल कुल आवृत्तियों से बहुत अधिक बढ़ जायगा। इस दोष को दूर करने के लिये साधारणतः दो रीतियों का प्रयोग किया जाता है :—

(क) यदि वर्गान्तरों की असमानता के कारण आयतों की असमान चौड़ाई रखना है तो उनकी ऊँचाई को उसी अनुपात में कम कर देनी चाहिये।

(ख) यदि वर्गान्तरों में असमानता होते हुये भी आयतों की समान चौड़ाई रखना है तो उनकी ऊँचाई को उसी अनुपात में बढ़ा देनी चाहिये।

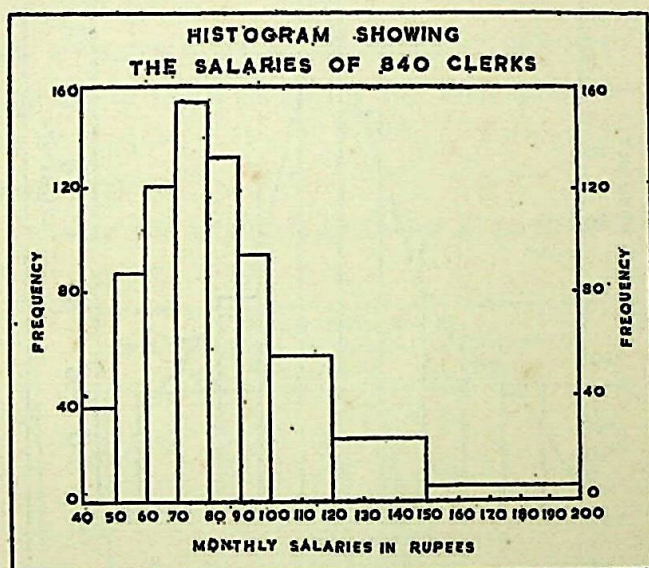
Illustration 11 :—

The following table gives salaries of 840 clerks employed in a big establishment :—

Monthly Salary in rupees	Number of Clerks
40—50 ...	... 36
50—60 ...	... 87
60—70 ...	... 121
70—80 ...	... 154

80—90	...	...	133
90—100	...	...	95
100—120	...	...	112
120—150	...	...	72
150—200	...	...	30

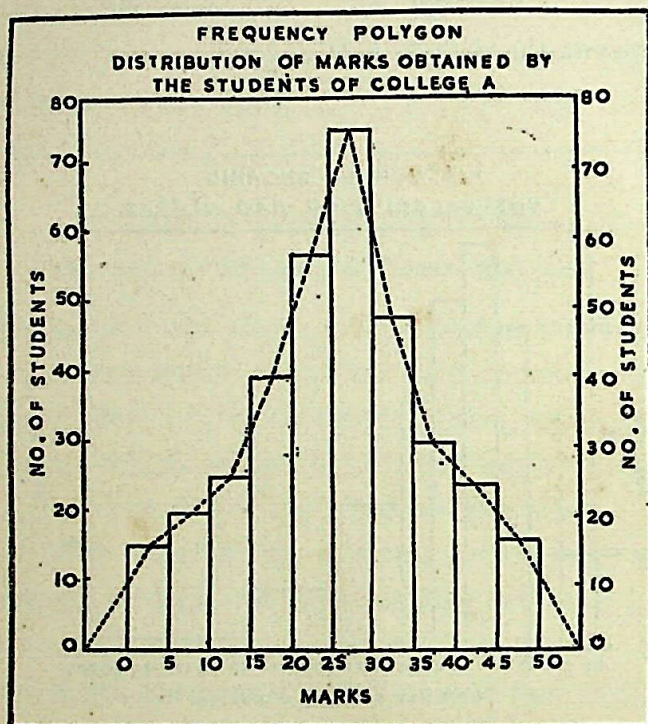
Represent the data in a Histogram.

(एम० कॉम०, बनारस, १९५३)

आवृत्ति-बहुभुज (Frequency Polygon)

आवृत्ति-बहुभुज आवृत्ति-चित्र में निर्मित सब आयतों के शीर्ष विन्दुओं को मिलाने से बनता है। अतः उसको बनाने के लिये सर्व प्रथम आवृत्ति-चित्र का निर्माण करना पड़ता है। फिर प्रत्येक आयत की ऊपरी भुजा के मध्य-विन्दुओं को ज्ञात करके उन्हें क्रमशः मिला दिया जाता है। अन्तिम विन्दुओं को शून्य से मिला देना भी आवश्यक होता है। विछिन्न माला का प्रदर्शन करते समय भी हम एक ऐसे ही आवृत्ति-बहुभुज का उदाहरण देख चुके हैं।

आवृत्ति-बहुभुज भी आवृत्ति-चित्र के समान ही आवृत्ति-वितरण की कुल आवृत्तियों का क्षेत्रफल के रूप में प्रदर्शन करता है। उदाहरण १० में दिये गये प्रथम आवृत्ति-चित्र के आधार पर यहाँ एक आवृत्ति-बहुभुज का निर्माण किया जा रहा है :—

Illustration 12 :—

Construct Frequency Polygon to show the data (*only for College A*) given on Page 148 :—

उपर्युक्त चित्र को ध्यानपूर्वक देखने से ज्ञात होगा कि आयतों का जितना क्षेत्रफल बहुभुज की भुजाओं से छूट रहा है करीब-करीब उतना ही उनके बाहर का क्षेत्रफल शामिल होता जा रहा है। इस प्रकार सम्पूर्ण बहुभुज का क्षेत्रफल सम्पूर्ण आयतों के क्षेत्रफल के समान ही रहता है।

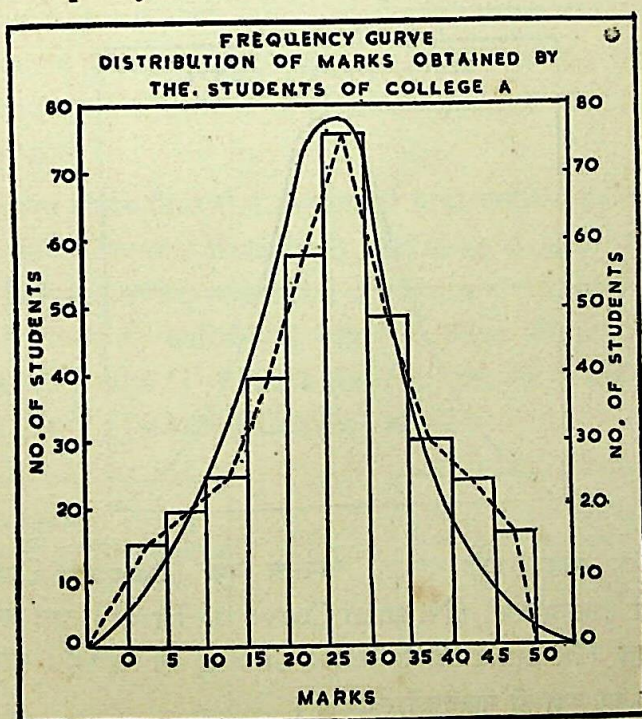
आवृत्ति-वक्र (Frequency Curve)

यदि हम किसी विशाल आवृत्ति-वितरण को लेकर उसके आधार पर आवृत्ति-चित्र का इस प्रकार निर्माण करें कि वर्गान्तरों का विस्तार कम से कम रहे, तथा क्षेत्रफल का मापदण्ड भी छोटे से छोटा हो, तो इसके फलस्वरूप जो आवृत्ति-चित्र हमें प्राप्त होगा उसमें असंख्य छोटे-छोटे आयत होंगे। अब यदि इन आयतों के शीर्षस्थ मध्य-विन्दुओं को मिलाकर एक आवृत्ति-बहुभुज निर्मित किया जाय तो उसकी भुजाओं से एक सरलित वक्र

(Smoothed Curve) बन जायगा। इसी वक्र को आवृत्ति-वक्र (Frequency Curve) कहते हैं। इस वक्र के नीचे भी कुल उतना ही क्षेत्रफल होता है जितना आवृत्ति-चित्र के समस्त आयतों का, अथवा कुल आवृत्ति के योग के बराबर। वक्र बनाते समय इस बात का ध्यान रखना पड़ता है कि उसका कोई भी भाग किसी कोण का स्वरूप न प्रस्तुत करे। इस कठिनाई का विशेषरूप से तब सामना करना पड़ता है जब आयतों की संख्या कम होती है।

ऊपर के उदाहरण में दिये गये आवृत्ति-चित्र व आवृत्ति-बहुभुज के आधार पर आवृत्ति-वक्र का निर्माण कैसे किया जायगा, इसका प्रदर्शन निम्न उदाहरण में किया जा रहा है :—

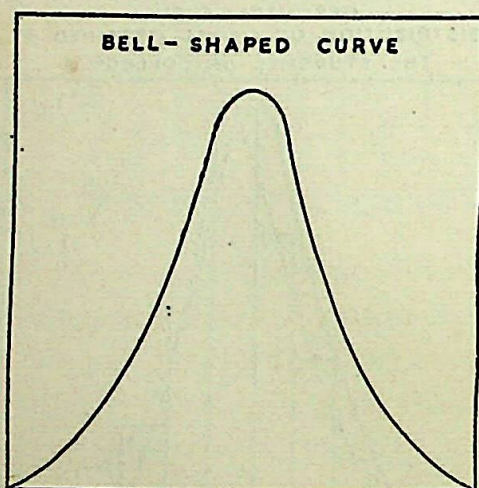
Illustration 13 :—

Represent the data (*only for College A*) given in Illustration 10 by a Frequency Curve.

साधारण रीति से हाथ द्वारा किसी आवृत्ति-वक्र का निर्माण करना एक कठिन कार्य है। ऊपर के उदाहरण में निर्मित वक्र केवल उसके स्वरूप का

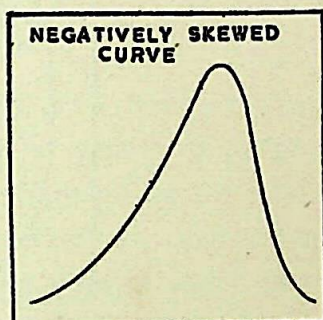
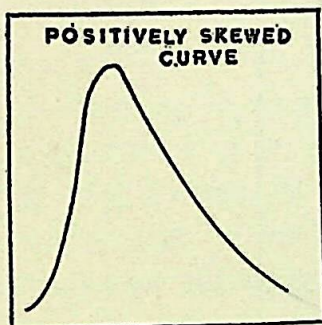
एक अनुमान मात्र समझना चाहिये। वक्र-निर्माण के लिये सांख्यिकीय-सूत्रों का प्रयोग करना पड़ता है जो एक गणितीय विषय है।

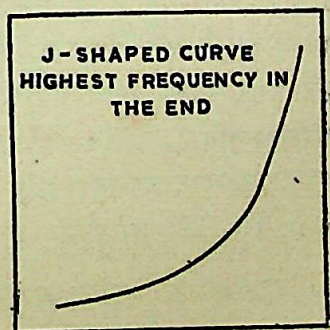
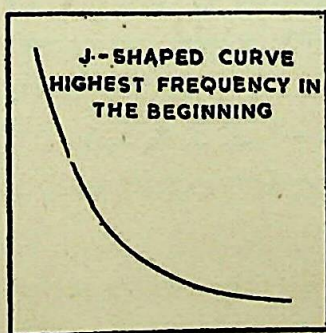
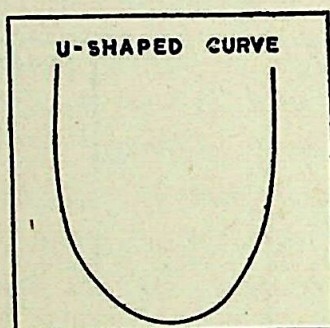
आवृत्ति-वक्र के भेद (Kinds of Frequency Curves)

आवृत्ति-वितरण साधारणतः चार प्रकार के होते हैं, अतः उनके आधार पर बनने वाले आवृत्ति-वक्र भी चार प्रकार के होते हैं।

(१) संमित-वितरण (Symmetrical Distribution) में वर्गों की आवृत्तियों का उतार-चढ़ाव एक ही क्रम से होने के फलस्वरूप इसके आधार पर बनने वाला वक्र भी 'घन्टी' के आकार का (Bell-shaped) होता है। इसमें शून्य से बढ़ते बढ़ते आवृत्तियाँ एक अधिकतम ऊँचाई तक जाती हैं और फिर उसी गति से घटती-घटती शून्य तक पहुँच जाती हैं। ऐसे आवृत्ति-वितरण बहुत कम मिलते हैं। 'घन्टी' के आकार का एक वक्र यहाँ दिखलाया जा रहा है :—

घन्टी के आकार वाले वक्र को सामान्य वक्र (Normal Curve), 'विभ्रम का सामान्य वक्र' (Normal Curve of Error) तथा 'सामान्य संभावना वक्र' (Normal Probability Curve) भी कहते हैं। सांख्यिकी में इस वक्र का बड़ा ही महत्वपूर्ण स्थान है।

(२) जिन आवृत्ति-वितरणों में आवृत्तियों के उतार-चढ़ाव का क्रम समान नहीं होता उन्हें साधारण असंमित-वितरण (Moderately Asymmetrical

Distribution) कहते हैं; और इनके आधार पर बनने वाले वक्र 'विषम वक्र' (Skewed Curves) कहलाते हैं। इसमें वक्र का एक सिरा (Tail) दूसरे सिरे की अपेक्षा अधिक लम्बा होता है। यदि लम्बा सिरा दाहिनी ओर है तो आवृत्ति-वितरण में धनात्मक (+), और यदि बाईं ओर है तो ऋणात्मक (—) विषमता होती है।

सांख्यिकी में अधिकतर आवृत्ति-वितरण इसी प्रकार के होते हैं—खास कर आर्थिक व सामाजिक समस्याओं से सम्बन्धित आवृत्ति-वितरणों में तो विषमता अवश्य पाई जाती है।

(३) जिन आवृत्ति-वितरणों में विषमता की मात्रा अत्यधिक होती है उन्हें अत्यधिक असंमित-वितरण (Extremely Asymmetrical Distributions) कहते हैं। चूंकि ऐसे वितरणों में अधिकतम आवृत्तियाँ या तो प्रारम्भ में रहती हैं या अन्त में, इसलिये इनके आधार पर निर्मित होने वाले वक्र का आकार अंग्रेजी के अक्षर 'J' के समान होता है। अतः ऐसे वक्रों को 'J के आकार वाले वक्र' (J-shaped Curves) कहते हैं।

(४) जिन आवृत्ति-वितरणों में अधिकतम आवृत्तियाँ वितरण के प्रारम्भ तथा अन्त में व न्यूनतम आवृत्तियाँ मध्य में रहती हैं, उन्हें अंग्रेजी के अक्षर 'U' के आकार वाले आवृत्ति-वितरण (U–shaped Distributions) और वक्र को 'U के आकार वाला वक्र' (U–shaped Curve) कहते हैं।

अनुपात-मापदण्ड के रेखाचित्र
(Graphs on Ratio Scale)

अब तक जितने रेखाचित्रों का वर्णन किया गया है वे सब प्राकृतिक मापदण्ड को लेकर बनाए गए हैं। यद्यपि प्राकृतिक मापदण्ड पर बनाये गए चित्र समंकों के निरपेक्ष उतार-चढ़ाव का अत्यन्त ही सुन्दर व स्पष्ट प्रदर्शन करते हैं, फिर भी उनके द्वारा सापेक्ष परिवर्तनों का ठीक ठीक अध्ययन नहीं किया जा सकता। अतः सापेक्ष परिर्तनों का प्रदर्शन करने के लिए अनुपात मापदण्ड (Ratio Scale) का प्रयोग विशेषरूप से उपयुक्त समझा जाता है। प्राकृतिक मापदण्ड (Natural Scale) व अनुपात मापदण्ड (Ratio Scale) में मुख्य अन्तर यह है कि प्राकृतिक मापदण्ड कोटि-अक्ष की समान दूरियों पर समंकों की निरपेक्ष गतियाँ प्रर्दशित करता है जब कि अनुपात मापदण्ड उन्हीं दूरियों पर उनकी सापेक्ष गतियाँ दिखलाता है। वस्तुतः प्राकृतिक मापदण्ड गणितीय वृद्धि (Arithmetic Progression—1, 2, 3, 4, 5, 6) तथा अनुपात-मापदण्ड ज्यमितीय वृद्धि (Geometric Progression—1, 2, 4, 8, 16, 32) का प्रदर्शन करते हैं।

प्राकृतिक व अनुपात मापदण्डों के अन्तर को निम्न उदाहरण से स्पष्ट किया जा सकता है :—

Year	Total Sales in Rupees	Yearly Increase	% Increase
1953	10,000	—	—
1954	20,000	10,000	100.0
1955	30,000	10,000	50.0
1956	40,000	10,000	33.3
1957	50,000	10,000	25.0

इस उदाहरण से यह ज्ञात होता है कि प्रतिवर्ष विक्रय का परिमाण 10,000 रुपये से बढ़ रहा है, अर्थात विक्रय में समान रूप से वृद्धि हो रही है; किन्तु यदि वास्तव में देखा जाय तो प्रतिशत वृद्धि समान न होकर वर्ष प्रति वर्ष घटती जा रही है। प्राकृतिक मापदण्ड पर बनाया जाने वाला रेखाचित्र इस वृद्धि का वास्तविक प्रदर्शन करने में पूर्णतया असमर्थ होगा।

अनुपात मापदण्ड पर रेखाचित्र बनाने की रीतियाँ
(Methods for constructing Graphs on Ratio Scale)

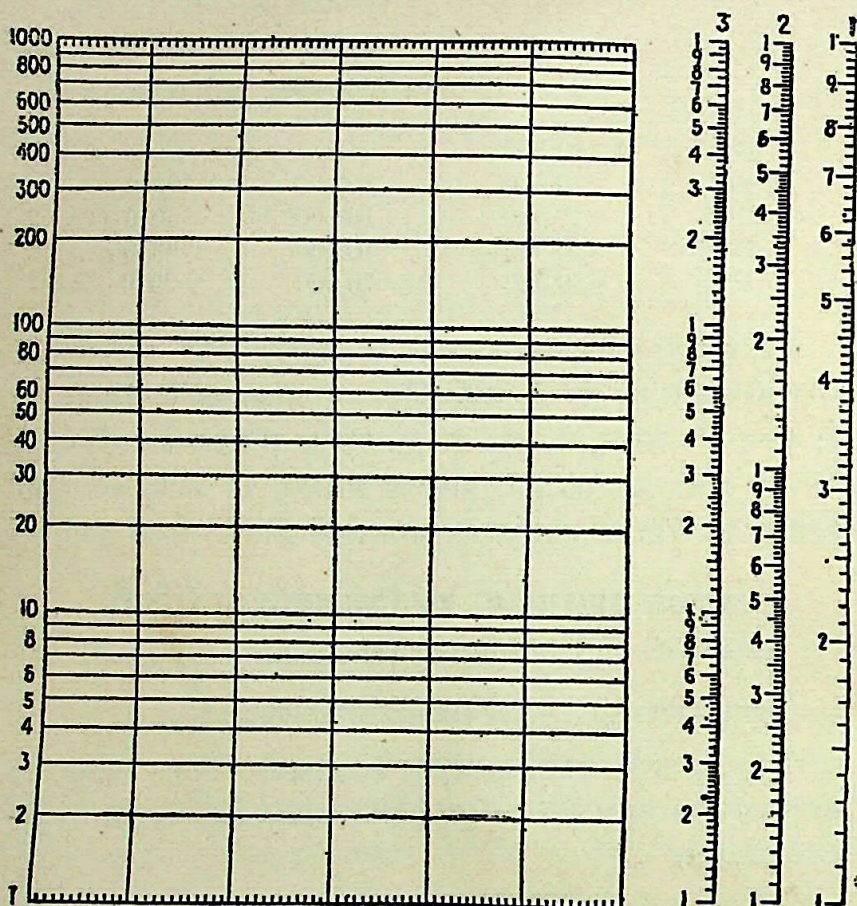
अनुपात मापदण्ड पर रेखाचित्र बनाने की दो रीतियाँ हैं :—

(१) वास्तविक समंकों को अनुपात के आधार पर निर्मित बिन्दुरेखीय पत्र पर प्रांकित करना (By plotting the actual figures on Ratio-ruled Paper)

(२) वास्तविक समंकों के लघुगणक लेकर उन्हें साधारण बिन्दुरेखीय पत्र पर प्रांकित करना (By plotting the logs of actual figures on ordinary Co-ordinate Paper)

अनुपात के आधार पर निर्मित बिन्दुरेखीय पत्र
(Ratio-ruled Paper)

अनुपात के आधार पर निर्मित बिन्दुरेखीय पत्र साधारण बिन्दुरेखीय पत्रों से भिन्न होता है। इसका एक नमूना पृष्ठ १५८ पर दिया जा रहा है :—

चित्र में कोटि-अक्ष का मापदण्ड 1 से 10, 10 से 100, 100 से 1000 आदि कई ढंगों से प्रदर्शित कर के दिखलाया गया है। इन्हें क्रमशः प्रथम, द्वितीय तथा तृतीय चक्र (Cycle) कहते हैं। समंकों के विस्तार (Range)

का ध्यान रखते हुये हमें इन चक्रों का प्रयोग करना पड़ता है। उदाहरण के लिये यदि प्रदर्शनार्थ समंकों के मूल्य 5 तथा 95 के अन्तर्गत हैं तो हमें दो चक्र वाले कोटि-अक्ष का प्रयोग करना पड़ेगा। इस सम्बन्ध में एक बात और ध्यान में रखनी चाहिये कि अनुपात-मापदण्ड में 0 नहीं होता।

लघुगणक द्वारा अनुपात-मापदण्ड की रचना
(Construction of Ratio-Scale by Logarithms)

इस रीति से अनुपात-मापदण्ड के रेखाचित्रों का प्रदर्शन करने के लिये पहले प्रदर्शनीय समंकों का लघुगणक निकाल लिया जाता है और फिर कोटि-अक्ष का मापदण्ड वास्तविक मूल्यों के आधार पर न ले कर इन्हीं लघुगणकों के आधार पर निश्चित कर लिया जाता है। तत्पश्चात सांख्यिकीय माला में

दिये गये लघुगणकों को प्रांकित करके कालिक चित्र की रचना कर ली जाती है। अनुपात-मापदण्ड के रेखाचित्रों को प्रदर्शित करने की यह रीति बड़ी सरल है, किन्तु ऐसे रेखाचित्रों का अध्ययन करना उन लोगों के लिये कठिन होता है जो लघुगणकों का प्रयोग नहीं जानते।

लघुगणक द्वारा अनुपात-मापदण्ड की रचना करने का ढंग निम्न उदाहरण से स्पष्ट हो जायगा :—

Illustration 14 :—

Given below are the economic indicators of Food Articles and Industrial Raw Materials (*Base*: Year ended August, 1939=100)*:—

At the end of March	Food Articles	Industrial Raw Materials
1951	441.1	655.8
1952	339.3	447.1
1953	362.6	455.7
1954	378.0	461.4
1955	293.0	400.1
1956	358.8	477.9
1957	402.1	519.9

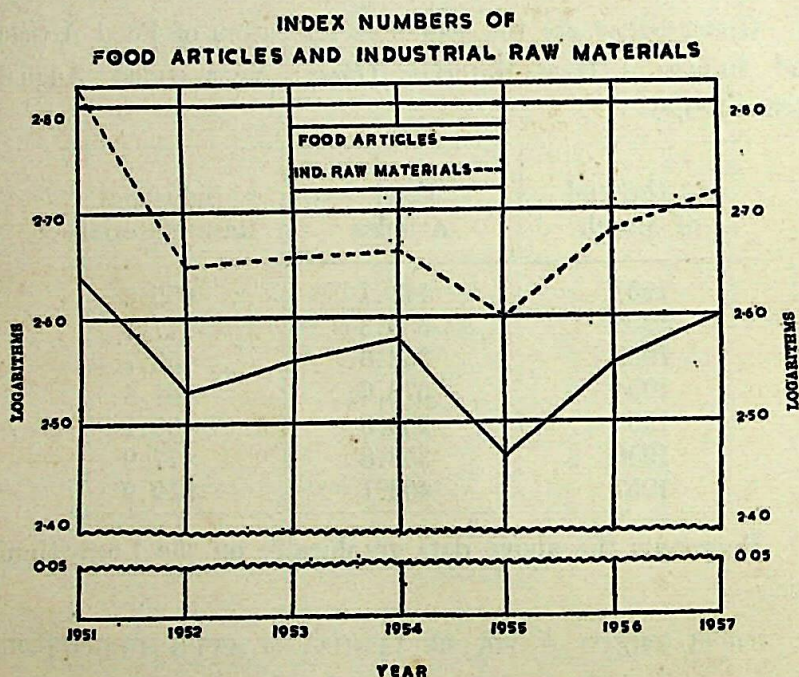
Represent the above data graphically on the Logarithmic Scale.

उपर्युक्त उदाहरण में दिये गये निर्देशांकों का अनुपात अथवा लघुगणक मापदण्ड पर विन्दुरेखीय प्रदर्शन करने के लिये सर्वप्रथम हमें उनका लघुगणक निकालना पड़ेगा—

Year		Food Articles	*log.*	Industrial Raw Materials	*log.*
1951	...	441.1	*2.6444*	655.8	*2.8169*
1952	...	339.3	*2.5302*	447.1	*2.6503*
1953	...	362.6	*2.5599*	455.7	*2.6580*

Source: **Report on Currency and Finance*, Reserve Bank of India, 1957.

1954	...	378.0	*2.5775*	461.4	*2.6637*
1955	...	293.0	*2.4669*	400.1	*2.6021*
1956	...	358.8	*2.5551*	477.9	*2.6794*
1957	...	402.1	*2.6042*	519.9	*2.7160*

अब लघुगणकों के आधार पर कोटि-अक्ष का मापदण्ड निर्धारित कर के तथा वर्षों को भुजाक्ष पर लेकर उपर्युक्त निर्देशांकों का प्रदर्शन इस प्रकार किया जा सकता है :—

लघुगणक-मापदण्ड के रेखाचित्रों को कभी-कभी अर्धलघुगणक-मापदण्ड (Semi-logarithmic) के रेखाचित्र भी कहा जाता है क्योंकि, इसमें कोटि-अक्ष का मापदण्ड तो लघुगणकों के आधार पर निर्धारित किया जाता है किन्तु भुजाक्ष प्राकृतिक-मापदण्ड पर ही रहता है।

अनुपात मापदण्ड के रेखाचित्रों का निर्वचन
(Interpretation of Graphs on Ratio Scale)

अनुपात-मापदण्ड के रेखा चित्रों का अध्ययन करते समय निम्नलिखित बातों का ध्यान रखना आवश्यक है :—

(१) यदि वक्र ऊपर की ओर उठ रहा है और करीव-करीब एक सरल रेखा के समान है, तो यह समझना चाहिए कि समंकों की क्रमिक वृद्धि की दर समान है (Series increasing by a Constant Rate)।

(२) इसके विपरीत यदि वक्र का उतार नीचे की ओर है और वह एक सरल रेखा के समान है, तो समंकों के क्रमिक ह्रास की दर समान है (Series decreasing by a Constant Rate)।

(३) फिर यदि वक्र ऊपर उठ कर दाहिनी ओर झुक रहा हो, तो यह समझना चाहिये कि समंकों के मूल्य में समान मात्रा में वृद्धि होती गई है (Series increasing by a Constant Amount)।

(४) इसके विपरीत यदि वक्र नीचे की ओर जाते समय बाईं ओर झुक रहा हो तो समंकों के मूल्य में समान मात्रा में ह्रास होता गया है (Series decreasing by a Constant Amount)।

(५) यदि एक ही रेखाचित्र में दो या दो से अधिक वक्र समानान्तर (Parallel) हों तो यह समझना चाहिए कि प्रत्येक माला में समंकों की क्रमिक वृद्धि अथवा ह्रास की दर में समानता है।

(६) इसके विपरीत यदि एक वक्र अन्य वक्रों की अपेक्षा अधिक ढालदार (Steeper) है तो उसमें वृद्धि-दर या ह्रास-दर की तीव्रता है।

(७) जिन स्थानों पर वक्रों के ढाल समान दृष्टिगोचर हों वहाँ वृद्धि-दर या ह्रास-दर की समानता समझनी चाहिये।

(८) किन्तु इसके विपरीत यदि वक्र का एक भाग दूसरे से अधिक ढालदार दृष्टिगोचर होता हो, तो जिस भाग में अधिक ढाल दिखलाई पड़े उसमें वृद्धि-दर या ह्रास-दर की तीव्रता समझनी चाहिये।

अनुपात मापदण्ड के रेखाचित्रों का उपयोग
(Uses of Graphs on Ratio Scale)

अनुपात मापदण्ड के रेखाचित्रों का उपयोग निम्न स्थितियों में विशेषरूप से उपयुक्त समझा जाता है :—

(१) जब दो या दो से अधिक सांख्यिकीय मालाओं का एक साथ ही प्रदर्शन करना हो किन्तु उनके मूल्यों में अत्यधिक अन्तर हो तो ऐसी स्थिति में रेखाचित्रों का निर्माण अनुपात मापदण्ड पर करना चाहिये।*

---

*It is far superior to the natural scale for effecting comparison when very small and very large quantities must be taken into account concurrently—**James A. Field.**

(२) अनुपात मापदण्ड का प्रयोग उस समय भी किया जा सकता है जब विभिन्न इकाई वाली सांख्यिकीय मालाओं का एक ही कोटि-अक्ष पर प्रदर्शन करना हो। हम देख चुके हैं कि जब समंकों का परिमाण व मूल्य दोनों प्रदर्शित करना था (पृष्ठ १४२) तो हमें दो कोटि-अक्ष लेने की आवश्यकता पड़ी थी। किन्तु इसके बजाय यदि परिमाण व मूल्यों के लघुगणक लेकर रेखाचित्र बनाया जाय तो हमें दो कोटि-अक्ष लेने की आवश्यकता नहीं पड़ेगी।

(३) निर्देशांकों (Index Numbers) का विन्दुरेखीय प्रदर्शन करते समय भी अनुपात मापदण्ड लेना उचित होता है। निर्देशांक सापेक्ष परिवर्तनों को ही महत्व देते हैं, अतः ऐसे रेखाचित्रों से उनके उच्चावचनों का भलीभांति अध्ययन किया जा सकता है।

(४) अनुपात मापदण्ड के रेखाचित्रों का आन्तरगणन (Interpolation) व बाह्यगणन (Extrapolation) के लिये भी प्रयोग किया जा सकता है।

(५) इस प्रकार के रेखाचित्रों में कोटि-अक्ष शून्य से प्रारम्भ न होने के कारण अत्यधिक विस्तार वाली समंक मालाओं को भी बिना असत्य आधार रेखा (False Base Line) लिये ही प्रदर्शित किया जा सकता है। साथ ही कोटि-अक्ष में शून्य की समस्या न होने से रेखाचित्रों के भ्रमात्मक होने का डर भी नहीं रहता।

(६) क्रय, विक्रय, उत्पादन की मात्रा व उत्पादन-व्यय, प्रत्यक्ष व अप्रत्यक्ष व्यय, कुल लाभ व शुद्ध लाभ, आदि व्यावसायिक समंकों का विन्दुरेखीय प्रदर्शन करने के लिये भी अनुपात-मापदण्ड के रेखाचित्रों का उपयोग किया जा सकता है।

अनुपात मापदण्ड के दोष (Defects of Ratio Scale)

अनुपात मापदण्ड के निम्नलिखित तीन दोष हैं :—

(१) ऐसे रेखाचित्रों द्वारा निरपेक्ष मूल्यवाली सांख्यिकीय मालाओं का तुलनात्मक अध्ययन सुचारुरूप से नहीं किया जा सकता।

(२) अनुपात-मापदण्ड के रेखाचित्रों में ऋणात्मक समंकों का प्रदर्शन नहीं किया जा सकता।

(३) ऐसे मापदण्ड के रेखाचित्रों को वे व्यक्ति नहीं समझ सकते जो लघुगणक (Logarithms) के प्रयोग से अनभिज्ञ हैं।

प्रश्न

1. What points must be taken into consideration for presenting the statistical data graphically?

सांख्यिकीय समंकों का विन्दुरेखीय प्रदर्शन करने के लिये किन बातों को ध्यान में रखना चाहिये ?

2. What do you mean by a 'False Base Line'? Explain its utility in the construction of graphs.

'असत्य आधार रेखा' से आप क्या समझते हैं ? रेखाचित्रों की बनावट में उसकी उपादेयता का वर्णन कीजिये ।

3. Distinguish between 'Natural Scale' and 'Ratio Scale.' Discuss their respective uses and abuses.

'प्राकृतिक मापदण्ड' व 'अनुपात मापदण्ड' का अन्तर बतलाइये । उनके सापेक्ष गुण-दोषों की विवेचना कीजिये ।

4. Write short notes on the following :—
निम्नलिखित पंर संक्षिप्त टिप्पणियाँ लिखिये :—

(*a*) Historigram (कालिक चित्र)
(*b*) Histogram (आवृत्ति चित्र)
(*c*) False Base Line (असत्य आधार रेखा)
(*d*) Semi-logarithmic Scale (अर्ध-लघुगणक मापदण्ड)
(*e*) Frequency Polygon (आवृत्ति-बहुभुज)
(*f*) Frequency Curve (आवृत्ति-वक्र)

5. Represent the following data graphically :—

EXPENDITURE ON GROSS DOMESTIC PRODUCT IN JAPAN

Year			Expenditure (1,000 million Yen)
1946	...	...	474
1947	...	...	1,309
1948	...	...	2,667
1949	...	...	3,376
1950	...	...	3,973
1951	...	...	5,543
1952	...	...	6,193
1953	...	...	7,148
1954	...	...	7,453
1955	...	...	8,214

(Source: *Economic Survey of the Asia and the Far East*, United Nations, 1957)

6. Represent the following graphically :—

EXPORT OF INDIAN RAW COTTON
IN THOUSANDS OF TONS

Year		Total Exports	Exports to Japan
1926-27	...	569	221
1927-28	...	479	287
1928-29	...	663	293
1929-30	...	727	329
1930-31	...	701	301
1931-32	...	423	193
1932-33	...	365	194
1933-34	...	504	197
1934-35	...	623	367
1935-36	...	606	314

(बी० कॉम०, बनारस, १९५०)

7. The following data relates to production of Pig iron and Steel ingots. Represent the figures graphically :—

Year		Pig iron (000 Tons)	Steel ingots (000 Tons)
1946	...	1,346.4	1,239.6
1947	...	1,320.0	1,256.4
1948	...	1,405.2	1,256.4
1949	...	1,527.6	1,357.4
1950	...	1,562.4	1,437.6
1951	...	1,708.8	1,500.0
1952	...	1,684.8	1,578.0
1953	...	1,654.8	1,507.2
1954	...	1,792.8	1,684.8

(Source: *Journal of Industry and Trade*, Government of India, 1956)

8. Represent the following data graphically :—

ADVANCES GRANTED BY PRIMARY AGRICULTURAL CREDIT SOCIETIES

(In crores of rupees)

Year	Bombay	Madras	All-India
1946-47	1.70	3.47	9.03
1947-48	2.22	4.40	10.45
1948-49	3.29	4.96	14.40
1949-50	5.29	6.44	17.99
1950-51	6.90	7.65	22.90
1951-52	8.12	7.33	24.21

(Source : *All India Rural Credit Survey, 1954*)

9. Represent graphically the following data showing the Index Numbers of Money Supply, Industrial Production and Wholesale Prices in India during 1956 :—

MONTHS	INDEX NUMBERS OF		
	Money Supply	Industrial Production	Wholesale Prices
January	123	116	96
February	123	127	96
March	128	122	98
April	130	128	99
May	130	143	99
June	128	143	101
July	126	154	104
August	125	126	101
September	123	139	101
October	124	125	101
November	126	135	103
December	127	129	102

(Source : *Report on Currency and Finance*, Reserve Bank of India, 1957)

10. The following table shows the Balance of Payments of Primary Producing Countries from 1950 to 1953 :—

(*Billions of United States Dollars*)

Period	Exports	Imports	Balance
1950			
First Half	10.9	10.7	+0.2
Second Half	14.0	12.7	+1.3
1951			
First Half	17.0	15.4	+1.6
Second Half	15.3	17.5	—2.2
1952			
First Half	14.9	17.6	—2.7
Second Half	14.7	15.6	—0.9
1953			
First Half	14.8	14.7	+0.1

Represent the data graphically.

(Source : *World Economic Report*, United Nations, 1952-53)

11. The following table gives the value of Imports and Exports of India for the year 1920-21 and 1921-22 in crores of rupees. Show graphically India's *Balance of Trade* :—

Months	1920-21		1921-22	
	Imports	Exports	Imports	Exports
April	22	28	26	18
May	24	28	21	20
June	26	28	19	17
July	28	21	18	17
August	31	20	21	20
September	29	22	20	20
October	32	21	23	18
November	32	19	26	20
December	32	20	23	22
January	31	19	28	23
February	25	18	20	22
March	24	19	21	28

(बी० कॉम०, राजपूताना, १९५५)

12. The following table shows the Revenue and Expenditure of the Government of India (on Revenue Account) in crores of rupees. Show the data graphically :—

Year	Revenue	Expenditure	Surplus (+) or Deficit (—)
1951-52 (Account	509.49	381.40	+128.09
1952-53 (Accounts)	429.60	390.67	+ 38.93
1953-54 (Accounts)	409.80	401.30	+ 8.50
1954-55 (Accounts)	449.86	416.35	+ 33.51
1955-56 (Accounts)	497.76	457.31	+ 40.45
1956-57 (Revised)	561.84	523.90	+ 37.94
1957-58 (Budget)	700.42	655.69	+ 44.73

(Source : *Report on Currency and Finance*, Reserve Bank of India, 1957)

13. Show by means of a graph the data given below :—

India's International Investment Position

(*Country-wise Summary*)

(Crores of Rupees)

—	31st December, 1953			31st December, 1955		
	Liabilities	Assets	Net	Liabilities	Assets	Net
U.K.	396.0	830.4	+434.4	443.6	852.1	+408.5
U.S.A.	125.9	43.7	— 82.2	140.6	·35.9	—104.7
Pakistan	56.0	321.7	+265.7	50.7	320.2	+269.5
Burma	4.9	51.6	+ 46.7	·5.5	3.9	— 1.6
IMF & IBRD	69.5	19.3	— 50.2	29.3	19.3	— 10.0
Others	74.2	17.3	— 56.9	96.6	20.4	— 76.2
Total	726.5	1284.0	+557.5	766.3	1251.8	+485.5

(Source : *Survey of India's Foreign Liabilities and Assets*, Reserve Bank of India, 1957)

14. Represent the following data graphically by means of Band Curves :—

INDIAN EXPORTS IN LAKHS OF RUPEES

Year		U.S.A.	Canada	Argentina	Australia
1948-49	...	7,068	839	1,698	2,665
1949-50	...	8,143	1,106	778	2,539
1950-51	...	11,538	1,379	1,065	3,041
1951-52	...	13,236	1,629	1,763	4,763
1952-53	...	11,275	1,284	693	1,698
1953-54	...	8,995	1,311	1,957	1,756
1954-55	...	8,738	1,737	1,251	2,445

(Source : *Journal of Industry and Trade*, Government of India, 1956)

15. The following table shows the *Highest* and *Lowest* prices of Silver in New York, per fine ounce :—

Year		Highest *cents*	Lowest *cents*
1951	...	90.16	80.00
1952	...	88.00	82.75
1953	...	85.25	83.25
1954	...	85.25	85.25
1955	...	92.00	85.25
1956	...	91.63	90.00
1957	...	91.00	90.00

Represent the above data graphically.

(Source : *Report on Currency and Finance*, Reserve Bank of India, 1957)

16. Represent the following data graphically :—

INDIAN EXPORT OF MICA

Year		Quantity ('000 Cwts)	Value (Lakhs of Rupees)
1948-49	...	340	594
1949-50	...	298	685
1950-51	...	407	1,000
1951-52	...	408	1,321
1952-53	...	284	901
1953-54	...	255	800
1954-55	...	357	659

(Source : *Journal of Industry and Trade*, Government of India, 1956)

17. You are asked to plot a series of monthly figures of sales of a product *A* (in rupees) and the corresponding tonnages, using graph paper divided in inches and tenths. Sales fluctuate round an average value of Rs. 5,000 monthly and tonnages round an average of 1,000 monthly.

Draft a suitable layout, and justify in detail the scales you have chosen.

आप से किसी निर्मित-वस्तु के विक्रय (रुपये में) व उसकी वजन (टन में) से सम्बन्धित मालाओं को एक ऐसे विन्दुरेखीय पत्र पर प्रांकित करने को कहा गया है जो इंच व उसके दसवें भाग में विभक्त है। विक्रय का मासिक मध्यक 5,000 रुपये तथा वजन का 1,000 टन है। विक्रय व वजन के उच्चावचन करीव-करीब इन्हीं मध्यकों के आस-पास होते हैं।

एक उपयुक्त चित्र का निर्माण कीजिये, तथा जो मापदण्ड आपने चुने हैं उनकी न्याययुक्तता की विशदरूप से व्याख्या कीजिये।

(बी० कॉम०, बनारस, १९५१)

18. Represent the following frequency distribution in a Histogram :—

Monthly income (in rupees)		Number of families
0—	...	93
50—	...	205
100—	...	157
150—	...	109
200—	...	64
250—	...	41
300—	...	22
350—400	...	9

(सर्टिफिकेट, बनारस, १९५८)

19. 120 individuals firing at a moving target miss by the following distances, the positive (+) and negative (—) signs corresponding to the shot being in advance or behind the target. Draw a Histogram :—

1 shot is between +10 and +15 inches wide
3 shots are between + 5 and +10 inches wide
20 shots are between 0 and + 5 inches wide
25 shots are between — 5 and 0 inches wide
22 shots are between —10 and — 5 inches wide
17 shots are between —15 and —10 inches wide
13 shots are between —20 and —15 inches wide

10 shots are between —25 and —20 inches wide
7 shots are between —30 and —25 inches wide
2 shots are between —35 and —30 inches wide
(Source: *Hyman Levy and E. E. Preidel*).

20. What are the advantages of the Ratio Scale over the Natural Scale? Plot the following data graphically on the Logarithmio Scale :—

Year	Total Notes issued in crores of Rs.	Notes in circulation in crores of Rs.
1933-34	177	167
1934-35	186	172
1935-36	196	167
1936-37	208	192
1937-38	214	185
1038-39	207	187
1939-40	252	237
1940-41	269	258
1941-42	421	410
1942-43	650	625

(बी० कॉम०, बनारस, १९५५)

21. Show by means of Logarithmic Curves the data given in the following table :—

INDEX NUMBERS OF INDUSTRIAL PRODUCTION
(*Base*: 1951=100)

Industry	1953	1954	1955	1956
Textiles	107.0	110.0	113.6	119.9
Sugar	115.8	97.4	143.0	174.9
Coal	104.5	107.2	111.4	114.9
Iron and Steel	95.7	113.2	113.3	118.0
Chemicals	130.0	141.1	159.0	170.1
Automobiles	62.5	64.9	103.7	144.3
Rubber	108.8	127.7	140.2	151.6
Cement	118.3	137.6	140.4	154.2

(Source: *Monthly Statistics of the Production of Selected Industries of India*—Ministry of Commerce and Industry.

अध्याय ८

समंकों का चित्रों द्वारा प्रदर्शन

(Diagrammatic Presentation of Statistics)

(सांख्यिकी में चित्रों के उपयोग—चित्रों की सीमायें—चित्र बनाने के साधारण नियम—चित्रों के भेद—एक माप वाले चित्र—सरल स्तम्भ चित्र—विविध गुण वाले स्तम्भ चित्र—दो दिशा वाले स्तम्भ चित्र—अन्तर्विभक्त स्तम्भ चित्र—अन्तर प्रदर्शित करने वाले स्तम्भ चित्र—जनसंख्या का स्तूप—प्रतिशत के आधार पर निर्मित अन्तर्विभक्त स्तम्भ चित्र—लाभालाभ चित्र—दो माप वाले चित्र—आयत चित्र—वर्ग चित्र—वृत्त चित्र—कोण चित्र—तीन माप वाले चित्र—घन चित्र—चित्र-लेख—मानचित्र-लेख—प्रश्न)

सांख्यिकी में चित्रों के उपयोग

(Uses of Diagrams in Statistics)

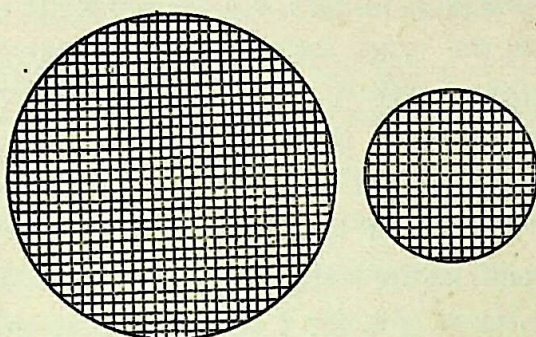
सांख्यिकी में रेखाचित्र व वक्रों के अतिरिक्त अनेक प्रकार के चित्रों का भी समंक-प्रदर्शन के लिये उपयोग किया जाता है। इन चित्रों में रेखाचित्र की अपेक्षा अधिक आकर्षण रहता है, अतः ये दर्शकों को प्रभावित करने में विशेषरूप से सफल होते हैं। यद्यपि चित्रों की बनावट में रेखाचित्र के समान गणितीय शुद्धता नहीं रहती, फिर भी इनको देख कर समंकों की विशेषतायें अच्छी तरह समझी जा सकती हैं। चित्रों में कई प्रकार के रंगों का प्रयोग किया जाता है जिससे उनका आकर्षण व प्रभाव और भी बढ़ जाता है। वर्तमान समय में तो शायद ही कोई व्यावसायिक अथवा आर्थिक पत्रिका होगी जिसमें महत्वपूर्ण समंकों का प्रदर्शन करने के लिए चित्रों का उपयोग न किया गया हो। विज्ञापन व प्रचार के लिए तो चित्र अत्यन्त ही लाभप्रद सिद्ध होते हैं। सरकार कृषि, उत्पादन, आयात, निर्यात, आर्थिक-नियोजन आदि से सम्बन्धित समंकों का प्रदर्शन करने के लिए चित्रों का विशेषरूप से उपयोग करती है। अन्य संस्थाएँ, जैसे रेलवे, बीमा-कम्पनियाँ, बैंक, आदि भी इनका अधिकाधिक उपयोग करती हैं। वस्तुतः चित्र समंकों में नवजीवन ला देते हैं। चित्रों की महत्ता का वर्णन करते हुए एम० जे० मोरोनी नामक सांख्यिक

ने बड़े ही सुन्दर व भावपूर्ण विचार प्रकट किए हैं, जिनका उल्लेख नीचे किया जा रहा है।*

चित्रों की सीमायें (Limitation of Diagrams)

किन्तु चित्रों द्वारा समंक-प्रदर्शन की सीमायें भी हैं। उनके द्वारा केवल समंकों की स्थूल विशेषतायें ही बतलाई जा सकती हैं, उनकी आंकिक यथार्थता नहीं जानी जा सकती। चित्रों द्वारा हम यह नहीं जान सकते कि समंकों का वास्तविक मूल्य क्या है। यदि एक ही मापदण्ड पर संसार के विभिन्न देशों की अलग-अलग जनसंख्या दिखलाई जाय तो हमें केवल यही ज्ञात हो सकता है कि अमुक देश की जनसंख्या अधिक है तथा अमुक देश की कम, अथवा हम यह कह सकते हैं कि इस देश की जनसंख्या इतने लाख है। हम यह भी बतला सकते हैं कि उनकी सापेक्ष महत्ता क्या है। परन्तु चित्रों द्वारा हम यह नहीं जान सकते कि प्रत्येक देश की इकाई तक शुद्ध जनसंख्या क्या है। कभी कभी एक ही चित्र द्वारा समंक की अनेक विशेषतायें दिखलाने का प्रयत्न किया जाता है जिसके फलस्वरूप चित्र इतने क्लिष्ट और भ्रमात्मक हो जाते हैं कि उनसे कोई लाभ उठाना कठिन हो जाता है। फिर मापदण्ड में थोड़ा भी परिवर्तन होने पर कभी कभी चित्रों के स्वरूप में अत्यधिक अन्तर आ जाता है जिसके कारण समंकों की वास्तविक विशेषतायें समझना कठिन हो जाता है। विज्ञापनकर्ता अथवा राजनैतिक दलों के सदस्य इस प्रकार का दुरुपयोग करते हैं। इस सम्बन्ध में एक बात यह भी ध्यान रखने योग्य है कि ज्यामिति (Geometry) में कुछ प्रारूप (Forms) ऐसे भी होते हैं जो कभी कभी शुद्ध होते हुए भी भ्रामक निष्कर्ष सूचित करते हैं। आगे दो वृत्त दिये गये हैं जिनकी त्रिज्यायें (Radii) क्रमश: 0·8" और 0·4" की हैं किन्तु दूसरे वृत्त का क्षेत्रफल पहले वृत्त के क्षेत्रफल के आधे से बहुत कम ज्ञात होता है :—

---

*Cold figures are uninspiring to most people. Diagrams help us to see the *pattern and shape* of any complex situation. Just as a map gives us a bird's eye view of wide stretch of country, so diagrams help us to visualize the *whole meaning* of a numerical complex *at a single glance.* Give me an undigested heap of figures and I cannot see the wood for the trees. Give me a diagram and I am positively encouraged to forget detail until I have a real grasp of the overall picture. Diagrams register a meaningful impression almost before we think—**Moroney.**

अतः चित्रों द्वारा समंक-प्रदर्शन की इन सीमाओं का ध्यान रखना अति आवश्यक है।

चित्र बनाने के साधारण नियम

(General Rules for Diagrammatic Presentation)

चित्रों द्वारा समंक-प्रदर्शन के उपर्युक्त लाभ तभी प्राप्त किये जा सकते हैं जब उन्हें वैज्ञानिक ढंग से आकर्षक बनाने का प्रयत्न किया जाय, अन्यथा उनको बनाने में जो धन, समय तथा श्रम लगाया जायगा वह निरर्थक होगा। चित्रों का आकार सरल होना चाहिये किन्तु साथ ही यह ध्यान रहे कि वे पूर्णरूप से प्रभावोत्पादक हों। अतः चित्रों को बनाते समय इन नियमों का पालन करना आवश्यक है :—

(१) आकार (Size)—चित्र का आकार ऐसा होना चाहिये कि वह दर्शकों का ध्यान आकृष्ट कर सके। चित्र न तो बहुत बड़े होने चाहिये और न बहुत छोटे। यदि चित्रों को दीवाल पर लगाना है तो उन्हें बड़े आकार का बनाना चाहिये, परन्तु यदि उनको पत्र-पत्रिकाओं में देना है तो उनका आकार छोटा होना चाहिये। इस बात का पूरा-पूरा ध्यान रहे कि चित्र कागज के मध्य में बनाये गये हैं।

(२) शीर्षक (Heading)—प्रत्येक चित्र के ऊपर एक संक्षिप्त व स्पष्ट शीर्षक होना चाहिये, जो यह सूचित करे कि वह चित्र क्या प्रदर्शित कर रहा है। यदि विशेष आवश्यकता पड़े तो उप-शीर्षक भी दिये जा सकते हैं। शीर्षक सुन्दर और मोटे अक्षरों में होना चाहिये जिससे लोगों की दृष्टि उस पर पड़ सके।

(३) **मापदण्ड (Scale)**—प्रत्येक चित्र को बनाने के पूर्व उस मापदण्ड को निश्चित कर लेना चाहिये जिसके आधार पर चित्र बनाना है। चित्र ऐसा होना चाहिये जो समंकों के बारे में अधिक से अधिक सूचना दे सके। अतः उसमें लम्बाई, चौड़ाई, ऊँचाई अथवा मोटाई के मापदण्ड का स्पष्ट होना अति आवश्यक है। जहाँ तक हो सके चित्रों की ऊँचाई का मापदण्ड बाईं ओर नीचे से ऊपर की ओर (Vertical Scale) तथा मोटाई या चौड़ाई का मापदण्ड बाईं ओर से दाईं ओर (Horizontal Scale) को लेना चाहिये। मापदण्ड को बीच बीच में अंकित भी कर देना चाहिये जिससे चित्र का अध्ययन करने में सुविधा हो। मापदण्ड के सम्बन्ध में जो नियम पिछले अध्याय में बतलाये गये हैं उनका ध्यान रखना आवश्यक है।

(४) **चित्र-कला (Drawing)**—चित्रों को बनाने के लिये चित्रकला तथा ज्यामिति में प्रयोग किये जाने वाले यंत्रों का प्रयोग करना चाहिये। प्रत्येक चित्र के विभिन्न विभागों व उप-विभागों को प्रदर्शित करने के लिये विभिन्न प्रकार के रंगों का प्रयोग करना चाहिये। रंगों के अभाव में विन्दुओं, रेखाओं या चारखानों (Cross-hatching) आदि का प्रयोग करना चाहिये। चित्र में विशेष आकर्षण लाने के लिये उसके चारो ओर मोटी रेखायें बना देनी चाहिये।

(५) **संकेत (Index)**—प्रत्येक चित्र में जिन रंगों, रेखाओं, विन्दुओं या चारखानों का प्रयोग किया गया हो उनके अर्थ को स्पष्ट करने के लिये उसके नीचे संकेत देना चाहिये, जिससे उन संकेतों का ध्यान रखते हुये लोग उस चित्र की विशेषताओं को समझने का प्रयास करें।

(६) **समंकों का प्रदर्शन (Presentation of Data)**—यदि आवश्यक प्रतीत हो तो चित्र में उन समंकों को भी प्रदर्शित कर देना चाहिए जिनके आधार पर उसे बनाया गया है। इससे चित्रों का महत्व बढ़ जाता है और उनको समझने में सुविधा होती है।

(७) **मितव्यता (Economy)**—अन्त में इस बात का भी ध्यान रखना चाहियें कि चित्रों द्वारा समंक-प्रदर्शन में धन, समय और श्रम का कम से कम व्यय हो। चित्र जितने ही कलात्मक होते हैं उनके प्रदर्शन पर उतना ही अधिक व्यय करना पड़ता है।

चित्रों के भेद (Types of Diagrams)

समंकों की प्रकृति के अनुसार अनेक प्रकार के चित्र बनाये जा सकते हैं। इस अध्याय में निम्न श्रेणियों के चित्रों का अध्ययन किया जायगा :—

(१) एक माप वाले चित्र (One-dimensional Diagram)

(२) दो माप वाले चित्र (Two-dimensional Diagram)

(३) तीन माप वाले चित्र (Three-dimensional Diagram)

(४) चित्र-लेख (Pictogram)

(५) मानचित्र-लेख (Cartogram)

एक माप वाले चित्र (One-dimensional Diagram)

जैसा इनके नाम से ही स्पष्ट है इन चित्रों को बनाने में केवल एक माप का ही प्रयोग किया जाता है, और वह माप रेखाओं (Lines) या स्तम्भों (Bars) की ऊँचाई है। यद्यपि स्तम्भों मे चौड़ाई (Width) भी दिखलाई जाती है, तथापि उसका चित्रों पर कोई प्रभाव नहीं रहता। स्तम्भों की चौड़ाई केवल उनमें स्पष्टता लाने के लिये ही रखी जाती है। अतः यह ध्यान रखना चाहिये कि ऊँचाई तो हमेशा समंकों की सापेक्ष-महत्ता के अनुसार रखी जाती है किन्तु उनकी चौड़ाई समान रहती है। साधारणतः स्तम्भों को अधिक मोटा या चौड़ा नहीं रखना चाहिये।

एक माप वाले चित्रों को पुनः निम्न श्रेणियों में बाँटा जा सकता है :—

(अ) सरल स्तम्भ चित्र (Simple Bar Diagram)

(ब) विविध-गुण वाले स्तम्भ चित्र (Multiple Bar Diagram)

(स) अन्तर्विभक्त स्तम्भ चित्र (Sub-divided Bar Diagram)

(द) लाभालाभ चित्र (Profit and Loss Diagram)

(इ) प्रतिशत के आधार पर निर्मित अन्तर्विभक्त स्तम्भ चित्र (Sub-divided Bar Diagram drawn on the Percentage basis)

सरल स्तम्भ चित्र (Simple Bar Diagram)

सरल स्तम्भ चित्र में समान चौड़ाई वाले अनेक स्तम्भों का प्रदर्शन किया जाता है। ऐसे चित्र का निर्माण करने के लिये किसी साधारण या विन्दुरेखीय

पत्र पर एक ऐसा मापदण्ड लेना चाहिये जिसके आधार पर सभी समंकों के लिये उनकी सापेक्ष महत्ता के अनुसार स्तम्भों की रचना की जा सके। इस सम्बन्ध में यह याद रखना चाहिये कि सरल स्तम्भ चित्र द्वारा समंकों के केवल एक ही गुण का प्रदर्शन किया जा सकता है। मापदण्ड निश्चित करते समय सर्वप्रथम सबसे बड़े और सबसे छोटे स्तम्भ की ऊँचाई क्या होगी इसका अनुमान लगा लेना चाहिये। यह अनुमान सबसे बड़े और सबसे छोटे मूल्य वाले समंकों से लगाया जा सकता है। निश्चित किये गये मापदण्ड का कोटि-अक्ष (Ordniate) पर प्रदर्शन करने के उपरान्त भुजाक्ष (Abscissa) पर स्तम्भों की चौड़ाई लेनी चाहिये। एक स्तम्भ को दूसरे स्तम्भ से अलग प्रदर्शित करने के लिये उनके बीच-बीच में थोड़ा रिक्त स्थान छोड़ देना चाहिये। फिर लम्बवत समानान्तर रेखायें खींच कर विभिन्न स्तम्भों की रचना कर लेनी चाहिये। चित्र का आकर्षण बढ़ाने के लिये इन स्तम्भों को रंगा भी जा सकता है, किन्तु यह ध्यान रहे कि सब स्तम्भों में एक ही प्रकार का रंग होगा, क्योंकि वे समंकों के एक ही गुण विशेष का प्रदर्शन कर रहे हैं। सरल स्तम्भ चित्र की रचना निम्न उदाहरण से स्पष्ट हो जायगी :—

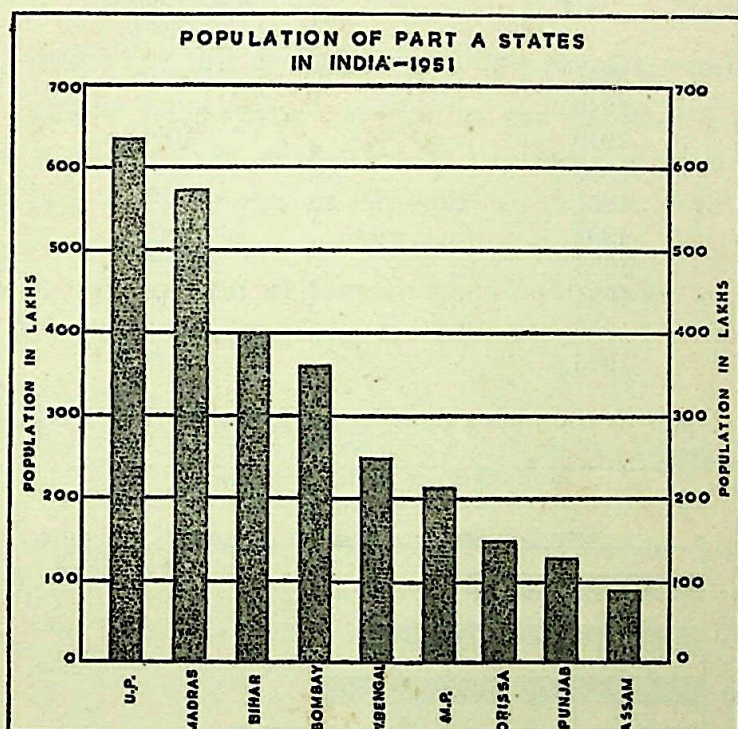
Illustration 1 :—

Represent the following data diagrammatically :—

Population of Part A States of India in 1951

States			Population in Lakhs
Assam	...	...	90.44
Uttar Pradesh	...	...	632.16
Orissa	...	...	146.46
West Bengal	...	...	248.10
Punjab	...	...	126.41
Bombay	...	...	359.56
Bihar	...	...	402.26
Madras	...	...	570.16
Madhya Pradesh	...	...	212.48

Source :—*Census of India,* 1951.

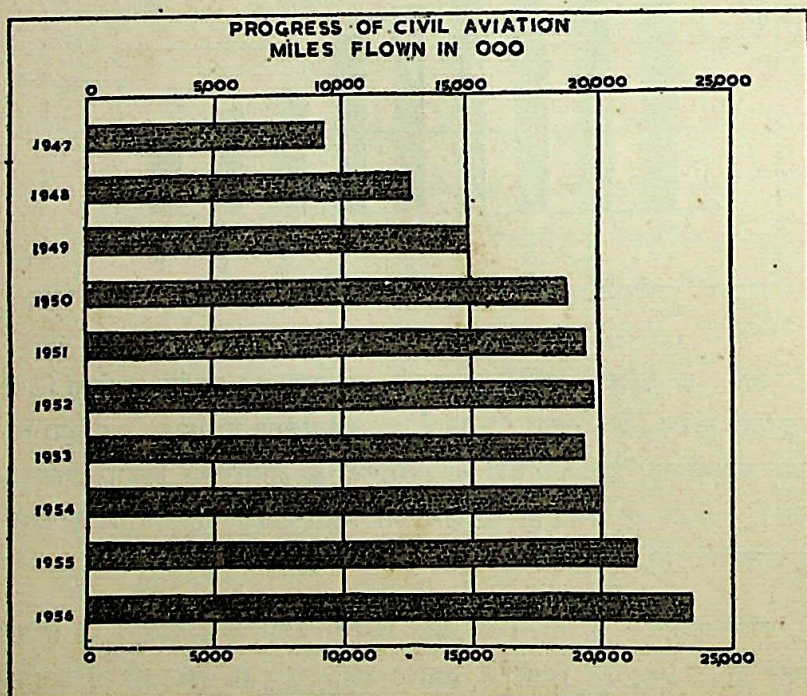
सरल स्तम्भ चित्र द्वारा समस्त राज्यों की जनसंख्या का प्रदर्शन इस प्रकार किया जायगा :—

ऊपर के चित्र में प्रत्येक राज्य की जनसंख्या का प्रदर्शन करने के लिये एक-एक स्तम्भ की रचना की गई है। तुलनात्मक अध्ययन की सुविधा के लिए स्तम्भों का क्रम जनसंख्या की विशालता के आधार पर निर्धारित किया गया है। चित्र को देखते ही यह ज्ञात हो जाता है कि भारत में उत्तर प्रदेश की जनसंख्या सबसे अधिक और आसाम की सबसे कम है

कभी कभी स्तम्भों का निर्माण खड़ी दशा के बजाय लेटी दशा में भी किया जाता है। अतः ऐसे चित्रों में आधार रेखा नीचे से ऊपर की ओर तथा मापदण्ड की रेखा बाईं ओर से दाहिनी ओर को ली जाती है। स्तम्भों की शेष रचना उसी प्रकार की जाती है।

Illustration 2 :—

The following figures show the progress of Civil Aviation in India from 1947 to 1956* :—

Year			Miles Flown (*in 000*)
1947	...	...	9,362
1948	...	...	12,649
1949	...	...	15,098
1950	...	...	18,896
1951	...	...	19,498
1952	...	...	19,562
1953	...	...	19,202
1954	...	...	19,798
1955	...	...	21,266
1956	...	...	23,418

Represent the above data by a Horizontal Bar Diagram.

*Source: *Hindustan Year Book*, 1958

प्रथम चित्र की भाँति इस चित्र में स्तम्भों का प्रदर्शन किसी क्रम से नहीं किया गया है। कालान्तर माला के चित्रों में वर्षों की संततता (Continuity) बनाये रखना आवश्यक होता है, इसलिये स्तम्भों की रचना किसी क्रम में नहीं की जा सकती।

विविध गुण वाले स्तम्भ-चित्र (Multiple Bar Diagram)

समंकों के विविध गुणों का पारस्परिक एवं तुलनात्मक चित्रण करने के लिये कभी कभी स्तम्भों को सटा कर भी रखा जाता है। ऐसे चित्र में एक वर्ष से सम्बन्धित विभिन्न गुण वाले स्तम्भों को अलग-अलग रंगों में रंग कर एक साथ प्रदर्शित किया जाता है, और फिर थोड़ा रिक्त स्थान छोड़ कर दूसरे वर्ष के स्तम्भों को दिखलाया जाता है। निम्नलिखित उदाहरण में विविध-गुण वाले स्तम्भों की रचना की गई है :—

Illustration 3 :—

Represent the following data by a Multiple Bar Diagram :—

OUTPUT OF COAL, SALT AND SUGAR IN AFGANISTAN*

Items	1951/52	1952/53	1953/54	1954/55	1955/56
			(Thousands of Tons)		
Coal ...	14.1	14.5	16.8	15.4	22.1
Salt ...	18.5	16.6	16.8	24.1	22.6
Sugar ...	4.0	3.3	4.9	5.3	4.9

पृष्ठ १८० पर दिये गये चित्र में प्रति वर्ष कोयले, नमक व चीनी का कितना उत्पादन हुआ है, इसका प्रदर्शन तीन प्रकार के रंगों से रंगे हुये स्तम्भों द्वारा किया गया है। तीन स्तम्भों को सटाकर रखने के पश्चात् कुछ स्थान रिक्त छोड़ा गया है। ऐसे चित्र को मिश्रित स्तम्भ-चित्र (Compound Bar Diagram) भी कहते हैं।

दो दिशा वाले स्तम्भ-चित्र (Duo-Directional Bar Diagram)

अभी तक जिन चित्रों का निर्माण किया गया है उनमें स्तम्भों की रचना एक ही दिशा में की गई है। आवश्यकता पड़ने पर एक ही वर्ष अथवा

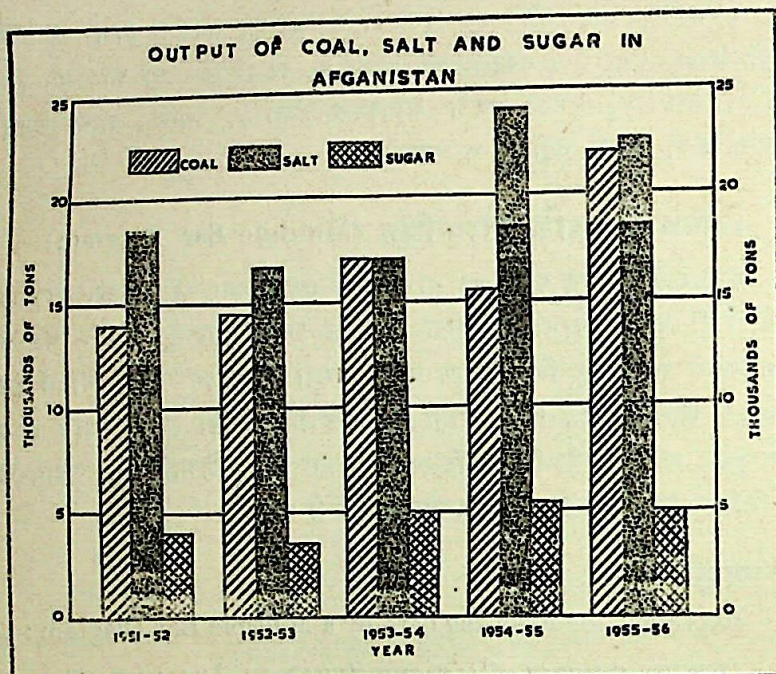
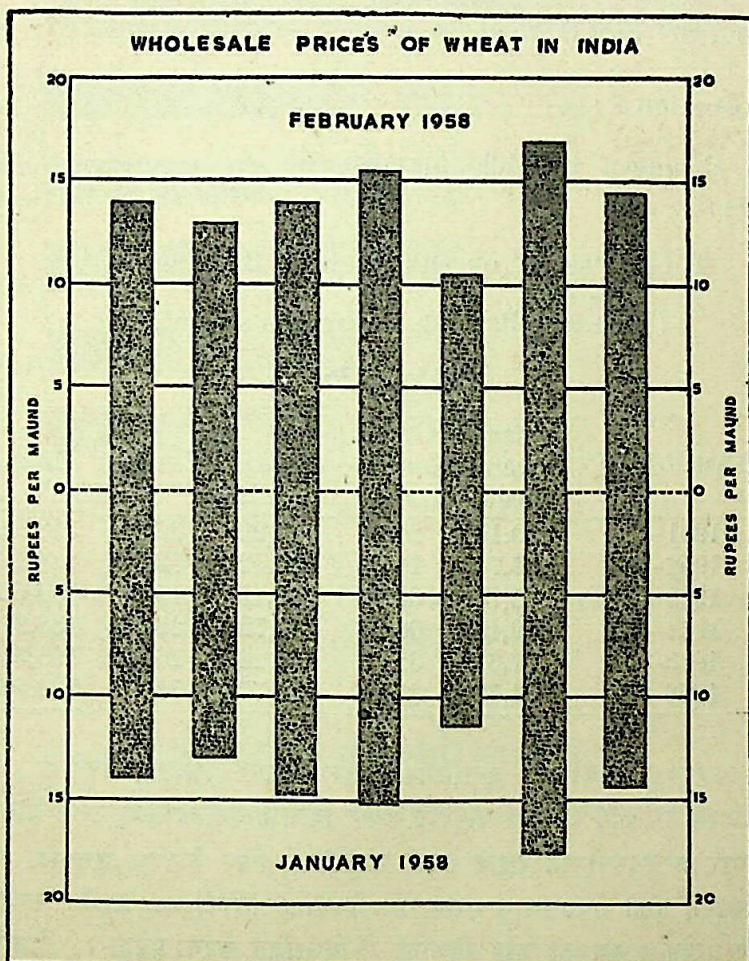
* Source : *Economic Survey of Asia and the Far East,* 1957

एक ही विषय से सम्बन्धित दो समंकों का प्रदर्शन करने के लिये विपरीत दिशाओं में भी स्तम्भों की रचना की जा सकती है। इसके लिये आधार रेखा को मध्य में बनाने की आवश्यकता पड़ती है। इस आधार के नीचे व ऊपर दोनों दिशाओं में मापदण्ड लिये जाते हैं। ऐसे चित्र को बनाने का ढंग निम्न उदाहरण में स्पष्ट किया जा रहा है :—

Illustration 4 :—

The following table shows the wholesale prices of wheat in important wheat markets of India.† Represent the data by Duo-directional Bar Diagram :—

Market	Variety		January	February
			Rs.	Rs.
Bombay City	Imported	...	14.00	14.00
Saugar	Coarse	...	13.00	13.00
Abohar	Coarse	...	14.75	13.87

† Source : *Journal of Industry and Trade*, Government of India, 1958

Hapur	Average	...	15.23	15.50
Kotah	Coarse	...	11.50	10.50
Rajkot	Red	...	17.60	17.00
Delhi	Coarse	...	14.50	14.50

अन्तर्विभक्त स्तम्भ चित्र (Sub-divided Bar Diagram)

अन्तर्विभक्त स्तम्भों द्वारा समंकों के योग व उनके विभिन्न विभागों व उप-विभागों का बड़ा ही सुन्दर चित्रण होता है। सर्वप्रथम उनके योग के आधार पर खड़े या लेटे स्तम्भों की रचना कर ली जाती है, और फिर उन स्तम्भों में से विभिन्न भागों को काट लिया जाता है। तत्पश्चात इन भागों

को महत्व देने के लिए विविध रंगों से रंग दिया जाता है। निम्नलिखित उदाहरण में रिजर्व बैंक ऑफ इन्डिया की कुल जमा राशि (Deposits) का प्रदर्शन करने के साथ ही साथ यह भी दिखलाया जा रहा है कि कितना धन केन्द्रीय सरकार का, कितना अन्य सरकारों का, कितना बैंकों का व कितना अन्य संस्थाओं का जमा है :—

Illustration 5 :—

Represent the following data by means of Sub-divided Bars :—

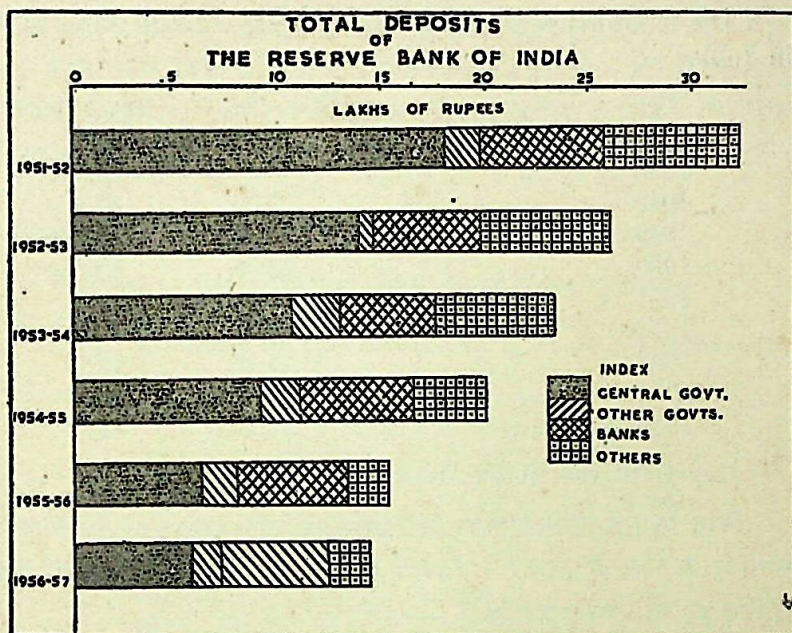
TOTAL DEPOSIT OF THE RESERVE BANK OF INDIA*

(Issue and Banking Departments combined)

Lakhs of Rupees

Last Friday	Central Govern-ment	Other Govern-ments	Banks	Others	Total
1951—52	180,16	25,06	46,99	65,90	318,11
1952—53	135,78	19,85	46,52	62,81	264,96
1953—54	65,77	62,59	42,41	43,76	214,52
1954—55	59,45	60,27	47,72	21,53	188,97
1955—56	67,34	62,03	53,24	16,68	199,30
1956—57	64,57	31,95	57,77	74,28	228,56

उपर्युक्त समंकों को अन्तर्विभक्त स्तम्भों द्वारा चित्रित करने के लिये सर्वप्रथम हमें कोई उपयुक्त मापदण्ड लेकर विभिन्न वर्षों के लिए उनके योग के आधार पर स्तम्भों की रचना करनी पड़ेगी। फिर केन्द्रीय सरकार, अन्य सरकारों, बैंकों तथा अन्य संस्थाओं की जमा राशियों का प्रदर्शन करने के लिए प्रत्येक स्तम्भ को चार विभागों में विभाजित करना पड़ेगा। विभाजन करते समय इस बात का ध्यान रहे कि एक विभाग के पश्चात ही दूसरे विभाग का प्रदर्शन होगा, और सब स्तम्भों में विभागों के क्रम समान होंगे। इस प्रकार निम्न चित्र की रचना होगी :—

*Source : *Report on Currency and Finance*, Reserve Bank of India, 1957

चित्र में प्रत्येक वर्ष के लिये लेटे स्तम्भों की रचना की गई है। इसी ढंग से खड़े स्तम्भों की भी रचना की जा सकती है।

अन्तर प्रदर्शित करने वाले स्तम्भ चित्र

(Bar Diagram showing Differences)

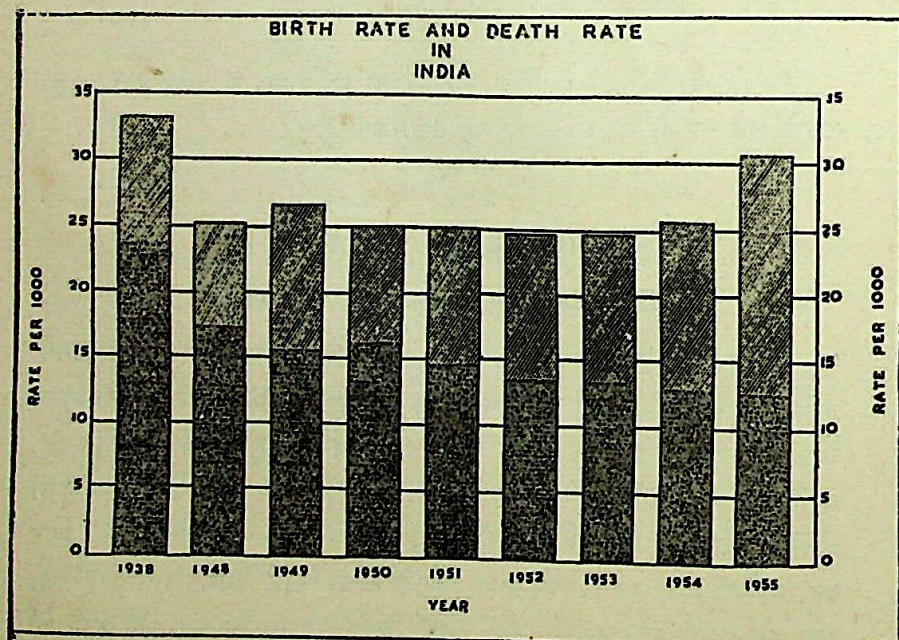
स्तम्भ-चित्रों द्वारा दो प्रकार के समंकों का चित्रण करने के साथ ही उनके आपसी अन्तर का भी चित्रण किया जा सकता है, जैसे आयात, निर्यात व व्यापार का अन्तर; आय, व्यय व बचत; जन्म-दर, मृत्यु-दर व जीवित-दर, आदि। इस प्रकार के समंकों का चित्रण करने के लिये पहले एक तथ्य (जो दोनों में बड़ा हो) को लेकर सरल स्तम्भों की रचना कर ली जाती है। फिर इन स्तम्भों में से दूसरे तथ्य के बराबर के खण्ड काट लिये जाते हैं। जो खण्ड इस प्रकार काटे जाते हैं उन्हें उनके विशेष रंग में रंग कर शेष भाग को दूसरे रंग में रंग दिया जाता है। ये भाग अन्तर का प्रदर्शन करते हैं।

Illustration 6 :—

The following table shows the Birth Rate and Death Rate in India* :—

Year			Birth Rate	Death Rate
			(*per thousand*)	
1938	...	...	33.3	23.7
1948	...	...	25.2	17.0
1949	...	...	26.4	15.8
1950	...	...	24.9	16.1
1951	...	...	24.9	14.4
1952	...	...	24.8	13.6
1953	...	...	24.8	13.5
1954	...	...	25.5	13.0
1955	...	...	30.5	12.7

Represent the above data diagrammatically.

निम्न चित्र में पहले जन्म-दर के आधार पर सरल स्तम्भों की रचना करके उनमें से मृत्यु-दर के बराबर के विभाग काट लिये गये हैं। शेष बचे हुये भाग जीवित-दर का प्रदर्शन कर रहे हैं :—

* Source : *Monthly Abstract of Statistics*, August, 1957

आयात, निर्यात व व्यापार के अन्तर का चित्रण करने के लिये भी यही रीति प्रयोग में लाई जाती है। किन्तु इसमें कभी आयात स्तम्भ ऊँचा बनाने की आवश्यकता पड़ती है तो कभी निर्यात स्तम्भ, क्योंकि व्यापार का अन्तर कभी अनुकूल व कभी प्रतिकूल होता रहता है। उदाहरण के लिये निम्नलिखित चित्र को देखिये :—

Illustration 7 :—

Represent the following data diagrammatically :—

INDIA'S BALANCE OF PAYMENTS WITH STERLING AREA ON CURRENT ACCOUNT

(Crores of Rupees)

Year	Imports c. i. f.	Exports f. o. b.	Balance of Trade
1948—49	454.4	275.0	—179.4
1949—50	329.3	291.6	—37.7
1950—51	330.2	351.4	+21.2
1951—52	376.7	397.5	+20.8
1952—53	281.8	306.2	+24.4
1953—54	302.3	291.2	—11.1
1954—55	357.4	339.7	—17.7
1955—56	357.2	331.2	—26.0

पृष्ठ १८६ पर निर्मित चित्र में प्रथम दो तथा अन्तिम तीन स्तम्भों के ऊपरी भाग आयात के रंग में रंगे गये हैं, जो यह चित्रित कर रहे हैं कि इन वर्षों में आयात की मात्रा निर्यात की अपेक्षा अधिक रही है। तीसरे, चौथे व पाँचवे स्तम्भों के ऊपरी भाग निर्यात की अधिकता का प्रदर्शन कर रहे हैं।

कभी कभी स्तम्भ चित्रों द्वारा केवल धनात्मक व ऋणात्मक अन्तरों का ही प्रदर्शन किया जाता है, जैसे ऊपर के चित्र की भाँति कुल आय, कुल व्यय व बचत या घाटे का साथ ही साथ प्रदर्शव न करके केवल बचत व घाटे का ही प्रदर्शन किया जाय। ऐसे चित्र का निर्माण करने के लिये आधार रेखा मध्य में लेकर उसके नीचे व ऊपर दोनों ओर मापदण्ड लेने की आवश्यकता

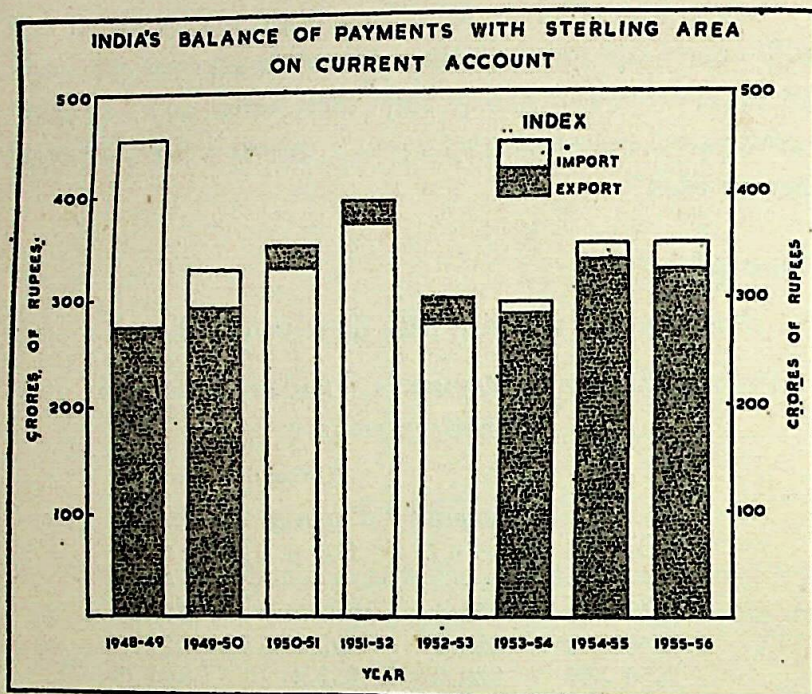
* Source : *India's Balance of Payments, 1948-49—1955-56*, Reserve Bank of India, 1957

पड़ती हैं। चित्र में धनात्मक व ऋणात्मक अन्तरों का प्रदर्शन एक ही रंग से किया जायगा, इसका ध्यान रखना चाहिये।

Illustration 8 :—

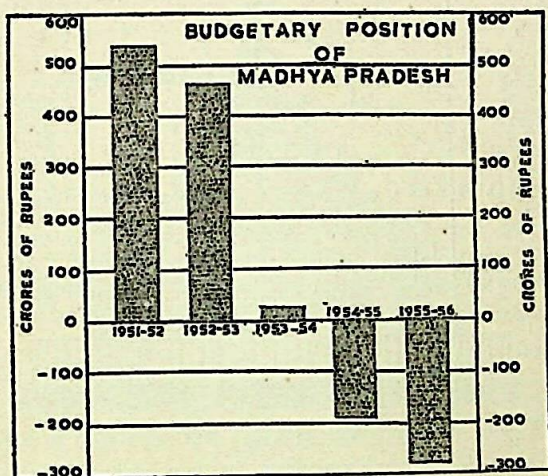
Given below are the figures relating to Revenue and Expenditure of Madhya Pradesh Government* :—

(Crores of Rupees)

Year	Revenue	Expen-diture	Surplus (+) or Deficit (—)
1951—52 (Accounts)	22.42	17.04	+5.38
1952—53 (Accounts)	22.95	18.30	+4.65
1953—54 (Accounts)	24.02	23.77	+0.25
1954—55 (Revised)	28.11	30.03	—1.92
1955—56 (Budget)	31.24	34.06	—2.82

Show by means of a Bar Diagram the Surplus and Deficit in the State Budget.

* Source : INDIA, 1956

मध्य प्रदेश के बजट में केवल बचत व घाटे का चित्रण करने के लिए निम्न स्तम्भ-चित्र की रचना की जायगी :—

जनसंख्या का स्तूप (Population Pyramid)

किसी देश अथवा स्थान में रहने वाले विभिन्न वय-वर्गों के स्त्री-पुरुषों का प्रदर्शन करने के लिये एक विशेष प्रकार का स्तम्भ चित्र बनाया जाता है जिसे जनसंख्या का स्तूप (Population Pyramid) कहते हैं। इसमें आधार रेखा को मध्य में लेकर उसके दोनों ओर लेटे स्तम्भों (Horizontal Bars) की रचना की जाती है, जो विभिन्न वय-वर्गों के स्त्री-पुरुषों का प्रदर्शन करते हैं। वय-वर्गों की संततता (Continuity) बनाये रखने के लिये स्तम्भों की रचना एक दूसरे के ऊपर सटा कर की जाती है। पृष्ठ १८७ पर दिया गया स्तूप भारत की जनगणना (1951) के आधार पर बनाया गया है* ।

कभी कभी स्तम्भों में विशेष सौंदर्य व स्पष्टता लाने के लिये लम्बाई व चौड़ाई के अतिरिक्त मोटाई भी दिखलाई जाती है। यह पहले ही बतलाया जा चुका है कि साधारण स्तम्भ चित्रों में केवल लम्बाई ही प्रधान रहती है, चौड़ाई केवल स्पष्टता के लिये दिखलाई जाती है। मोटाई दिखलाने का भी यही उद्देश्य है। अतः इसके लिये किसी मापदण्ड का ध्यान रखना आवश्यक नहीं होता। ऐसे चित्र का प्रदर्शन उदाहरण ९ में किया गया है :—

* Source : *Census of India*, 1951

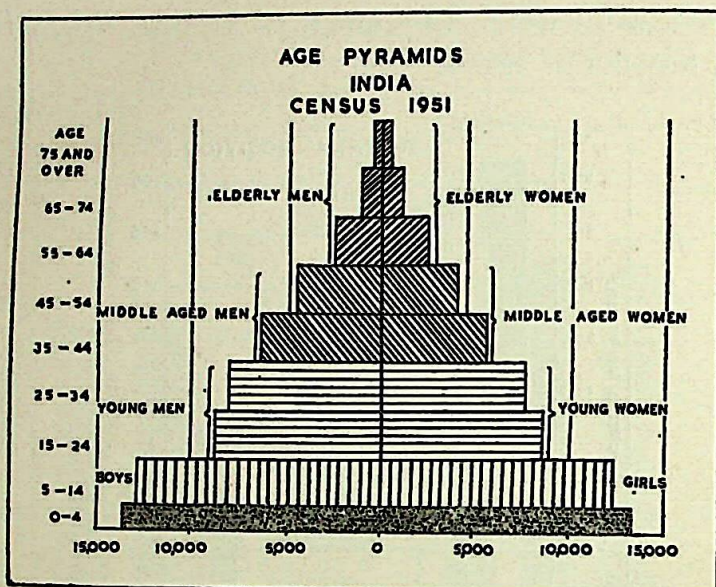
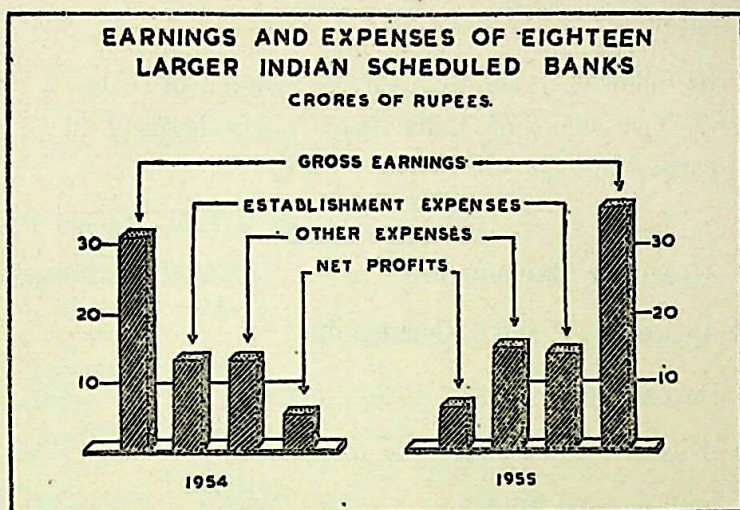



Illustration 9 :—

Represent the following data diagrammatically :—

EARNINGS AND EXPENSES OF EIGHTEEN LARGER INDIAN SCHEDULED BANKS†

	1954	1955
	(crores	*of rupees)*
1. Gross Earnings :—	*31.2*	*35.0*
(i) Interest and Discount ...	24.0	26.4
(ii) Other Earnings	7.2	8.6
2. Total Expenses :—	*25.9*	*29.3*
(i) Interest paid on Deposits...	9.0	10.3
(ii) Establishment Expenses ...	12.6	14.4
(iii) Other Expenses	4.3	4.6
3. Net Profits	*5.3*	*5.7*

† Source : *Trends and Progress of Banking in India during 1955,* Reserve Bank of India.

प्रतिशत के आधार पर निर्मित अन्तर्विभक्त स्तम्भ चित्र

(Sub-divided Bar Diagram drawn on percentage basis)

अभी तक जितने स्तम्भ चित्र बनाये गये हैं उनमें समंकों के निरपेक्ष (Absolute) मूल्यों का ही प्रदर्शन किया गया है। तुलनात्मक अध्ययन के विचार से समंकों के सापेक्ष (Relative) मूल्यों का प्रदर्शन करना अधिक उपयुक्त समझा जाता है। इसके लिये सभी स्तम्भों की ऊँचाई 100% के बराबर मान ली जाती है, और विभिन्न गुणों के निरपेक्ष मूल्य के आधार पर उन स्तम्भों का विभाजन करने के बजाय उनके प्रतिशतों की सहायता से स्तम्भों का विभाजन किया जाता है। प्रत्येक गुण का प्रतिशत ज्ञात करने के लिये समस्त गुणों के योग को 100% के बराबर मान लिया जाता है। तत्पश्चात पहले की ही भाँति विभिन्न भागों को उपयुक्त रंगों से रंग दिया जाता है।

इस प्रकार के स्तम्भ चित्रों का एक लाभ और है। साधारण अन्तर्विभक्त चित्रों द्वारा अति विशाल और अति छोटे परिमाण के समंकों का एक ही मापदण्ड पर प्रदर्शन करना कभी कभी कठिन हो जाता है। कुछ स्तम्भ तो इतने छोटे हो जाते हैं कि उनको पुनर्विभक्त करना असम्भव ज्ञात पड़ता है। किन्तु यदि उनके योग को 100% के बराबर मानकर उनके विभिन्न गुणों का प्रदर्शन करने का प्रयास किया जाय तो ऐसे छोटे से छोटे परिमाण वाले समंकों का भी सुन्दरता से चित्रण किया जा सकता है।

Illustration 10 :—

The following table gives the distribution of outlay in the two Five-Year Plans of India under major heads of development expenditure :—

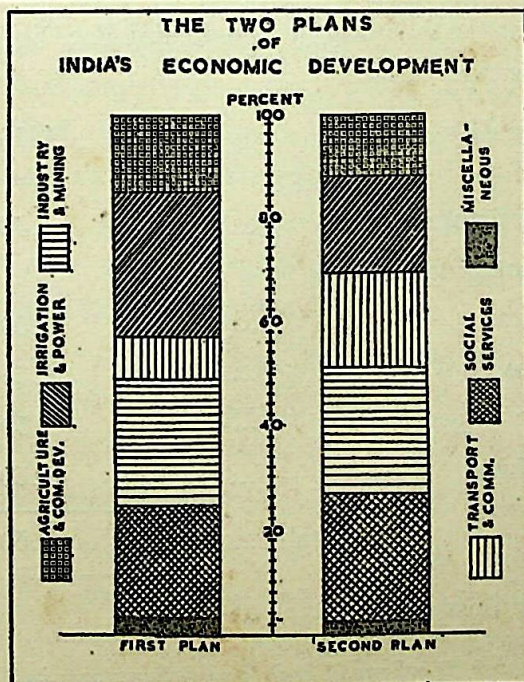
Heads of Expenditure	First Plan	Second Plan
	(in crores of Rupees)	
(a) Agriculture and Community Development	357	568
(b) Irrigation and Power ...	661	913
(c) Industry and Mining ...	179	890
(d) Transport and Communication	557	1,385
(e) Social Services	533	945
(f) Miscellaneous	69	99
Total ...	2,356	4,800

Represent the above information by a suitable diagram.

(बी० कॉम०, बनारस, १९५८)

इस उदाहरण में भारत की प्रथम व द्वितीय पंच-वर्षीय योजनाओं का आर्थिक चित्रण करना है। प्रतिशत के आधार पर निर्मित अन्तर्विभक्त स्तम्भों की रचना करने के लिये हमें ऐसे दो स्तम्भों की रचना करनी है जिनकी ऊँचाई तो कुछ भी ली जा सकती है, किन्तु वह 100% के बराबर होनी चाहिये। फिर इन स्तम्भों में से ऊपर अथवा नीचे की ओर से कृषि व सामुदायिक योजना, सिंचाई व शक्ति, आदि के प्रतिशत काट लेना पड़ेगा। अधिक श्रेयस्कर यह होगा कि निम्न ढंग की एक सारणी बना ली जाय। सुविधा के लिये सारणी में संचयी प्रतिशत (Cumulative %) भी ज्ञात कर लिये गये हैं :—

PLAN OUTLAY AND ALLOCATIONS

Heads of Expenditure	First Plan			Second Plan		
	Crores of Rs.	%	Cum. %	Crores of Rs.	%	Cum. %
	Rs. 2,356 Crores=100%			Rs. 4,800 Crores=100%		
(a) Agriculture and Community Development ...	357	15.1	15.1	568	11.8	11.8
(b) Irrigation and Power ...	661	28.1	43.2	913	19.0	30.8
(c) Industry and Mining ...	179	7.6	50.8	890	18.5	49.3
(d) Transport and Communication	557	23.6	74.4	1,385	28.9	78.2
(e) Social Services	533	22.6	97.0	945	19.7	97.9
(f) Miscellaneous	69	3.0	100.0	99	2.1	100.0
Total ...	2,356	100.0	—	4,800	100.0	—

लाभालाभ चित्र (Bilateral Diagram)

प्रतिशत के आधार पर बनाये गये स्तम्भ चित्रों का प्रयोग वस्तुओं के उत्पादन-व्यय व लाभ अथवा हानि का प्रदर्शन करने के लिये भी किया जाता है। अतः विक्रय-मूल्य को 100% के बराबर मान कर एक स्तम्भ बना लिया जाता है और उसमें से प्रत्यक्ष व अप्रत्यक्ष उत्पादन व्ययों के प्रतिशत के आधार पर खण्ड काट लिये जाते हैं। चूंकि वस्तु के विक्रय-मूल्य को 100% के बराबर माना जाता है, अतः उपर्युक्त खण्डों को काटने के बाद स्तम्भ का शेष बचा हुआ भाग लाभ का चित्रण करेगा। इसके विपरीत यदि स्तम्भ का कुछ भाग आधार रेखा के नीचे दिखलाना आवश्यक हो जाय, तो यह भाग हानि का चित्रण करेगा। व्यय के विभिन्न प्रतिशतों को काटने के पश्चात यदि स्तम्भ का कुछ भी भाग शेष न बचे तो उत्पादन की गई वस्तु का विक्रय करने पर न लाभ हुआ है न हानि। निम्नलिखित उदाहरण से लाभालाभ चित्र बनाने की रीति स्पष्ट हो जायगी :—

Illustration 11 :—

Represent the following by Sub-divided Bar Diagram drawn on the percentage basis :—

Particulars	1955 Rs.	1956 Rs.	1957 Rs.
Proceeds per fountain pen ...	*10.00*	*9.50*	*10.00*
Cost per fountain pen :—			
(*a*) Material	3.00	3.00	4.50
(*b*) Wages	2.00	2.50	3.00
(*c*) Other Expenses	1.00	1.50	2.00
(*d*) Finishing	2.00	2.50	2.50
Total ...	8.00	9.50	12.00
Profit (+) *or* Loss (—) ...	+2.00		—2.00

अब चित्र बनाने की सुविधा के लिये निम्न तालिका बना लेनी चाहिये :—

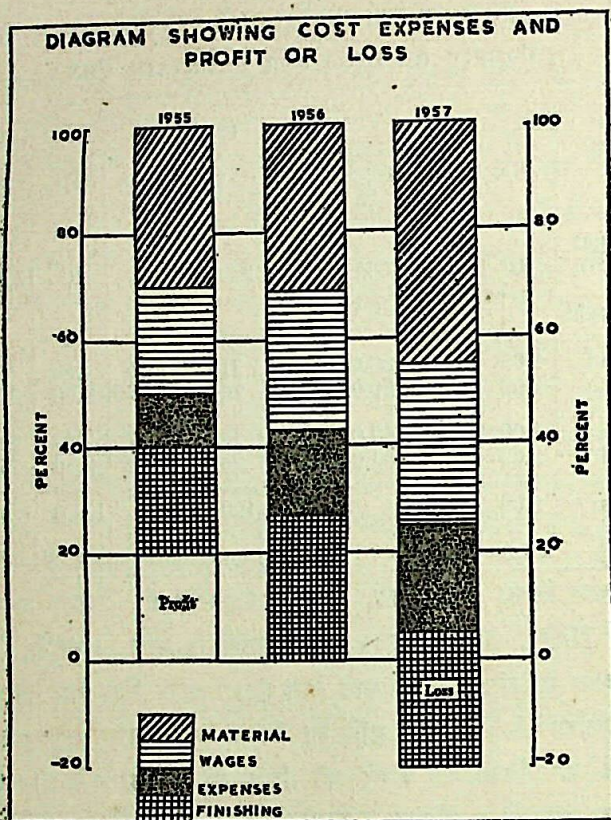
TABLE SHOWING PERCENTAGE COST, PROCEEDS AND PROFIT OR LOSS PER FOUNTAIN PEN

Particulars	1955			1956			1957		
	Rs.	%	Cum. %	Rs.	%	Cum. %	Rs.	%	Cum. %
Proceeds per Fountain pen	Rs. 10.00=100%			Rs. 9.50=100%			Rs. 12.00=100%		
Cost of production :—									
(a) Material	3.00	30.0	30.0	3.00	31.6	31.6	4.50	45.0	45.0
(b) Wages	2.00	20.0	50.0	2.50	26.3	57.9	3.00	30.0	75,0
(c) Other Expenses	1.00	10.0	60.0	1.50	15.8	73.7	2.00	20.0	95.0
(d) Finishing	2.00	20.0	80.0	2.50	26.3	100.0	2.50	25.0	120.0
Total Cost	8.00	80.0		9.50	100.0		12.00	120.0	
Profit (+) or Loss (−)	+2.00	+20.0		—	—		−2.00	−20.0	

तत्पश्चात किसी भी ऊँचाई के तीन स्तम्भों की रचना करके व उस ऊँचाई को 100% के बराबर मान कर उनमें से माल, मज़दूरी, अन्य-व्यय व सफाई-व्यय के प्रतिशतों को काट लेना है। ऊपर दिये गये चित्र में पंच-वर्षीय योजनाओं के आर्थिक ढाँचे का चित्रण करते समय वतलाया गया था कि स्तम्भों को विभाजित करने की क्रिया या तो ऊपर से प्रारम्भ की जा सकती है या नीचे से। किन्तु लाभालाभ चित्रों में यह क्रिया सर्वदा ऊपर से ही प्रारम्भ करनी पड़ती है, क्योंकि हानि का प्रदर्शन करने के लिये स्तम्भ को आधार रेखा के नीचे बढ़ाने की आवश्यकता पड़ती है। विभाजन की सुविधा के लिये संचयी प्रतिशत भी सारणी में दिखलाये गये हैं। इस प्रकार पृष्ठ १९४ पर दिये गये चित्र का निर्माण होगा :—

चित्र का अध्ययन करने से यह स्पष्ट हो जाता है कि प्रथम वर्ष में 20% का लाभ व तृतीय वर्ष में 20% की हानि हुई है। द्वितीय वर्ष में उत्पादन व्यय व विक्रय-मूल्य समान होने के कारण न लाभ हुआ है और न हानि।

दो माप वाले चित्र (Two-dimensional Diagram)

एक माप वाले चित्रों में केवल ऊँचाई या लम्बाई का ही ध्यान रखा जाता है, चौड़ाई या मोटाई तो केवल आकर्षण के लिये होती है। किन्तु दो माप वाले चित्रों में लम्बाई और चौड़ाई दोनों का चित्रण किया जाता है। ऐसे चित्र तीन प्रकार के होते हैं :—

(क) आयत चित्र (Rectangular Diagram)
(ख) वर्ग चित्र (Square Diagram)
(ग) वृत्त चित्र (Circle or Pie Diagram)

दो माप वाले चित्रों को क्षेत्रफल चित्र (Area Diagram) अथवा धरातल चित्र (Surface Diagram) भी कहते हैं क्योंकि इनमें लम्बाई व चौड़ाई के साथ ही क्षेत्रफल का भी महत्व रहता है।

आयत चित्र (Rectangular Diagram)

आयत चित्र का निर्माण करने के पूर्व समंकों के उन दो गुणों पर ध्यान देना चाहिये जिन्हें क्रमश: लम्बाई तथा चौड़ाई द्वारा प्रकट करना है। साधारणत: समंकों के योग के आधार पर आयतों की लम्बाई, व उनकी संख्या के अनुपात में चौड़ाई निश्चित की जाती है। यदि समंकों के विभिन्न गुण भी दिये हुए

हैं, तो आयतों को साधारण रीति से अथवा प्रतिशत के आधार पर विभिन्न भागों में विभक्त भी किया जा सकता है। इसके लिये पूर्वोक्त नियमों का ही पालन करना पड़ता है।

Illustration 12 :—

Represent the following data by a Two-dimensional Diagram :—

Items of Expenditure	Family *A* (*Income Rs. 500*)	Family *B* (*Income Rs. 800*)
(1) Food	200	250
(2) Clothing	100	200
(3) House Rent ...	80	100
(4) Fuel and Lighting ...	40	50
(5) Miscellaneous (including saving) ...	80	200
Total	500	800

(बी० कॉम०, आगरा, १९५२)

TABLE SHOWING THE PERCENTAGE EXPENDITURE OF FAMILY *A* AND *B*

Items of Expenditure	Family *A*			Family *B*		
	Rs.	%	Cum. %	Rs.	%	Cum. %
	Rs. 500=100%			*Rs. 800=100%*		
(1) Food	200	40.0	40.0	250	31.25	31.25
(2) Clothing	100	20.0	60.0	200	25.00	56.25
(3) House Rent	80	16.0	76.0	100	12.50	68.75
(4) Fuel and Lighting	40	8.0	84.0	50	6.25	75.00
(5) Miscellaneous (including saving)	80	16.0	100.0	200	25.00	100.00
Total	500	100.0	—	800	100.00	—

दोनों परिवारों के पारिवारिक बजट का आयत चित्र द्वारा चित्रण करने के लिये हम दो ऐसे आयतों का निर्माण करेंगे जिनकी चौड़ाई 500 : 800 के

अनुपात में व लम्बाई समान (अर्थात् 100%) होगी। इस प्रकार के समंकों का चित्रण प्रतिशत के आधार पर करना विशेष उपयुक्त समझा जाता है, क्योंकि दोनों परिवारों के आय व व्यय में बहुत विषमता है, जिसका अध्ययन किसी सापेक्ष चित्र द्वारा ही किया जा सकता है। अतः पूर्व की ही भांति पृष्ठ १९५ पर एक सहायक-सारणी की रचना की गई है।

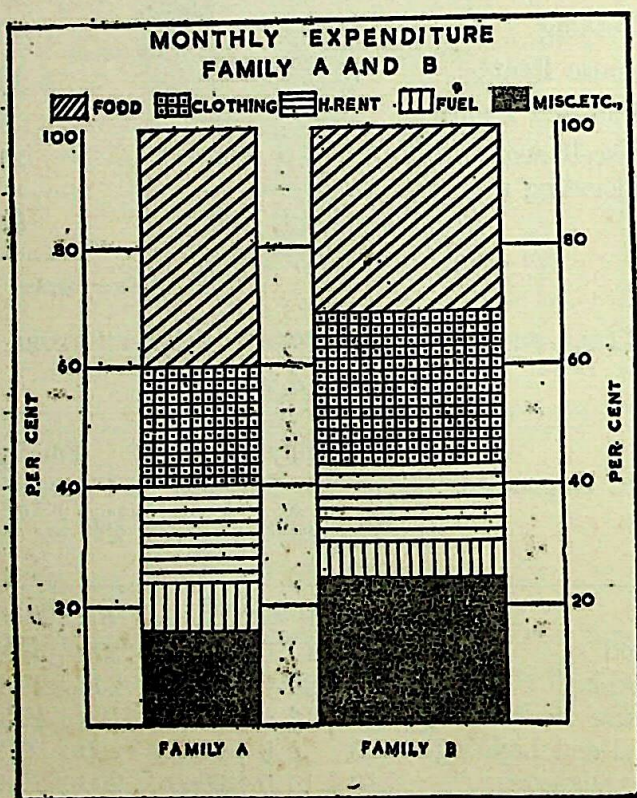
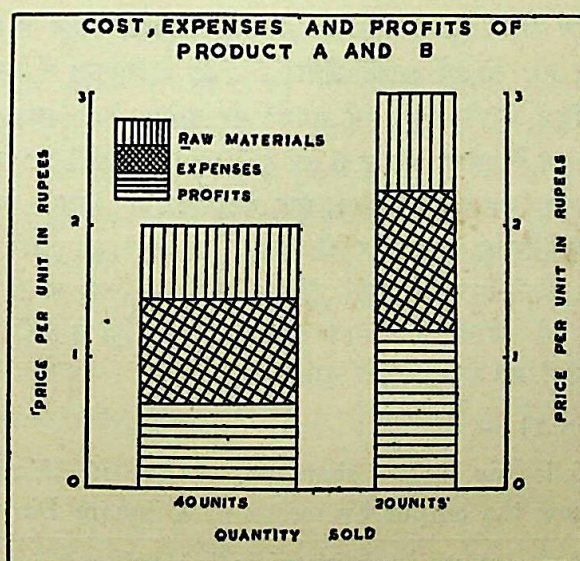
उपर्युक्त तालिका में ज्ञात किये गये संचयी प्रतिशतों को लेकर अब आयत चित्र का निर्माण इस प्रकार किया जायगा :—

आयत चित्र द्वारा वस्तुओं के उत्पादन-व्यय, मूल्य, उन पर होने वाले लाभालाभ तथा उनकी कितनी इकाइयाँ बेची गई हैं, आदि का भी सुन्दर चित्रण एक साथ ही किया जा सकता है। निम्न उदाहरण को देखिये :—

Illustration 13 :—

Represent the following data by means of a suitable two-dimensional diagram :—

	A	*B*
Price of commodity	Rs. 2 per unit	Rs. 3 per unit
Quantity sold	40 units	20 units
Value of Raw Material	Rs. 26	Rs. 24
Other Expenses of Production	Rs. 32	Rs. 21
Profits	Rs. 22	Rs. 15

(बी० कॉम०, बनारस, १९५३)

इस उदाहरण में दो वस्तु A व B की क्रमशः 40 व 20 इकाइयाँ दो तथा तीन रुपये प्रति इकाई की दर से वेची गई हैं। लाभ को सम्मिलित करते हुये दोनों के कुल उत्पादन-व्यय क्रमशः 80 रु० तथा 60 रु० हैं। यदि आयतों की लम्बाई मूल्य के अनुपात में व चौड़ाई विक्रय की इकाइयों के अनुपात में रख कर चित्र का निर्माण किया जाय, तो उसका यह स्वरूप होगा :—

आयतों में विभिन्न खण्डों को काटने के लिये निम्न सारणी की सहायता ली गई है :—

Cost of Production	Commodity *A* 40 units		Commodity *B* 20 units	
	Total Rs.	*Per Unit* Rs.	Total Rs.	*Per Unit* Rs.
Value of Raw Materials	26	0.65	24	1.20
Other Expenses of Production ...	32	0.85	21	1.05
Profits	22	0.55	15	0.75
Total	80	2.00	60	3.00

वर्ग चित्र (Square Diagram)

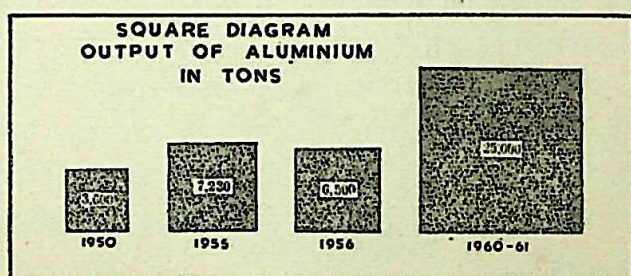
स्तम्भ चित्रों द्वारा समंक-प्रदर्शन करना उस समय कठिन हो जाता है जब उनके आकार में अत्यधिक विषमता होती है। ऐसी स्थिति में या तो स्तम्भ इतने छोटे हो जाते हैं कि उन्हें दिखलाया ही नहीं जा सकता, या इतने बड़े हो जाते हैं कि कागज पर आ ही नहीं सकते। इस कठिनाई को दूर करने के लिये वर्ग चित्रों का प्रयोग किया जाता है। उदाहरण के लिये यदि 36 टन और 900 टन का चित्रण करने के लिये एक ही मापदण्ड ले कर दो स्तम्भों की रचना करनी हो, तो हमें उनकी ऊँचाई 1 : 25 के अनुपात में लेनी पड़ेगी। किन्तु वर्ग चित्र बनाते समय हमें समंकों का वर्गमूल लेना पड़ता है। 36 टन व 900 टन के वर्गमूल क्रमश: 6 टन व 30 हुये, जिनमें 1 : 5 का अनुपात है। अब यदि एक वर्ग की रचना एक सेंटीमीटर के आधार पर व दूसरे की पाँच सेंटीमीटर के आधार पर की जाय, तो ये दोनों वर्ग हमारे समंकों का सरलतापूर्वक प्रदर्शन करने में समर्थ होंगे। अत: वर्ग चित्र का निर्माण करने के लिये दिये हुये समंकों का वर्गमूल निकाल लेना चाहिये व इन्हीं वर्गमूलों के आधार पर वर्गों की रचना करनी चाहिये।

Illustration 14 :—

The following figures show the output of Aluminium in India.* Show the output by means of a Square Diagram :—

*Source : *Statistical Outline of India*, 1957

Year			Output in Tons
1950	...	...	3,600
1955	...	...	7,230
1956	...	...	6,500
1960-61 (Plan Target)		...	25,000

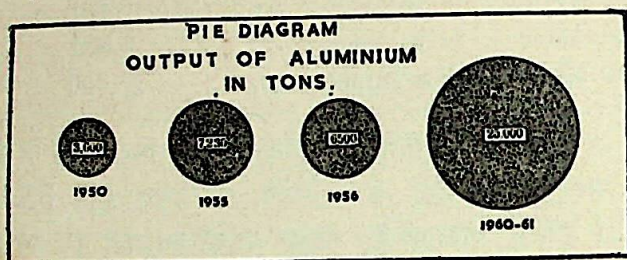
वर्ग चित्र द्वारा अलुमिनियम के उत्पादन को प्रदर्शित करने के लिये सर्व प्रथम हमें इनके वर्गमूल ज्ञात करने पड़ेंगे, जो क्रमशः 60, 85.1, 80.6 तथा 185.1 होंगे। यदि एक इंच बराबर दो सौ टन मान कर इनके आधार पर वर्गों की रचना करने का विचार किया जाय तो ये आधार क्रमशः 0.3", 0.425", 0.403", तथा 0.79" होंगे। निम्न चित्र में इन वर्गों द्वारा अलुमिनियम के उत्पादन का प्रदर्शन किया जा रहा है :—

वृत्त चित्र (Circular or Pie Diagram)

क्षेत्रफत्र के आधार पर समंकों का तुलनात्मक चित्रण करने के लिये वृत्त चित्रों का भी प्रयोग किया जाता है। इनको बनाने में वर्ग चित्रों की अपेक्षा कम समय व श्रम लगता है। वृत्त चित्रों का भी निर्माण करने के लिये समंकों के वर्गमूल ज्ञात करने की आवश्यकता पड़ती है। इन्हीं वर्गमूलों के आधार पर वृत्तों की त्रिज्यायें ली जाती हैं। चित्र को आकर्षक बनाने के लिये वृत्तों को किसी सुन्दर रंग से रंग दिया जाता है।

Illustration 15 :—

Represent the data given in Illustration 14 by a Pie Diagram :—

उपर्युक्त आयतों का वृत्त चित्र द्वारा प्रदर्शन करने के लिए हमें उदाहरण १४ में ज्ञात किये गये वर्गमूल लेने पड़ेंगे। अब यदि एक इंच बराबर

400 टन माना जाय, तो वृत्तों की त्रिज्यायें क्रमशः 0.15", 0.212", 0.201" तथा 0.395" होंगी। अतः चित्र का यह स्वरूप होगा :—

कोण चित्र (Angular Diagram)

जिस प्रकार स्तम्भों को अन्तर्विभक्त करके समंकों के विभिन्न गुणों का प्रदर्शन किया जाता है, उसी प्रकार वृत्तों को भी अनेक खण्डों (Sectors) में विभक्त करके उनके गुणों का प्रदर्शन किया जा सकता है। इसके लिये समंकों के कुल योग को 360° के बराबर मानकर प्रत्येक गुण के अंश (Degrees) ज्ञात कर लिये जाते हैं। फिर वृत्तों का निर्माण करके उनमें ये अंश काट लिये जाते हैं। विभिन्न खण्डों को सुविधानुसार विभिन्न रंगों से रंग दिया जाता है, या उनमें रेखायें, चारखाने व विन्दु बना दिये जाते हैं।

Illustration 16 :—

Represent the following data by an Angular Diagram :—

MINTAGE OF NEW DECIMAL COINS DURING 1956-57*

Type of Coins		Value in Rupees
Cupro-nickel 10 Naye Paise	...	1,42,22,500
Cupro-nickel 5 Naye Paise	...	44,79,750
Cupro-nickel 2 Naye Paise	...	27,50,800
Bronze 1 Naya Paisa	...	37.47,700
Total	...	2,52,00,750

इन समंकों का कोण चित्र द्वारा प्रदर्शन करने के लिये कुल ढलाई के मूल्य को 360° के बराबर मान कर यह ज्ञात करने की आवश्यकता पड़ेगी कि दस-

*Source: *Report on Currency and Finance*, Reserve Bank of India, 1957

नये पैसे, पाँच-नये पैसे, दो-नये पैसे व एक-नये पैसे की ढलाई के मूल्य क्रमशः कितने-कितने अंश हैं। साधारण गणित की क्रिया से यह ज्ञात हो जायगा कि ये अंश क्रमशः 203°, 64°, 40° तथा 53° होंगे। अब एक वृत्त की रचना कर के उसमें इन अंशों को काट लेना पड़ेगा। इस प्रकार चित्र का निम्नांकित स्वरूप होगा :—

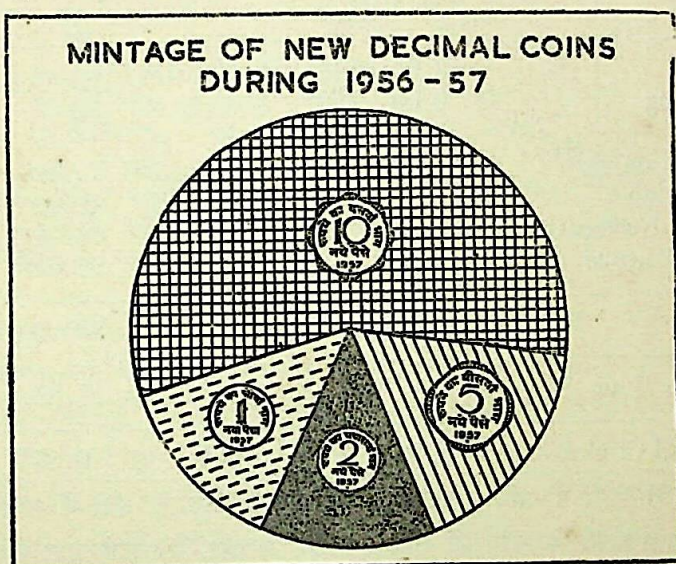



Illustration 17 :—

Given below are the data relating to the expenditure of three families :—

Items of Expenditure	Family *A* Rs. nP.	Family *B* Rs. nP.	Family *C* Rs. nP.
Food	12.00	30.00	90.00
Clothing	2.00	7.00	35.00
Rent	2.00	8.00	40.00
Education	1.50	3.00	12.00
Litigation	1.00	5.00	40.00
Conventional Necessaries	0.50	3.00	60.00
Miscellaneous	1.00	4.00	23.00

Represent the above data by an Angular Diagram.

(एम० कॉम०, आगरा, १९४८)

उपर्युक्त परिवारों के व्यय की मदों का प्रदर्शन करने के लिये तीन वृत्त बनाने पड़ेंगे और प्रत्येक को सात खण्डों में विभक्त करना पड़ेगा। अतः सुविधा के लिये निम्न ढंग की एक तालिका बना लेनी चाहिये :—

Items of Expenditure	Family *A*		Family *B*		Family *C*	
	Rs.	Degrees	Rs.	Degrees	Rs	Degrees
Food	12.00	216°	30.00	180°	90.00	108°
Clothing	2.00	36°	7.00	42°	35.00	42°
Rent	2.00	36°	8.00	48°	40.00	48°
Education	1.50	27°	3.00	18°	12.00	14°
Litigation	1.00	18°	5.00	30°	40.00	48°
Conv. Necessaries	0.50	9°	3.00	18°	60.00	72°
Miscellaneous	1.00	18°	4.00	24°	23.00	28°
Total	20.00	360°	60.00	360°	300.00	360°
Square Root	4.47		7.74		17.32	
Radii of Circles	0.22″		0.39″		0.87″	

इस तालिका में प्रत्येक वृत्त को कितने-कितने अंश के खंडो में काटना है इसको ज्ञात करने के साथ ही साथ एक इंच बराबर 20 रुपये मान कर यह भी ज्ञात किया गया है कि प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या कितने इंच की होगी। पृष्ठ २०३ पर निर्मित कोण चित्र की रचना इन्हीं त्रिज्याओं के आधार पर की गई है :—

तीन माप वाले चित्र

(Three-dimensional Diagram)

तीन माप वाले चित्रों में लम्बाई, चौड़ाई और मोटाई तीनों का ध्यान रखा जाता है। ऐसे चित्रों में घन (Cubes), इष्टका (Blocks), गोल (Spheres), रंभ (Cylinders), आदि आते हैं, जिनके द्वारा समंकों के आयतन (Volume) को प्रदर्शित किया जाता है। घन के अतिरिक्त अन्य आकारों का बनाना कठिन है, इसलिये यहाँ केवल उन्हीं के द्वारा समंक-प्रदर्शन की रीति का वर्णन किया जायगा।

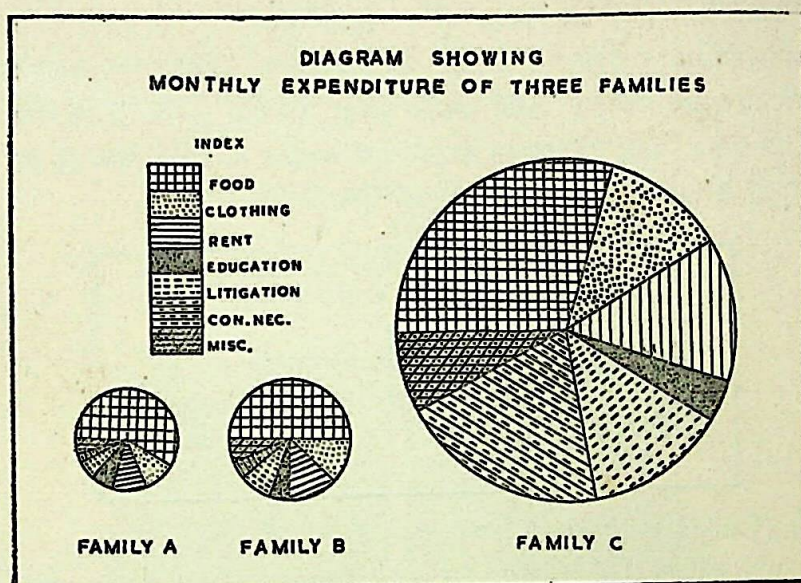
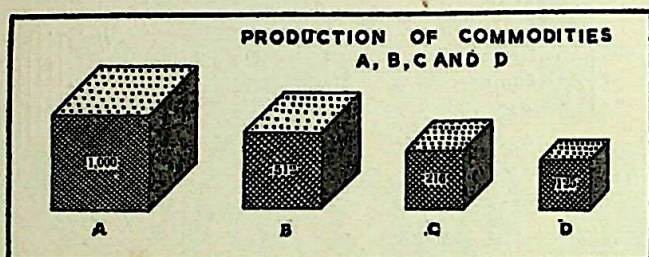
वर्ग तथा वृत्त चित्रों को बनाते समय यह बतलाया गया था कि उनके द्वारा बहुत बड़े और बहुत छोटे मूल्य वाले समंकों का चित्रण सुविधापूर्वक

किया जा सकता है, क्योंकि वास्तविक मूल्यों की अपेक्षा उनके वर्गमूल के आधार पर चित्र बनाना अधिक सुविधाजनक होता है। यदि मूल्यों में और भी अधिक विषमता हो तो वर्ग तथा वृत्त चित्रों के प्रयोग में भी कठिनाई हो सकती है। इस कठिनाई से बचने के लिये घन चित्रों का प्रयोग किया जाता है जो समंको के घनमूल के आधार पर बनाये जाते हैं। 125 और 1,000 को यदि स्तम्भ-चित्रों द्वारा प्रदर्शित करना हो तो दूसरा स्तम्भ पहले की अपेक्षा आठगुना ऊँचा बनाना पड़ेगा। किन्तु यदि इन दोनों मूल्यों के घनमूल निकाल लिये जायँ, तो 5 और 10 में केवल दूने का अन्तर ही रह जायगा। घन-चित्रों का एक उदाहरण यहाँ दिया जा रहा है :—

Illustration 18 :—

The following table shows the production of commodity *A*, *B*, *C* and *D* in tons :—

Commodity		Production in tons
A	...	1,000
B	...	512
C	...	216
D	...	125

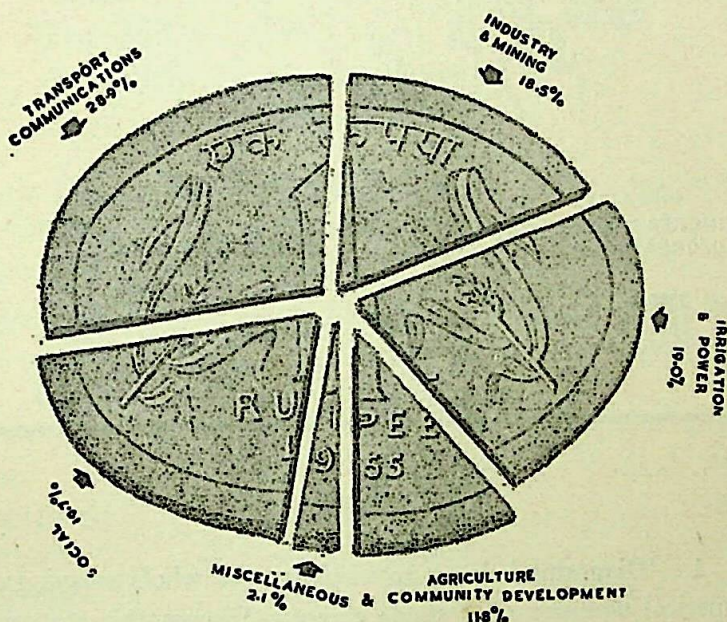
घन चित्रों द्वारा उपरोक्त समंकों का प्रदर्शन करने के लिये इनका पहले घनमूल निकालना पड़ेगा, और फिर उन घनमूलों के आधार पर मापदण्ड निश्चित करना पड़ेगा। इनके घनमूल क्रमशः 10 टन, 8 टन, 6 टन तथा 5 टन हुये। यदि 2,000 टन बराबर एक घनफीट के माना जाय तो इन वस्तुओं के उत्पादन का चित्रण इस प्रकार होगा :—

घन (Cube) बनाने का ढंग निम्नलिखित है :—

मान लीजिये 0.5″ के आधार पर प्रथम घन की रचना करनी है। अतः सर्वप्रथम 0.5″ की एक रेखा *AB* ले कर उस पर वर्ग *ABCD* की रचना कीजिये। तदुपरान्त *DC* व *CB* के मध्य-विन्दु ले कर उनमें से *AB* व *AD* के समानान्तर ऊपर की ओर क्रमशः *EF* व *EH* रेखायें खींचिये जो वर्ग के अन्दर *E* पर कटती हैं। पुनः EF=0.5″ आधार पर एक दूसरे वर्ग *EFGH* की रचना कीजिये। अब *DH*, *CG* व *BF* को मिला कर *EH* व *EF* रेखाओं को मिटा दीजिये। इस प्रकार घन का निर्माण हो जायगा।

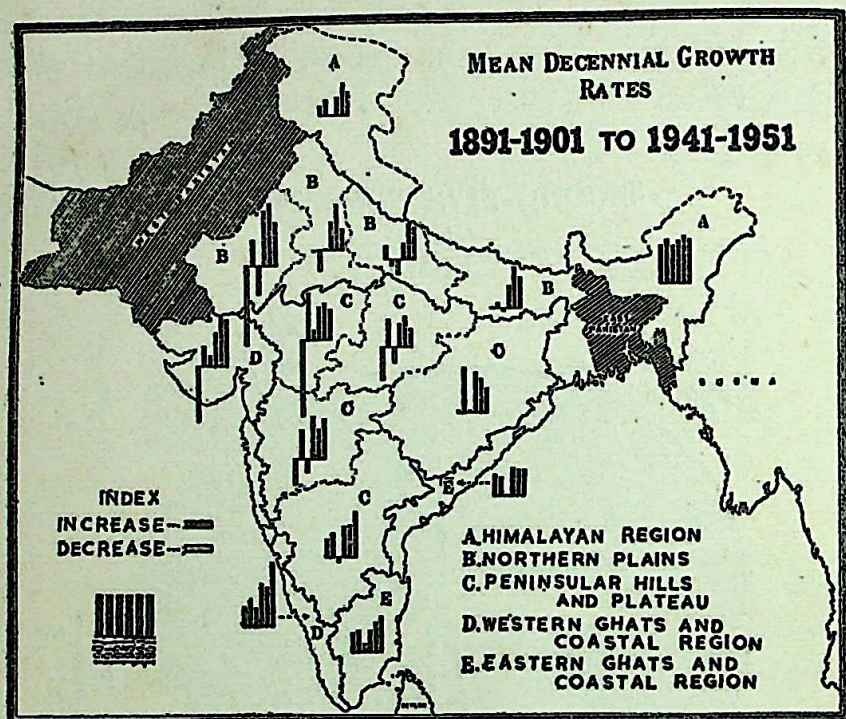
चित्र-लेख (Pictogram)

आजकल समंक प्रदर्शन की रीतियों में चित्र-लेख बहुत महत्वपूर्ण समझे जाते हैं। इस रीति के अनुसार समंकों का प्रदर्शन उन वस्तुओं के चित्रों द्वारा किया जाता है, जिनसे वे समंक सम्बन्धित हैं। चित्र-लेख बड़े ही आकर्षक होते हैं और इनके द्वारा तुलनात्मक अध्ययन बड़ी सुगमतापूर्वक किया जा सकता है। चित्र-लेख द्वारा समंक-प्रदर्शन का श्रेय वियना निवासी डा० ओटो न्यूरैथ (Dr. Otto Neurath) को दिया जाता है, इसीलिये इसको कभी कभी 'वियना पद्धति' (Vienna Method) भी कहते हैं। इसी को 'आइसोटाइप पद्धति' (Isotype* Method) भी कहते हैं।

*यह शब्द 'International System of Typo-graphic Pictorial Education' में प्रयुक्त किये गये शब्दों के प्रथम अक्षर के आधार पर बना है।

चित्र-लेख बनाते समय इस बात का ध्यान रहे कि चित्रों का आकार समंकों के अनुपात में होना चाहिये। निम्न चित्र-लेख में भारत की द्वितीय पंच-वर्षीय योजना के आर्थिक स्वरूप का चित्रण किया गया है :—

मान-चित्र लेख (Cartogram or Mapgraph)

कभी कभी समंक-प्रदर्शन के लिये मानचित्रों का भी प्रयोग किया जाता है। मानचित्रों में किसी वस्तु की उपज, जनसंख्या का घनत्व, किसी खनिज पदार्थ का उत्पादन, इत्यादि के वितरण को प्रदर्शित किया जाता है। इन्हें प्रदर्शित करने के लिये विभिन्न रंगों, विन्दुओं तथा चारखानों या तत्सम्बन्धी अंको का प्रयोग किया जाता है। यहाँ मान-चित्र लेख का एक उदाहरण दिया जा रहा है, जिसमें यह दिखलाया गया है कि पिछली छ दशाब्दियों में भारत की मध्यक वृद्धि दर में प्राकृतिक विभागानुसार क्या घट-बढ़ हुई है* :—

*Source : *Census of India*, 1951

प्रश्न

1. 'Diagrams help us to visualize the whole meaning of a numerical complex at a single glance'—Discuss this statement.

'चित्र किसी आंकिक जटिलता का सम्पूर्ण अर्थ एक ही दृष्टि में दिग्दर्शित कराने में हमारी सहायता करते हैं'—इस कथन की व्याख्या कीजिये ।

2. What are the different types of diagrams which are used in Statistics to show the salient characteristics of groups and series ? Illustrate your answer.

सांख्यिकी के अन्तर्गत वर्गों और मालाओं की विशेषताओं को स्पष्ट करने के लिये किन महत्वपूर्ण प्रकार के चित्रों का व्यवहार होता है । उदाहरणों द्वारा अपना उत्तर स्पष्ट करिये ।

(बी० कॉम०, सागर, १९५८)

3. Write short notes on the following :—

निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणियाँ लिखिये :—

(1) Sub-divided Bar Diagram (अन्तर्विभक्त स्तम्भ चित्र)
(2) Duo-directional Bar Diagram (दो दिशा वाले स्तम्भ चित्र)
(3) Population Pyramid (जनसंख्या का स्तूप)
(4) Pie Diagram (वृत्त चित्र)
(5) Pictogram (चित्र लेख)
(6) Cartogram (मानचित्र लेख)
(7) Bilateral Chart (लाभालाभ चित्र)
(8) Surface Diagram (धरातल चित्र)

4. Explain the importance of diagrammatic representation of statistical data, and represent the following figures by an appropriate diagram :—

Approximate monthly income in rupees of a few classes of workers in U. P.

		Rs.			Rs.
Artisan	...	15.0	I.C.S.	...	2,000.0
Clerk	...	20.0	Labourer	...	10.0
Greengrocer	...	40.0	Peon	...	12.5
Gumasta	...	30.0	Pleader	...	150.0
Cultivator	...	5.0	School Teacher	...	30.0
Doctor	...	250.0	University Teacher		300.0

(बी० कॉम०, बनारस, १९४५)

5. The following figures show the extent of the regrouped railways after 14th April, 1952 :—

Railway		*Route Mileage*
(1) Southern	...	6,017
(2) Central	...	5,428
(3) Western	...	5,631
(4) Northern	...	6,007
(5) North Eastern	...	4,787
(6) Eastern	...	5,667

Represent the above data by a Bar Diagram.

(Source : INDIAN RAILWAYS 1853—1953, Ministry of Railways (Railway Board), 1953)

6. Represent the following data by a suitable Diagram :—

NATIONAL INCOME *Per Capita*, 1955

		Rs.			Rs.
India (1955-56)		252	France	...	3,910
Australia	...	4,913	Japan	...	1,009
Burma	...	210	Pakistan (1953)	...	325
Canada	...	6,356	U. K.	...	3,983
Ceylon	...	602	U. S. A.	...	9,335

(Source : *Statistical Outline af India*, 1957)

7. The following figures show the advances made by the Industrial Finance Corporation of India from 1949 to 1957 :—

Date		Rs.
30-6-1949	...	3,42,25,000
30-6-1950	...	3,77,00,000
30-6-1951	...	2,38,95,000
30-6-1952	...	4,45,25,000
30-6-1953	...	1,43,25,000
30-6-1954	...	5,27,05,000
30-6-1955	...	7,34,00,000
30-6-1946	...	15,13,00,000
30-6-1957	...	11,90,75,000

Show the above figures by means of a Vertical Bar Diagram.

(Source : *Report of the Industrial Finance Corporation of India*, 30th June, 1957)

8. Utilize the following data to present diagrammatically the relative increase in note-circulation towards the end of 1945 in the different countries :—

NOTES IN CIRCULATION

(In millions of National Currency Unit)

Country		*1939*	*End of 1945*
Canada	...	233	1,129
U. S. A.	...	7,598	28,507
U. K.	...	555	1,380
Australia	...	57	200
India	...	2,245	12,109

(एम० कॉम०, इलाहाबाद, १९४८)

9. Diagrammatically compare the following statistics :—

AVERAGE SIZE OF HOLDINGS IN INDIA

AS COMPARED TO SOME FOREIGN COUNTRIES

Country			Acres
India	...	...	7.5
Denmark	...	...	40.0
Holland	...	...	26.0
Germany	...	...	21.5
France	...	...	20.5
Belgium	...	...	14.5
Britain	...	...	20.0
United States of America		...	145.0

(Source : *Congress Agrarian Reforms Committee Report*, 1950)

10. The following figures show the annual imports and the production of graded machine tools in India :—

Year		Annual Imports Rs.	Annual Production Rs.
1950	...	2,49,01,000	28,59,000
1951	...	2,50,00,000	47,31,000
1952	...	2,21,13,000	44,37,000
1953	...	3,12,71,000	44,08,000

1954	...	3,86,40,000	47,13,000
1955	...	5,28,97,000	67,88,000
1956	...	8,37,28,000	1,08,18,000

Represent the above data by a Multiple Bar Diagram.

(Source : *Engineerng News of India*, April 1958)

11. Represent the following figures relating to Gross Premium earned on Insurance by Duo-directional Sub-divided Bars :—

GROSS PREMIUM EARNED ON INSURANCE

(*Crores of Rupees*)

Type of Insurance	1950			1955		
	Indian insurers	Foreign insurers	Total	Indian insurers	Foreign insurers	Total
Life	32.40	6.10	38.50	45.45	7.58	53.03
Fire	4.77	4.04	8.81	5.91	4.36	10.27
Marine	2.03	2.45	4.48	3.28	2.67	5.95
Miscellaneous	2.98	2.01	4.99	4.35	2.15	6.50
Total	42.18	14.60	56.78	58.99	16.76	75.75

(Source : *Statistical Outline of India*, 1957)

12. The following table shows India's exports of some principal commodities during 1956-57 :—

(*Crores of Rupees*)

Items	1st Quarter	2nd Quarter	3rd Quarter	4th Quarter	Total
1. Jute Manufactures	26.7	30.0	32.2	37.1	126.0
2. Cotton Manufactures	19.8	16.9	20.9	23.2	80.2
3. Tea	30.4	27.5	46.7	44.7	149.3
4. Hides and Skins	8.0	5.8	8.2	8.4	30.4
5. Raw Cotton	6.8	4.1	4.9	7.9	23.7
6. Vegetable Oils	10.2	4.5	6.0	4.8	25.5
7. Mettalic Ores	8.8	3.9	5.9	5.3	23.9

Represent the above data by Sub-divided Horizontal Bar Diagram.

(Source : *Report on Currency and Finance*, Reserve Bank of India, 1956-57)

13. The following table gives an analysis of bank advances as on 30th June 1953, according to their purpose :—

Bank Advances to	Scheduled Banks	Non-Scheduled Banks	Total
		(*in crores of rupees*)	
Industry ...	188.98	6.52	195.50
Commerce ...	262.65	18.08	280.73
Agriculture ...	22.99	2.12	25.11
Personal & Professional	41.00	11.28	52.28
All others ...	29.25	2.95	32.20
Total	544.87	40.95	585.82

Represent the above data by Sub-divided Bars.

(Source : *Report of the Committee on Finance for the Private Sector*, 1954)

14. Given below is the relative importance of the various sources of industrial finance in the thirtees of the present century :

Source of Finance	Bombay (Figures for 64 mills)		Ahmedabad (Figures for 56 mills)	
	Lakhs of Rupees	*Percentage of Total*	Lakhs of Rupees	*Percentage of Total*
Managing Agents	532	*21*	264	*24*
Banks	226	*9*	42	*4*
Public Deposits	273	*11*	426	*39*
Share Capital	1,214	*49*	340	*32*
Debentures	238	*10*	8	*1*

Represent the above data by Sub-divided Bars drawn on the percentage basis.

(Source: *Indian Central Banking Enquiry Committee,* Minority Report, 1931)

15. Show by means of the Sub-divided Bars the data given in the following table :—

PERCENTAGE DISTRIBUTION OF RURAL FAMILIRES BY STATUS (1950-51).

Zones	Land owners	Ten-ants	Lab. with Land	Landless labour	Non-agricul.	Total
Northern	7.7	56.1	5.7	8.6	21.9	100.0
Eastern	16.3	29.9	19.0	13.7	21.1	100.0
Southern	23.0	6.1	27.3	22.8	20.8	100.0
Western	44.8	18.4	8.8	11.6	16.4	100.0
Central	25.0	22.0	14.6	22.1	16.3	100.0
N. Western	42.2	25.0	2.7	7.1	23.0	100.0

(Source: *Census of India,* 1951)

16. The following figures give the distribution of population in towns *A* and *B* in 1939 and 1947. Show by suitable diagrams the absolute as well as percentage changes in the distribution during the period :—

Persons engaged and dependent on	A		B	
	1939	1947	1939	1947
(*a*) Industries ...	20,000	30,000	50,000	1,00,000
(*b*) Agriculture ...	40,000	35,000	10,000	8,000
(*c*) Professions ...	2,000	2,500	3,000	4,000
(*d*) Services ...	5,000	10,000	5,000	15,000
(*e*) Business ...	3,000	8,000	6,000	12,000

(बी० कॉम०, लखनऊ, १९४८)

17. Show by suitable diagrams the absolute as well as relative changes in th student population of the Colleges *A* and *B* in the different departments from 1940 to 1947 :—

Department		College A		College B	
		1940	1947	1940	1947
Arts	...	300	350	100	200
Science	...	120	500	150	250
Commerce	...	200	650	130	150
Law	...	100	300	100	120

(बी० कॉम०, आगरा, १९४८)

18. Present the following figures relating to Birth and Death rates in certain selected countries by Sub-divided Bars :—

Country		Birth Rate	Death Rate	Country		Birth Rate	Death Rate
India	...	31	13	Japan	...	19	8
Australia	...	23	9	Sweden	...	15	9
Canada	...	28	8	U. K.	...	15	12
Ceylon	...	38	11	U. S. A.	...	25	9
France	...	19	12				

(Source: *Statistical Outline of India*, 1953)

19. Show by diagrams the distribution of Reserve Bank shares as given below :—

		No. of shares in thousands		No. of shareholders in thousands	
		1937	1938	1937	1938
Bombay	...	201	206	215	208
Calcutta	...	125	123	145	131
Delhi	...	94	93	157	149
Madras	...	60	59	91	87
Rangoon	...	19	18	18	16

(बी० कॉम, बनारस, १९५०)

20. Represent the following data diagrammatically :—

FOREIGN BUSINESS INVESTMENTS

	(Crores of Rupees)	
	31-12-1953	*31-12-1955*
Manufacturing ...	135.7	163.3
Trading ...	94.8	102.3
Utilities and Transport	50.5	53.1
Mining	8.4	9.6
Financial :—		
(*a*) Banking ...	16.2	20.2
(*b*) Others ...	14.7	19.1
Plantations ...	71.5	87.2
Miscellaneous ...	27.7	25.9
Total	419.5	480.6

(Source : *Survey of India's Foreign Liabilities and Assets*, Reserve Bank ot India, 1957)

21. Represent diagrammatically the following data relating to India's Balance of Payments on Current Account—Region-wise Sterling Area—in crores of rupees :—

Months	*Credits*	*Debits*	*Net*
April-June, 1956 ...	123.6	121.3	+ 2.3
July-September, 1956 ...	105.6	129.5	—23.9
October-December, 1956 ...	129.4	148.9	—19.5
January-March, 1957 ...	131.7	125.8	+ 5.9
1956-57 (Preliminary) ...	490.3	525.5	—35.2

(Source : *Report on Currency and Finance*, Reserve Bank of India, 1957)

22. How will you present the following data diagrammatically ?

VALUE OF FOREIGN TRADE OF INDIA

	Imports	Exports	Balance
	(*Crores of Rupees*)		
1950-51 ...	623.96	624.63	+ 0.67
1954-55 ...	656.44	593.97	— 62.47
1955-56 ...	678.99	597.43	— 81.56
1956-57 ...	842.53	601.36	—241.17

(Source : *Statistical Outline of India*, 1957)

23. With the help of the following data regarding the Indian National Income between 1950-51 and 1953-54, draw a suitable diagram :—

NATIONAL INCOME IN CRORES OF RUPEES

Source	1953-54	1952-53	1951-52	1950-51
Agriculture ...	5,400	4,790	4,990	4,890
Mining, manufacturing and handicrafts ...	1,800	1,760	1,730	1,530
Commerce, transport and communication ...	1,800	1,780	1,790	1,690
Other services ...	1,610	1,440	1,500	1,440
Total ...	10,610	9,870	10,010	9,540

(एम० ए०, आगरा, १९५६)

24. The following table gives certain data in respect of coal production for two years :—

	1940	1950
	Rs.	Rs.
Proceeds per ton disposable commercially	24	40

Cost per ton—		
Wages	16	26
Other costs	9	10
Royalties	1	1
Profit (+) or Loss (—)	—2	+3

Draw a suitable diagram to represent these statistical facts.

(बी० कॉम०, बनारस, १९५६)

25. Represent the following by Sub-divided Bars drawn on the percentage basis :—

Cost, Proceeds Profit or Loss per chair during 1938, 1939 and 1940

Particulars	1938 Rs.	1939 Rs.	1940 Rs.
Cost per chair—			
(*a*) Wages	4.5	7.5	10.5
(*b*) Other costs	3.0	5.1	7.0
(*c*) Polishing	1.5	2.4	3.0
Total Cost	9.0	15.0	21.0
Proceeds per chair	10.0	15.0	20.0
Profit (+)/Loss (—) per chair	(+)1.0	...	(—)1.0

(बी० कॉम०, आगरा, १९५६)

26. Draw suitable diagrams to represent the following :—

Factory	Wages Rs.	Materials Rs.	Other costs Rs.	Profit Rs.
A ...	3,000	5,000	1,000	1,000
B ...	2,000	3,000	800	500

The number of units producted by *A* and *B* were 1,000 and 700 respectively.

Show also cost and profit per unit.

(बी० कॉम०, बनारस, १९५७)

27. Show the details of monthly expenditure of two families given below by means of two-dimensional diagrams :—

Items of Expenditure	Family A *Income Rs. 500 p.m.* Rs.	Family B *Income Rs. 400 p.m.* Rs.
Food	140	120
Clothing	80	80
House Rent	100	60
Education	30	40
Fuel & Lighting	40	20
Miscellaneous	40	40

(एम० ए०, पंजाब, १९५२)

28. The following table gives the details of monthly expenditure of three families :—

Items of Expenditure	Family *X* Rs.	Family *Y* Rs.	Family *Z* Rs.
Food	24	60	180
Clothing	4	14	70
House Rent	4	16	80
Education	3	6	24
Litigation	2	10	80
Conventional needs	1	6	120
Miscellaneous	2	3	46

Represent the above figure by a suitable diagram. Which family is spending most wisely ?

(एम० कॉम०, इलाहाबाद, १९५०)

29. The following table gives the details of the cost of construction of a house in Allahabad :—

		Rs.			Rs.
Land	...	4,500	Cement	...	800
Labour	...	2,500	Lime	...	800
Bricks	...	2,000	Stone	...	600

Iron	...	1,800	Sand	...	200
Timber	...	1,500	Other things	...	1,300

Represent the above figures by a suitable diagram.

(बी० कॉम०, इलाहाबाद, १९४७)

30. Following are the figures of the population of the various countries of the world and of total world population in 1931 :—

Country		Population (000's omitted)
China	...	4,11,770
India	...	3,52,370
U. S. S. R.	...	1,61,000
U. S. A.	...	1,24,070
Germany	...	64,776
Japan	...	64,770
U. K.	...	46,077
France	...	41,860
Italy	...	41,100
Others	...	7,05,077
	WORLD	20,12,800

Represent the above data by a circular diagram divided into sectors.

(बी० कॉम०, इलाहाबाद, १९४९ तथा लखनऊ, १९५१)

31. Show by means of circular diagrams the following :—

CENTRES		CLEARING HOUSE RETURNS (*Amount in crores of rupees*) 1940	1945
Calcutta	...	1,070	2,670
Bombay	...	829	2,443
Madras	...	108	274
Other Centres		313	515

(बी० कॉम०, राजपूताना, १९५५)

अध्याय ९

सांख्यिकीय माध्य

(Statistical Averages)

(केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप—सन्तोषजनक माध्य के आवश्यक गुण—माध्यों के भेद—माध्य या मध्यक—मध्यक निकालने की रीति—ऋजु रीति व लघु रीति—सामूहिक मध्यक—मध्यक के लाभ—मध्यक के दोष—भारांकित मध्यक—वास्तविक तथा अनुमानित भार—सामान्य व प्रमापित मृत्यु और जन्म की दरें—गुणोत्तर माध्य—गुणोत्तर माध्य निकालने की रीति—भारांकित गुणोत्तर माध्य—गुणोत्तर मध्यक के लाभ—गुणोत्तर मध्यक के दोष—हरात्मक मध्यक—हरात्मक मध्यक निकालने की रीति—हरात्मक मध्यक के लाभ—हरात्मक मध्यक के दोष—भूयिष्ठक—भूयिष्ठक निकालने की रीति—भूयिष्ठक का विन्दुरेखीय प्रदर्शन—भूयिष्ठक के लाभ—भूयिष्ठक के दोष—मध्यका—मध्यका निकालने की रीति—मध्यका का विन्दुरेखीय प्रदर्शन—'ओजाइव' वक्र व 'गाल्टन' की रीति—मध्यका के लाभ—मध्यका के दोष—चतुर्थांश, पंचमांश, अष्टमांश, दशांश व शतांश—इनका विन्दुरेखीय प्रदर्शन—वर्गकरणी माध्य—संग्रथित माध्य—विभिन्न माध्यों का स्थान-निरूपण—विभिन्न माध्यों के प्रयोग—माध्यों की सीमायें—प्रश्न)

केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप (Measurement of Central Tendency)

पिछले अध्यायों में यह वतलाया जा चुका है कि समंकों का किस प्रकार संकलन, सम्पादन, वर्गीकरण, सारणीयन, विन्दुरेखीय प्रदर्शन तथा चित्रों द्वारा प्रदर्शन किया जाता है। इन विभिन्न सांख्यिकीय रीतियों के प्रयोग का मुख्य उद्देश्य समंकों के विशाल परिमाण को घटा कर उन्हें संक्षिप्त रूप देना था क्योंकि साधारण मनुष्यों का मस्तिष्क विशाल आंकड़ों को याद रखने की अपेक्षा छोटे आंकड़ों को याद रखने में विशेष सफल होता है।* फिर भी

---

*The inherent inability of the human mind to grasp in its entirety a large body of numerical data compels us to seek relatively few constants that will adequately describe the data—**R. A. Fisher.**

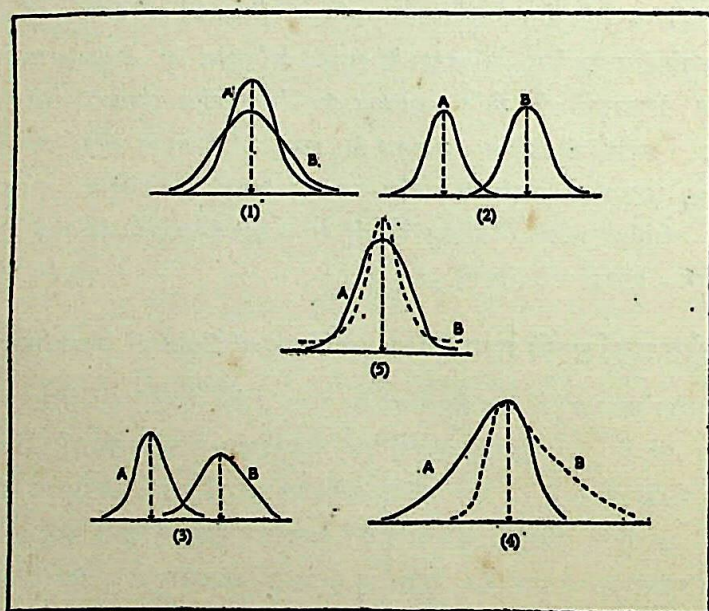
वर्गीकरण द्वारा प्राप्त किसी आवृत्ति-वितरण (Frequency Distribution) की केन्द्रीय-प्रवृत्ति (Central Tendency) का अध्ययन करना तथा उसकी तुलना अन्य आवृत्ति-वितरणों की केन्द्रीय-प्रवृत्तियों से करना कठिन होता है क्योंकि वे एक दूसरे से निम्न बातों में भिन्न होते है :—

(१) आवृत्ति-वितरणों की केन्द्रीय-प्रवृत्ति समान हो किन्तु उनके वितरण में अपकिरण (Dispersion) हो;

(२) उनके वितरण में समानता हो किन्तु उनकी केन्द्रीय-प्रवृत्तियाँ समान न हों;

(३) उनके वितरण तथा उनकी केन्द्रीय-प्रवृत्तियों में गहन असमानता हो;

(४) उनके वितरण में विपरीत विषमता (Skewness) हो किन्तु उनकी केन्द्रीय-प्रवृत्तियाँ समान हों;

(५) उनकी केन्द्रीय-प्रवृत्तियाँ समान हों किन्तु उनके पृथु-शीर्षत्व (Kurtosis) में अन्तर हो।

इस अध्याय में हम आवृत्ति-वितरण की केन्द्रीय-प्रवृत्ति का अध्ययन करेंगे। यह अध्ययन सांख्यिकीय माध्यों की सहायता से किया जाता है। सांख्यिकीय माध्य किसी समंक माला की केन्द्रीय-प्रवृत्ति को प्रदर्शित करने वाला एक ऐसा संक्षिप्त आंकड़ा है जो उस समंक माला की विशेषताओं पर

प्रकाश डालता है, उसका प्रतिनिधित्व करता है और उसी प्रकार की अन्य समंक मालाओं के तुलनात्मक अध्ययन का अवसर देता है। डा० बाउले के शब्दों में—माध्य वास्तव में एक गणितीय सिद्धान्त है, जैसे उदाहरण के लिये किसी परिवर्तनशील जनसंख्या में मनुष्यों का मध्यक जीवन, जो किसी वर्ग विशेष का स्पष्टीकरण तो नहीं करता, किन्तु वह केवल एक गणितीय परिणाम को व्यक्त करने का एक संक्षिप्त ढंग है।* वस्तुतः सांख्यिकी में माध्यों का अत्यधिक महत्व है। यही कारण है जिससे प्रभावित होकर डा० बाउले ने सांख्यिकी को माध्यों का विज्ञान कहा है।†

सांख्यिकीय माध्य को ज्ञात करते समय इस बात का ध्यान रखना चाहिये कि चूंकि वह समंक माला के विभिन्न मूल्यों का प्रतिनिधित्व करने वाला एक संक्षिप्त अंक है, अतः वह उसी इकाई में व्यक्त किया जायगा जिसमें समंकों के अन्य मूल्य दिये हुये हैं, जैसे यदि किसी कक्षा के विद्यार्थियों की फीट व इंच में ऊँचाइयाँ दी हुई है तो मध्यक ऊँचाई भी फीट व इंच में होगी।

सन्तोषजनक माध्य के आवश्यक गुण
(Essentials of a Satisfactory Average)

प्रो० यूल और केंडल (Yule and Kendall) के विचारानुसार एक सन्तोषजनक माध्य में निम्नलिखित छः गुणों का होना आवश्यक है :—

(१) एक सन्तोषजनक माध्य में सबसे पहले यह गुण होना चाहियें कि वह स्पष्ट हो; केवल एक अनुमान मात्र न हो। यदि वह स्पष्ट नहीं है, केवल एक अनुमान पर आधारित है तो हरएक व्यक्ति उससे अलग-अलग अभिप्राय निकालेगा, जिसके फलस्वरूप समंक माला की वास्तविक विशेषता का ज्ञान प्राप्त करना कठिन हो जायगा।

(२) यह आवश्यक है कि माध्य समंकमाला के सभी समंकों पर आधारित हो, अन्यथा वह पूर्णरूप से उनका प्रतिनिधित्व न कर सकेगा और उनके वास्तविक स्वरूप को प्रस्तुत करने में असफल होगा।

---

*An average is purely a mathematical conception, such as the average length of life in a varied population which does not correspond to any particular group, but is only a short way of expressing an arithmetical result—Dr. Bowley.

†Statistics may rightly be called the Science of Averages—Dr. Bowley.

(३) माध्य केवल एक साधारण अंक मात्र ही न होना चाहिए। वह एक ऐसा अंक होना चाहिये जिसकी प्रकृति का ज्ञान सर्वसाधारण को हो सके, तभी लोग उसके महत्व को समझ सकते हैं। केवल '250 रु०' को हम माध्य नहीं कह सकते, क्योंकि इस अंक की प्रकृति पर कोई प्रकाश नहीं डाला गया है। किन्तु यदि किसी संस्था में तीन कर्मचारियों की आय क्रमशः 200 रु०, 250 रु० और 300 रु० हो, और यह कहा जाय कि उस संस्था के कर्मचारियों की आय का माध्य '250 रु०' है, तो इस अंक का अर्थ लोग सरलता से समझ जायेंगे।

(४) उस माध्य को ज्ञात करना सुगम हो। यदि वह माध्य अत्यधिक पेचीदे नियमों का प्रयोग करने से ज्ञात होता है, तो ऐसी कठिनाई उठाकर माध्य को निकालना कोई पसन्द न करेगा। साथ ही वह माध्य सरलतापूर्वक और शीघ्र से शीघ्र ज्ञात होने वाला होना चाहिये।

(५) माध्य पर निदर्शन के उच्चावचनों (Fluctuations of Sampling) का न्यूनतम प्रभाव पड़ना चाहिये। यदि उचित माध्य का प्रयोग किया गया होगा तो एक ही समग्र (Universe) में से जितने न्यादर्श (Sample) लिये जायेंगे उनके माध्यों में समानता पाई जायगी। माध्य जितना ही सन्तोषजनक एवं उपयुक्त होगा उतना ही विभिन्न न्यादर्शों के माध्यों में कम अन्तर दिखलाई पड़ेगा।

(६) माध्य में अन्तिम गुण यह होना चाहिये कि उसका प्रयोग बीजगणितीय पद्धतियों में सफलतापूर्वक किया जा सके, अन्यथा उसका प्रयोग संकुचित होगा। किसी माध्य का विशेष अध्ययन करने के लिये बीजगणित की बड़ी आवश्यकता पड़ती है

माध्यों के भेद (Kinds of Averages)

सांख्यिकी में मुख्यतः निम्नलिखित प्रकार के माध्यों का अध्ययन किया जाता है :—

(१) मध्यक (Arithmetic Average, Arithmetic Mean or Mean) जिसके लिये A या a संकेतों (Symbols) का प्रयोग किया जाता है।

(२) गुणोत्तर मध्यक (Geometric Average or Geometric Mean) जिसके लिये G, g या Mg संकेतों का प्रयोग किया जाता है।

(३) हरात्मक मध्यक (Harmonic Average or Harmonic Mean) जिसके लिये H, h या Mh संकेतों का प्रयोग किया जाता है।

(४) मध्यका (Median) जिसके लिये M संकेत का प्रयोग किया जाता है।

(५) भूयिष्ठक (Mode) जिसके लिये Z या Mo संकेतों का प्रयोग किया जाता है।

(६) वर्ग करणी माध्य (Quadratic Mean) जिसके लिये $Q. M.$ संकेत का प्रयोग किया जाता है।

(७) चल-माध्य (Moving Average) जिसका प्रदर्शन विन्दुरेखीय (Graphical) ढंग से किया जाता है।

(८) उत्तरोत्तर माध्य (Progressive Average) जिसका प्रदर्शन भी विन्दुरेखीय ढंग से किया जाता है।

उपर्युक्त माध्यों में मध्यक, गुणोत्तर मध्यक, हरात्मक मध्यक और वर्गकरणी माध्य गणितीय माध्य (Mathematical Averages), मध्यका और भूयिष्ठक स्थिति माध्य (Averages of Position) और चल-माध्य तथा उत्तरोत्तर माध्य व्यापारिक माध्य (Business Averages) कहलाते हैं। सांख्यिकी में वर्गकरणी माध्य और उत्तरोत्तर माध्य को छोड़कर शेष माध्यों का अधिकाधिक प्रयोग किया जाता है।

माध्य अथवा मध्यक (Arithmetic Average)

माध्य, मध्यक या गणितीय माध्य वह मूल्य है जो किसी समंकमाला के विभिन्न चल मूल्यों को जोड़ कर उनकी संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है। सांख्यिकी में 'मध्यक' और गणित में 'औसत' एक ही वस्तु है। उदाहरण के लिये यदि x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, इत्यादि किसी समंक माला के पाँच चलों का मूल्य है, तो उनका मध्यक वह मूल्य होगा जो इन्हें जोड़ कर पाँच से भाग देने पर प्राप्त होगा। मध्यक के लिये A या a चिन्हों (Symbols) का प्रयोग किया जाता है। इसका साधारण सूत्र (Formula) निम्नलिखित है :—

$$a=\frac{x_1+x_2+x_3\ldots\ldots+x_n}{n}$$

यहाँ n समंकमाला में दिये गये कुल मूल्यों की संख्या है।

मध्यक निकालने की रीति
(Method of calculating the Arithmetic Average)

उपर्युक्त सूत्र को देखने से ज्ञात होगा कि मध्यक का निकालना अत्यन्त सरल है। यदि चलों का कुल मूल्य व उनकी कुल संख्या ज्ञात हो, तो पहले को दूसरे से भाग देने पर मध्यक निकल आयेगा। मध्यक ज्ञात करने की दो रीतियाँ हैं :—

(१) ऋजु रीति (Direct Method)

(२) लघु रीति (Short-cut Method)

ऋजु रीति से मध्यक ज्ञात करने की रीति वही है जिसका ऊपर वर्णन किया गया है। किन्तु यह रीति वहीं सुगम होती है जहाँ चलों की संख्या कम हो तथा उनके मूल्य दशमलव या भिन्न में न हों। ऐसी स्थिति में मध्यक ज्ञात करने के लिये लघु रीति अपनाई जाती है। इस रीति के अनुसार किसी कल्पित चल-मूल्य को **कल्पित मध्यक** (Assumed Mean, Working Mean or Provisional Mean) मान लिया जाता है, और इस कल्पित माध्य से धन(+) और ऋण(—) के चिन्हों का ध्यान रखते हुये विभिन्न चलों का विचलन (Deviation) निकाल लिया जाता है। फिर इन विचलनों के योग का मध्यक निकाल कर, यदि वह मध्यक धन-राशि है तो कल्पित-मध्यक में जोड़ दिया जाता है, और यदि ऋण-राशि है तो घटा दिया जाता है। इस प्रकार प्राप्त होने वाला मूल्य शुद्ध मध्यक होता है। नीचे दिये गये विभिन्न उदाहरणों में ये रीतियाँ स्पष्ट की गई हैं।

साधारण श्रेणी (Individual Series)

साधारण श्रेणी में मध्यक निकालने के लिये ये सूत्र प्रयोग में लाये जाते हैं :—

(अ) ऋजुरीति (Direct Method)

$$a = \frac{x_1 + x_2 + x_3 \ldots\ldots + x_n}{n}$$

अथवा संक्षेप में $= \frac{*\Sigma x}{n}$

---

* बीजगणित में प्रयोग किया जाने वाला यह चिन्ह (Σ) 'Capital Sigma' या 'Summation' कहलाता है, जिसका अर्थ है—'इस प्रकार के मूल्यों का योग'। यह Greek भाषा का अक्षर है।

(ब) लघु रीति (Short-cut Method)

$$a = a' \pm \frac{\Sigma dx'}{n}$$

जहाँ (a') कल्पित मध्यक है और ($\Sigma dx'$) कल्पित मध्यक से धन (+) और ऋण (−) का ध्यान रखते हुये विभिन्न चल-मूल्यों से निकाले गये विचलनों का योग है। सूत्र में धन (+) औरं (−) के दोनों चिन्ह यह संकेत करते हैं कि यदि ($\Sigma dx'$) का मूल्य धन-राशि (+) है, तो (+) रखिये और यदि ($\Sigma dx'$) का मूल्य ऋण राशि (−) है, तो (−) रखिये।

Illustration 1 :—

The monthly income of ten families in rupees in a certain locality are given below :—

Family	Income in Rupees	Family	Income in Rupees
A	85	*F*	8
B	70	*G*	42
C	10	*H*	250
D	75	*I*	40
E	500	*J*	36

Calculate the Arithmetic Average by (*a*) Direct Method and (*b*) Short-cut Method.

(बी० कॉम०, आगरा, १९४५)

Solution :—

यह प्रश्न दोनों रीतियों से किया जा रहा है :—

CALCULATION OF ARITHMETIC AVERAGE

(*By Direct Method*)

Family		Income in Rupees (x)
A	...	85
B	...	70
C	...	10
D	...	75
E	...	500
F	...	8
G	...	42
H	...	250
I	...	40
J	...	36
$n=10$		$\Sigma x = 1,116$

सूत्र के अनुसार $a=\frac{\Sigma x}{n}$

$=\frac{1,116}{10}$

$=$Rs. 111.6

CALCULATION OF ARITHMETIC AVERAGE

(*By Short-cut Method*)

Family	Income in Rupees (x)	Deviations from Assumed Average (75) (dx')
A	85	+ 10
B	70	− 5
C	10	− 65
D	75	0
E	500	+425
F	8	− 67
G	42	− 33
H	250	+175
I	40	− 35
J	36	− 39
$n=10$		$\Sigma\, dx=+366$

सूत्र के अनुसार $a=a'\pm\frac{\Sigma dx'}{n}$

$=75\pm\left\{\frac{+366}{10}\right\}$

$=75\pm(+36.6)$

$=75+36.6$

$=$Rs. 111.6

उपर्युक्त उदाहरण में विचलन निकालते समय धन (+) और ऋण (−) के चिन्हों का ध्यान रखा गया है। यह पहले ही वतलाया जा चुका है कि चलों का विचलन कल्पित-मध्यक से निकाला जाता है। अतः जब चल का

मूल्य कल्पित मध्यक से अधिक है, तो विचलन के पूर्व धन (+) का चिन्ह रखा गया है, और जब इसके विपरीत परिस्थिति है तो ऋण का चिन्ह दिखलाया गया है।

Illustration 2 :—

The following data has been taken from a Government publication :—

PERCENTAGE UNEMPLOYED AMONG INSURED PERSONS

(Average for the year)

Year	Males	Females	Year	Males	Females
1941	16.1	8.7	1949	16.4	14.4
1942	12.4	9.0	1950	22.4	17.7
1943	10.8	8.5	1951	25.1	13.5
1944	12.0	8.1	1952	23.1	11.2
1945	13.2	9.5	1953	19.1	9.8
1946	10.9	6.2	1954	17.8	9.4
1947	12.2	6.7	1955	14.6	8.3
1948	11.5	7.2	1956	11.8	7.7

Fine out the average percentage of unemployed males and females among insured persons for the years 1941-1956, using (*a*) Direct Method and (*b*) Short-cut Method.

(एम० ए०, बनारस, १९५६)

इस उदाहरण में दो समंक मालायें दी हुई हैं (एक पुरुषों से और दूसरी स्त्रियों से सम्बन्धित), इसलिये एक को X और दूसरी को Y मान लिया गया है, जिससे सूत्रों का प्रयोग ठीक तरह से स्पष्ट हो सके। कल्पित माध्य भी इस ढंग से चुने गये हैं कि विचलन के मध्यकों में आने वाले धन (+) व ऋण (—) के चिन्हों का प्रयोग करना ठीक तरह से समझ में आ जाय। ऋजु व लघु दोनों रीतियों द्वारा एक ही उत्तर निकलना चाहिये। यदि कहीं पर कोई सूक्ष्म अन्तर होता है तो वह अकों की सन्निकटता (Approximation) के कारण समझना चाहिये क्योंकि यदि हम सूत्र को इस प्रकार रखें :—

$$a - a' = \frac{\Sigma dx'}{n}$$

तो इससे यह ज्ञात होता है कि शुद्ध व कल्पित मध्यक का अन्तर सर्वदा विचलनों के मध्यक के बराबर (+ व — के चिन्हों को छोड़ा जा सकता है) होता है। इसको हम सिद्ध भी कर सकते हैं। जैसे, यदि $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ किसी माला के मूल्य तथा $(x_1-a'), (x_2-a'), (x_3-a') \ldots (x_n-a')$, आदि उनके कल्पित मध्यक से लियं गये विचलन (सूत्रानुसार $dx'_1, dx'_2, dx'_3 \ldots dx'_n$) हों, तो

$$a-a' = \frac{\Sigma(x_1-a')+(x_2-a')+(x_3-a')\ldots+(x_n-a')}{n}$$

$$= \frac{\Sigma(x_1+x_2+x_3\ldots+x_n)}{n} + \frac{\Sigma(a'+a'+a'\ldots+a')}{n}$$

$$= a-a'$$

Solution :—

CALCULATION OF ARITHMETIC AVERAGE

(By Direct and Short-cut Methods)

Year	Males (%) (x)	Deviations from Ass. Average 16.4 (dx')	Females (%) (y)	Deviations from Ass. Average 8.5 (dy')
1941	16.1	−0.3	8.7	+0.2
1942	12.4	−4.0	9.0	+0.5
1943	10.8	−5.6	8.5	0.0
1944	12.0	−4.4	8.1	−0.4
1945	13.2	−3.2	9.5	+1.0
1946	10.9	−5.5	6.2	−2.3
1947	12.2	−4.2	6.7	−1.8
1948	11.5	−4.9	7.2	−1.3
1949	16.4	0.0	14.4	+5.9
1950	22.4	+6.0	17.7	+9.2
1951	25.1	+8.7	13.5	+5.0
1952	23.1	+6.7	11.2	+2.7
1953	19.1	+2.7	9.8	+1.3
1954	17.8	+1.4	9.4	+0.9
1955	14.6	−1.8	8.3	−0.2
1956	11.8	−4.6	7.7	−0.8
$n=16$	$\Sigma x=249.4$	$\Sigma dx'=-13.0$	$\Sigma y=155.9$	$\Sigma dy'=+19.9$

DIRECT METHOD

X Series

$$a_1 = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{249.4}{16} = 15.59\%$$

Y Series

$$a_2 = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{155.9}{16} = 9.74\%$$

SHORT-CUT METHOD

$$a_1 = a_1' \pm \frac{\Sigma dx'}{n} = 16.4 \pm \left\{\frac{-13.0}{16}\right\} = 16.4 - 0.81 = 15.59\%$$

$$a_2 = a_2' \pm \frac{\Sigma dy'}{n} = 8.5 \pm \left\{\frac{+19.9}{16}\right\} = 8.5 + 1.24 = 9.74\%$$

विच्छिन्न माला (Discrete Series)

विच्छिन्न माला में मध्यक ज्ञात करने के लिये उपरोक्त सूत्र में कुछ संशोधन करने की आवश्यकता पड़ती है, यद्यपि सिद्धान्त में कोई अन्तर नहीं है। यह पहले ही बतलाया जा चुका है कि कुल मूल्यों के योग में यदि कुल संख्या से भाग दे दिया जाय तो मध्यक निकल आयेगा। विच्छिन्न माला में प्रत्येक मूल्य की अलग-अलग आवृति (Frequency) भी दी रहती है, इसलिये कुल मूल्यों के योग को ज्ञात करने के लिये प्रत्येक मूल्य को उसकी सम्बन्धित आवृत्ति से गुणा करना पड़ता है। इन गुणनफलों का योग कुल-मूल्य है, और इसमें आवृत्तियों के योग से भाग देने पर मध्यक निकलता है। अतः आवश्यक संशोधन करने के उपरान्त सूत्र इस प्रकार हो जायगा :—

(अ) ऋजु रीति (Direct Method)

$$a = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 \ldots\ldots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + f_3 \ldots\ldots + f_n}$$

अथवा संक्षेप में $= \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$

(ब) लघु रीति (Short-cut Method)

$$a = a' \pm \frac{\Sigma f dx'}{\Sigma f}$$

निम्नलिखित उदाहरणों से विच्छिन्न माला में मध्यक निकालने की रीति स्पष्ट हो जायगी :—

Illustration 3 :—

Calculate the Arithmetic Average of the following distribution by Direct and Short-cut methods :—

Wages in Rs.	No. of workers
35	135
42	471
50	628
54	514
60	97

Solution :—

CALCULATION OF ARITHMETIC AVERAGE

(By Direct and Short-cut Methods)

Wages in Rupees (x)	Number of workers (f)	Product of Col. (1)×(2) (fx)	Deviations from Ass. Average (50) (dx')	Product of Col. (2)×(4) (fdx')
35	135	4,725	−15	−2,025
42	471	19,782	− 8	−3,768
50	628	31,400	0	0
54	514	27,756	+ 4	+2,056
60	97	5,820	+10	+ 970
	Σf=1,845	Σfx=89,483		$\Sigma fdx'$= −2,767

DIRECT METHOD

$$a=\frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$$

$$=\frac{89,482}{1,845}$$

$$=\text{Rs. } 48.5$$

SHORT-CUT METHOD

$$a=a'\pm\frac{\Sigma fdx'}{\Sigma f}$$

$$=50\pm\left\{\frac{-2,767}{1,845}\right\}$$

$$=50-1.5$$

$$=\text{Rs. } 48.5$$

अविच्छिन्न माला Continuous Series)

अविच्छिन्न माला में मध्यक निकालने के लिये भी विच्छिन्न माला में प्रयोग किये जाने वाले सूत्र ही प्रयोग में लाये जाते हैं, केवल अन्तर यह होता है कि वर्गों के मध्य-विन्दुओं को (x) मानना पड़ता है। मध्य-विन्दु ज्ञात करने की रीति का वर्णन अध्याय ६ के पृष्ठ ९२ पर किया जा चुका है।

Illustration 4 :—

Calculate the Arithmetic Mean of the following frequency distribution, using Direct and Short-cut methods :—

Exceeding	Not exceeding	Frequency
7½	8½	7
8½	9½	12
9½	10½	19
10½	11½	24
11½	12½	20
12½	13½	13
13½	14½	5

Solution :—

Group	Mid-point (x)	Frequency (f)	Product of col. (2)×(3) (fx)	Deviations from Ass. Average (11) (dx')	Product of Col. (3)×(5) (fdx')
7½—8½	8	7	56	−3	−21
8½—9½	9	12	108	−2	−24
9½—10½	10	19	190	−1	−19
10½—11½	11	24	264	0	0
11½—12½	12	20	240	+1	+20
12½—13½	13	13	169	+2	+26
13½—14½	14	5	70	+3	+15
		$\Sigma f=100$	$\Sigma fx=1{,}097$		$\Sigma fdx'=-3$

DIRECT METHOD	SHORT-CUT METHOD
$a=\frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$	$a= a' \pm \frac{\Sigma fdx'}{\Sigma f}$
$=\frac{1,097}{100}$	$= 11 \pm \left\{\frac{-3}{100}\right\}$
	$= 11-0.03$
$= 10.97$ units	$= 10.97$ units

लघु रीति से मध्यक निकालते समय क्रिया को और सुगम बनाने के लिए कभी कभी विचलनों में से उभयनिष्ठ गुणक निकाल लिया जाता है, और तब उनमें आवृत्तियों का गुणा किया जाता है। मध्यक ज्ञात करने के लिए सूत्र का प्रयोग करते समय केवल उस उभयनिष्ठ गुणक से विचलनों के मध्यक, अर्थात, $\frac{\Sigma fdx'}{\Sigma f}$ में गुणा कर देना पड़ता है। अतः सूत्र में यह संशोधन हो जायगा :—

$$a=a' \pm \frac{\Sigma fdx'}{\Sigma f} \times Common\ Factor$$

उदाहरण ५ में कालम (6) और (7) इसी उद्देश्य से बनाये गए हैं। अतः इस नये सूत्र का प्रयोग करते हुए निम्न उदाहरण को हल किया जा रहा है।

Illustration 5 :—

Given the following frequency distribution ; calculate the Arithmetic Average by Direct and Short-cut methods :—

Monthly wages Rs.	Number of Workers	Monthly wages Rs.	Number of Workers
12.5—17.5	3	32.5—37.5	3
17.5—22.5	22	37.5—42.5	4
22.5—27.5	19	42.5—47.5	6
27.5—32.5	14	47.5—52.5	1

(एम० एस० सी०, पंजाब, १९४३)

Solution :—

CALCULATION OF ARITHMETIC AVERAGE

(*By Short-cut Methods*)

Monthly Wages Rs.	Mid-point (x)	No. of workers (f)	Deviation from Ass. Average 30 (dx')	Product of Col.(3)×(4) (fdx')	Deviations (5 Common) (dx'')	Product of Col. (3)×(6) (fdx'')
12.5—17.5	15	3	—15	— 45	—3	— 9
17.5—22.5	20	22	—10	—220	—2	—44
22.5—27.5	25	19	— 5	— 95	—1	—19
27.5—32.5	30	14	0	0	0	0
32.5—37.5	35	3	+ 5	+ 15	+1	+ 3
37.5—42.5	40	4	+10	+ 40	+2	+ 8
42.5—47.5	45	6	+15	+ 90	+3	+18
47.5—52.5	50	1	+20	+ 20	+4	+ 4
		$\Sigma f=72$		$\Sigma fdx'=-195$		$\Sigma fdx''=-39$

$$a=a'\pm\frac{\Sigma fdx'}{\Sigma f} \qquad a=a'\pm\frac{\Sigma fdx''}{\Sigma f}\times\text{Common Factor}$$

$$=30\pm\left\{\frac{-195}{72}\right\} \qquad =30\pm\left\{\frac{-39}{72}\right\}\times 5$$

$$=30-2.71 \qquad =30-2.71$$

$$=\text{Rs. } 27.29 \qquad =\text{Rs. } 27.29$$

Illustration 6 :—

The following table gives the distribution of population according to age in *India* and *Japan* at the time of the Census of 1931 :—

Age Group (*Years*)	Population in millions	
	India	Japan
0—10	98.9	17.8
10—20	72.5	14.3
20—30	63.2	11.3
30—40	48.6	8.6
40—50	32.6	6.5
50—60	19.4	5.4
60—80	13.2	5.1

Calculate the average age of people in India and Japan.

(बी० कॉम०, बनारस, १९५५)

Solution :—

CALCULATION OF THE AVERAGE AGE OF PEOPLE IN INDIA AND JAPAN

Age Groups (years)	Mid-point (x)	Deviations from Ass. Av. (35) taking 5 Common (dx')	INDIA		JAPAN	
			Frequency (f_1)	Product of Col. (3)×(4) (f_1dx')	Frequency (f_2)	Product of Col. (3)×(6) (f_2dx')
0—10	5	−6	98.9	−593.4	17.8	−106.8
10—20	15	−4	72.5	−290.0	14.3	− 57.2
20—30	25	−2	63.2	−126.4	11.3	− 22.6
30—40	35	0	48.6	0	8.6	0
40—50	45	+2	32.6	+ 65.2	6.5	+ 13.0
50—60	55	+4	19.4	+ 77.6	5.4	+ 21.6
60—80	70	+7	13.2	+ 92.4	5.1	+ 35.7
			$\Sigma f_1=$ 348.4	$\Sigma f_1dx'=$ −774.6	$\Sigma f_2=$ 69.0	$\Sigma f_2dx'=$ −116.3

INDIA

$$a_1 = a_1' \pm \frac{\Sigma f_1dx'}{\Sigma f_1} \times \text{Common Factor}$$

$$= 35 \pm \left\{ \frac{-774.6}{348.4} \right\} \times 5$$

JAPAN

$$a_2 = a_2' \pm \frac{\Sigma f_2dx'}{\Sigma f_2} \times \text{Common Factor}$$

$$= 35 \pm \left\{ \frac{-116.3}{69.0} \right\} \times 5$$

= 35—11.1 = 35—8.4

= 23.9 years = 26.6 years

Illustration 7 :—

The following are the monthly salaries in rupees of 30 employees of a firm :—

139,	126,	114,	100,	88,	62,
77,	99,	103,	144,	148,	63,
69,	148,	132,	118,	142,	116,
123,	104,	95,	80,	85,	106,
123,	133,	140,	134,	108,	129.

The firm gave bonus of Rs. 10, 15, 20, 25, 30 and 35 for individuals in the respective salary groups :—

Exceeding 60 but not exceeding 75, exceeding 75 but not exceeding 90 and so on upto exceeding 135 but not exceeding 150. Find out the average bonus paid per employee.

(बी० कॉम०, बनारस, १९५७)

Solution :—

इस प्रश्न को हल करने के लिये सर्वप्रथम यह जानने की आवश्यकता है कि प्रत्येक वेतन-वर्ग (Salary Group) में कितने-कितने कर्मचारी हैं। इसके लिये एक निम्न ढंग की आवृत्ति-तालिका अथवा सारणी (Frequency Table) बनाने की आवश्यकता पड़ेगी। प्रश्न में दिये गये वेतनों को ध्यान में रखते हुये यह तालिका बनाई गई है :—

FREQUENCY TABLE SHOWING THE NUMBER OF EMPLOYEES IN EACH SALARY GROUP

Exceeding	Not exceeding	No. of Employees
60	75	3
75	90	4
90	105	5
105	120	5
120	135	7
135	150	6

इस प्रकार इस तालिका द्वारा ज्ञात हो गया कि प्रत्येक वेतन-वर्ग में कितने-कितने कर्मचारी हैं। अब इन आवृत्तियों की सहायता से प्रति कर्मचारी कितने रुपये मध्यक बोनस दिया गया यह आसानी से ज्ञात किया जा सकता है। प्रति कर्मचारी मध्यक बोनस निकालने की जो तालिका नीचे दी जा रही है, वह एक विच्छिन्न माला (Discrete Series) है।

Calculation of Average Bonus

Bonus in Rupees (x)	No. of Employees (f)	Deviations from Ass. Average 20 (dx')	Deviations taking 5 Common (dx'')	Product of Col. (2)×(4) (fdx'')
10	3	−10	−2	− 6
15	4	− 5	−1	− 4
20	5	0	0	0
25	5	+ 5	+1	+ 5
30	7	+10	+2	+14
35	6	+15	+3	+18
	$\Sigma f=30$			$\Sigma fdx''=+27$

विच्छिन्न माला में मध्यक निकालने वाले सूत्र का प्रयोग करने पर—

$$a=a'+\frac{\Sigma fdx''}{\Sigma f}\times \text{Common Factor}$$

$$=20\pm\left\{\frac{+27}{30}\right\}\times 5$$

$$\dot{=}20+4.5$$

$$=\text{Rs. } 24.5$$

सामूहिक मध्यक (Combined Arithmetic Average)

विभिन्न न्यादर्शों (Samples) के व्यक्तिगत मध्यकों की सहायता से सामूहिक मध्यक भी ज्ञात किया जा सकता है। सामूहिक मध्यक निकालने के लिये निम्न सूत्र का प्रयोग करना चाहिये :—

$$\text{Combined Mean} = \frac{f_1a_1+f_2a_2+f_3a_3\ldots\ldots+f_na_n}{f_1+f_2+f_3\ldots\ldots+f_n}$$

$$= \frac{\Sigma fa}{\Sigma f}$$

इस सूत्र में a_1, a_2, a_3, इत्यादि विभिन्न न्यादर्शों के व्यक्तिगत मध्यक व f_1, f_2, f_3, इत्यादि उनकी आवृत्तियां हैं।

Illustration 8:—

A distribution consists of three components with total frequencies of 200, 250 and 300, having means of 25, 10 and 15 respectively. Show that the mean of the combined distribution is 16.

(एम० कॉम०, बनारस, १९५४)

Solution :—

Sample		*Mean*	*Frequency*
A	...	25	200
B	...	10	250
C	...	15	300

$$\text{Combined Mean} = \frac{f_1a_1+f_2a_2+f_3a_3}{f_1+f_2+f_3}$$

$$= \frac{(200\times 25)+(250\times 10)+(300\times 15)}{(200+250+300)}$$

$$= \frac{5{,}000\times 2{,}500\times 4{,}500}{750}$$

$$= \frac{12{,}000}{750}$$

$$= 16 \text{ units.}$$

मध्यक के लाभ (Advantages of Arithmetic Mean)

(१) मध्यक का अर्थ साधारण व्यक्ति भी समझता है, अतः उसका प्रयोग करते समय उसकी परिभाषा देना आवश्यक नहीं होता।

(२) इसकी गणना सरल होती है।

(३) इसका प्रयोग बीजगणित में भी किया जा सकता है। अतः उच्चतर सांख्यिकीय अध्ययन में मध्यक का प्रयोग नितांत आवश्यक होता है।

(४) मध्यक समंकमाला की सभी आकृतियों पर आधारित रहता है।

(५) इसे ज्ञात करने के लिये समंकों का अनुविन्यसन करना अथवा उनको किसी क्रम में रखना आवश्यक नहीं होता।

(६) यदि किसी समंक माला के चलों का कुल मूल्य तथा चलों की कुल संख्या दी हुई हो, तो अन्य मूल्यों के अभाव में भी इसकी गणना की जा सकती है।

(७) इसके अतिरिक्त यदि केवल मध्यक व चलों की कुल संख्या दी हुई हो तो चलों का कुल मूल्य ज्ञात कियां जा सकता है।

(८) यदि समंक माला में पर्याप्त चलों के मूल्य दिये हुये हों तो मध्यक तुलनात्मक अध्ययन के लिये विशेष विश्वसनीय समझा जाता है।

मध्यक के दोष (Disadvantages of Arithmetic Mean)

(१) किसी समंक माला की आकृतियों को देख कर मध्यक का अनुमान करना कठिन है।

(२) इसका प्रयोग गुणात्मक (Qualitative) समंकों का अध्ययन करने के लिये नहीं किया जा सकता।

(३) यदि समंक माला का कोई भी मूल्य अज्ञात है तो मध्यक की गणना नहीं की जा सकती, जब कि भूयिष्ठक व मध्यका ज्ञात्त किये जा सकते हैं।

(४) साधारणत: मध्यक समंक माला के बाहर का कोई मूल्य होता है, अत: वह माला के मूल्यों का प्रतिनिधित्व करने में कभी कभी असफल हो जाता है। जैसे, 1, 2, 3, 4 का मध्यक 2.5 है जो समंक माला के बाहर का मूल्य होने के कारण उसके किसी भी मूल्य का प्रतिनिधित्व नहीं करता।

(५) मध्यक छोटे मूल्यों की अपेक्षा बड़े मूल्यों को अधिक महत्व देता है। जैसे, यदि किसी साधारण श्रेणी के खेतिहर गाँव में कोई करोड़पति महाजन आ जाय तो उसकी आय के कारण गाँव की मध्यक आय पर अत्यधिक प्रभाव पड़ जायगा।

(६) दो समंक मालाओं के मध्यक समान होते हुये भी उनकी बनावट में बहुत अन्तर हो सकता है। उदाहरण के लिये यदि एक संस्था का पिछले तीन वर्षों का लाभ क्रमशः 1,000 रु०, 2,000 रु० व 3,000 रु० हो, तथा दूसरी का क्रमशः 3,000 रु०, 2,000 रु० व 1,000 रु० हो, तो यद्यपि दोनों के मध्यक समान (अर्थात् 2,000 रु०) हैं, किन्तु प्रथम संस्था उन्नति की ओर अग्रसर हो रही है जब कि दूसरी संस्था अवनति की ओर। अतः ऐसी स्थिति में मध्यक भ्रामक सूचनायें देता है।

(७) अनुपात व दर, आदि का अध्ययन करने के लिये मध्यक का प्रयोग अनुपयुक्त समझा जाता है।

भाराङ्कित मध्यक (Weighted Arithmetic Average)

साधारण मध्यक निकालने की जिन रीतियों का वर्णन ऊपर किया गया उनको ध्यानपूर्वक देखने से स्पष्ट हो जायगा कि समंक माला के सभी मूल्यों को समान महत्व दिया गया है। परन्तु वास्तव में माला के प्रत्येक मूल्य का अलग-अलग अपना निजी महत्व होता है। इसलिये मध्यक निकालने के पूर्व सभी मूल्यों को उनका सापेक्षिक (Relative) महत्व देना आवश्यक होता है, जिन्हें सांख्यिकी में भार (Weight) कहते हैं, और इस प्रकार प्राप्त किये गये मध्यक को **भाराङ्कित मध्यक** (Weighted Arithmetic Average) कहते हैं। इसके लिये *wa* चिन्ह (Symbol) का प्रयोग किया जाता है।

भाराङ्कित मध्यक निकालने की रीति

(Method of calculating the Weighted Arithmetic Average)

यदि $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$, इत्यादि किसी समंक माला के विभिन्न मूल्य हों और $w_1, w_2. w_3 \ldots\ldots w_n$ उनके सापेक्षिक भार हों, तो भाराङ्कित मध्यक निकालने का सूत्र (Formula) यह होगा :—

$$wa = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 \ldots\ldots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + w_3 \ldots\ldots + w_nx_n}$$

अथवा संक्षेप में $= \dfrac{\Sigma wx}{\Sigma w}$

Illustration 9 :—

A candidate obtains the following percentages in an examination : English, 73 ; Mathematics, 82 ; Geography, 57 ; General Science 62, and Drawing, 60. Find the candidate's weighted mean if weights of 4, 3, 3, 1, 1, respectively are allotted to the subjects. Find his unweighted mean as well.

(*Brookes and Dick*)

Solution :—

CALCULATION OF WEIGHTED AND UNWEIGHTED (SIMPLE) MEANS

Subject	Percentage of marks (x)	Weight (w)	Product of Col. (2)×(3) (wx)
English	73	4	292
Mathematics	82	3	246
Geography	57	3	171
Genl. Science	62	1	62
Drawing	60	1	60
$\Sigma n=5$	$\Sigma x=334$	$\Sigma w=12$	$\Sigma wx=831$

UNWEIGHTED MEAN

$$a=\frac{\Sigma x}{n}$$

$$=\frac{334}{5}$$

$$=66.8\%$$

WEIGHTED MEAN

$$wa=\frac{\Sigma wx}{\Sigma w}$$

$$=\frac{831}{12}$$

$$=69.25\%$$

Illustration 10 :—

Compute the simple as well as Weighted Arithmetic Average of the increase in Cost of Living over July 1944 for a working class family as at May 1, 1945 :—

Group ...	% Increase Over July 1914	Weight
Food	29.0	7.5
Rent	54.0	2.0
Clothing	97.5	1.5
Fuel and Lighting	75.0	1.0
Other items ...	75.0	0.5

Solution :—

CALCULATION OF SIMPLE AND WEIGHTED MEANS OF THE PERCENTAGE INCREASE IN COST OF LIVING

Group	Percentage Increase (x)	Weight (w)	Product of Col. (2)×(3) (wx)
Food	29.0	7.5	217.50
Rent	54.0	2.0	108.00
Clothing	97.5	1.5	146.25
Fuel and Lighting	75.0	1.0	75.00
Other items	75.0	0.5	37.50
$n=5$	$\Sigma x=330.5$	$\Sigma w=12.5$	$\Sigma wx=584.25$

SIMPLE AVERAGE

$$a = \frac{\Sigma x}{n}$$

$$= \frac{330.5}{5}$$

$$=66.1\%$$

WEIGHTED AVERAGE

$$wa = \frac{\Sigma wx}{\Sigma w}$$

$$= \frac{584.25}{12.5}$$

$$=46.74\%$$

Illustration 11 :—

The following table gives the number of employees and their monthly earnings in two factoris A and B of a particular city. Compare the weighted averages :—

Description of Workmen	Factory *A* No. of employees	Factory *A* Monthly earnings	Factory *B* No. of employees	Factory *B* Monthly earnings
A ...	3	800	2	750
B ...	20	145	10	150
C ...	15	50	15	60
D ...	25	30	25	50
E ...	80	35	40	40
F ...	250	20	120	20

Solution :—

CALCULATION OF THE WEIGHTED ARITHMETIC AVERAGE

Description of Workmen	Factory A: Earnings in Rs. (x_1)	Factory A: No. of employees (w_1)	Factory A: Product of Col. (2)×(3) (w_1x_1)	Factory B: Earnings in Rs. (x_2)	Factory B: No. of employees (w_2)	Factory B: Product of Col. (5)×(6) (w_2x_2)
A	800	3	2,400	750	2	1,500
B	145	20	2,900	150	10	1,500
C	50	15	750	60	15	900
D	30	25	750	50	25	1,250
E	35	80	2,800	40	40	1,600
F	20	250	5,000	20	120	2,400
		$\Sigma w_1 =$ 393	$\Sigma w_1x_1 =$ 14,600		$\Sigma w_2 =$ 212	$\Sigma w_2x_2 =$ 9,150

FACTORY A

$$wa_1 = \frac{\Sigma w_1x_1}{\Sigma w_1} = \frac{14,600}{393} = \text{Rs. } 37.2$$

FACTORY B

$$wa_2 = \frac{\Sigma w_2x_2}{\Sigma w_2} = \frac{9,150}{212} = \text{Rs. } 43.2$$

Thus, we find that Factory B is better than A.

वास्तविक तथा अनुमानित भार
(Actual and Estimated Weights)

ऊपर के उदाहरणों में प्रत्येक मूल्यं के सापेक्ष-भार दिये हुये हैं। परन्तु कभी कभी भारों का पता लगाना कठिन होता है। ऐसी दशा में प्रत्येक मूल्य के आपेक्षाकृत महत्व का ध्यान रखते हुये उनके सम्बन्धित भारों का अनुमान लगाया जाता है, और इन्ही अनमानित भारों (Estimated Weights) की सहायता से भाराङ्कित मध्यक निकाला जाता है। यद्यपि अलग-अलग व्यक्ति अलग-अलग ढंग से भारों का अनुमान कर सकते हैं, फिर भी यदि अनुमान तर्कयुक्त ढंग से किये गये हैं तो यह संभावना रहती है कि संख्यात्मक (Numerical) उत्तर भिन्न-भिन्न होते हुए भी परिणाम एक से ही प्राप्त होंगे। नीचे दिये गये उदाहरण में भार नहीं दिये गये हैं, अतः काल्पनिक अथवा अनुमानित भारों का प्रयोग कर के प्रश्न को हल करने का प्रयास किया गया है :—

Illustration 12 :—

The following table gives the results of certain examinations of three universities in the year 1937. Which is the best University ?

Examination	Percentage results in the University		
	A	B	C
M.A.,	80	70	70
M.Sc.,	65	70	60
B.A.,	70	80	70
B.Sc.,	60	70	80
B.Com.,	75	60	70

(एम० ए०, कलकत्ता, १९३७)

Solution :—

यदि इस प्रश्न में केवल तीनों विश्वविद्यालयों की विभिन्न परिक्षाओं के परीक्षाफलों का अलग-अलग साधारण मध्यक निकाला जाय, तो हमें ये प्रतिशत प्राप्त होंगे :—

$$a_1 = \frac{80+65+70+60+75}{5} = 70\%$$

$$a_2 = \frac{70+70+80+70+60}{5} = 70\%$$

$$a_3 = \frac{70+60+70+80+70}{5} = 70\%$$

साधारण मध्यक निकालने पर यह ज्ञात होता है कि तीनों विश्वविद्यालयों के परीक्षाफल समान हैं, अर्थात वे एक ही कोटि की शिक्षण संस्थायें हैं। किन्तु ऐसा होना आवश्यक प्रतीत नहीं होता। साधारण मध्यक निकालते समय एम० ए० और बी०ए०, एम० एस० सी० और बी० एस० सी०, आदि सभी परीक्षाओं को समान महत्व दिया गया है किन्तु वास्तव में ऐसा विचार करना भूल होगी। बी० ए० की परीक्षा में बैठने वाले विद्यार्थियों की संख्या एम० ए० में बैठने वाले विद्यार्थियों की संख्या से कहीं बहुत अधिक होती है। फिर विज्ञान की परीक्षा में कला अथवा वाणिज्य से कम विद्यार्थी बैठते हैं। यही नहीं, एक ही परीक्षा में बैठने वाले विद्यार्थियों की संख्या विभिन्न विश्वविद्यालयों में एक सी ही होगी, ऐसी कल्पना करना भी अव्यवहारिक होगा। इन सब बातों पर ध्यान देने से यह स्पष्ट हो जाता है कि ऐसे प्रश्नों को हल करने के लिये केवल साधारण मध्यक का प्रयोग करना असंगत होगा।

CALCULATION OF THE WEIGHTED AVERAGE OF THE % RESULTS IN A, B AND C UNIVERSITIES

Exams	UNIVERSITY A			UNIVERSITY B			UNIVERSITY C		
	(x_1)	(w_1)	(w_1x_1)	(x_2)	(w_2)	(w_2x_2)	(x_3)	(w_3)	(w_3x_3)
M.A.,	80	30	2,400	70	40	2,800	70	80	5,600
M.Sc.,	65	20	1,300	70	30	2,100	60	50	3,000
B.A.,	70	100	7,0 0	80	120	9,600	70	200	14,000
B.Sc.,	60	60	3,600	70	80	5,600	80	100	8,000
B.Com.,	75	80	6,000	60	100	6,000	70	120	8,400
		$\Sigma w_1 = 290$	$\Sigma w_1x_1 = 20,300$		$\Sigma w_2 = 370$	$\Sigma w_2x_2 = 26,100$		$\Sigma w_3 = 550$	$\Sigma w_3x_3 = 39,000$

WEIGHTED ARITHMETIC AVERAGES

UNIVERSITY A	UNIVERSITY B	UNIVERSITY C
$wa_1 = \frac{\Sigma w_1x_1}{\Sigma w_1}$	$wa_2 = \frac{\Sigma w_2x_2}{\Sigma w_2}$	$wa_3 = \frac{\Sigma w_3x_3}{\Sigma w_3}$

$= \frac{20,300}{290}$ $= \frac{26,100}{370}$ $= \frac{39,000}{500}$

$= 70.0\%$ $= 70.54\%$ $= 70.90\%$

कालम (3), (6) और (9) में काल्पनिक भार दिये गये हैं। इन भारों के आधार पर तीनों विश्वविद्यालयों के परीक्षाफल के भारांकित मध्यक क्रमशः 70%, 70.54% तथा 70. 90% हैं। ये प्रतिशत यह बतलाते हैं कि तीनों विश्वविद्यालय एक ही कोटि के नहीं हैं—C विश्वविद्यालय उनमें श्रेष्ठ है।

Illustration 13 :—

Taking an imaginary example show the conditions under which :—

(i) $a = wa$ (ii) $a > wa$ (iii) $a < wa$

(एम० कॉम०, बनारस, १९५४)

Solution :—

निम्नलिखित तालिका में एक काल्पनिक समंक माला ली जा रही है, और तीनों स्थितियों को प्रदर्शित करने के लिये तीन प्रकार से भार दिये जा रहे हैं—

CALCULATION OF SIMPLE AND WEIGHTED ARITHMETIC MEANS UNDER THREE CONDITIONS

Serial No.	Values (x)	CONDITION I		CONDITION II		CONDITION III	
		Weights (w_1)	Product of Col. (2) x (3) (w_1x)	Weights (w_2)	Product of Col. (2) x (5) (w_2x)	Weights (w_3)	Product of Col. (2) x (7) (w_3x)
A	30	10	300	50	1,500	10	300
B	40	10	400	40	1,600	20	800
C	50	10	500	30	1,500	30	1,500
D	60	10	600	20	1,200	40	2,400
E	70	10	700	10	700	50	3,500
$n=5$	$\Sigma x=250$	$\Sigma w_1=50$	$\Sigma w_1 x=25,000$	$\Sigma w_2=150$	$\Sigma w_2x=6,500$	$\Sigma w_3=150$	$\Sigma w_3x=1,500$

प्रत्येक स्थिति में साधारण मध्यक समान है—

$$a = \frac{\Sigma x}{n}$$

$$= \frac{250}{5}$$

$$= 50 \text{ units}$$

किन्तु प्रत्येक स्थिति में भाराङ्कित मध्यक ये होंगे—

CONDITION I	CONDITION II	CONDITION III
$wa_1 = \frac{\Sigma w_1 x}{\Sigma w_1}$	$wa_2 = \frac{\Sigma w_2 x}{\Sigma w_2}$	$wa_3 = \frac{\Sigma w_3 x}{\Sigma w_3}$
$= \frac{2,500}{50}$	$= \frac{6,500}{150}$	$= \frac{8,500}{150}$
$= 50$ units	$= 43.3$ units	$= 56.3$ units

तालिका में दिये गये भारों (Weights) को ध्यानपूर्वक देखने से स्पष्ट हो जायगा कि—

(१) उस स्थिति में साधारण मध्यक और भाराङ्कित मध्यक समान (=) होंगे जब प्रत्येक मूल्य को समान भार दिया जाय।

(२) उस स्थिति में साधारण मध्यक भाराङ्कित मध्यक से बड़ा होगा (>) जब छोटे मूल्यों को अधिक भार और बड़े मूल्यों को कम भार दिया जाय।

(३) उस स्थिति में साधारण मध्यक भाराङ्कित मध्यक से छोटा होगा (<) जब छोटे मूल्यों को कम भार और बड़े मूल्यों को अधिक भार दिया जाय।

सामान्य व प्रमापित मृत्यु और जन्म की दरें*
(General/Crude and Standardized Death and Birth Rates)

मृत्यु और जन्म की दरें निकालने के लिये भी भाराङ्कित मध्यक का प्रयोग किया जाता है। यदि दो स्थानों या शहरों की मृत्यु या जन्म की

*मृत्यु और जन्म की दरें प्रति हजार दी जाती हैं।

दरों का तुलनात्मक अध्ययन करना है, तो दोनों स्थानों की प्रति सहस्त्र दरें निकालनी पड़ेंगी। इन दरों को निकालने के लिये प्रत्येक आयु-संगठन (Age Group) की जनसंख्या को भार मानकर उनमें उनकी दरों (x) का गुणा किया जाता है, और इन गुणनफलों के योग में कुल जनसंख्या का भाग दे दिया जाता है। इस प्रकार जो मृत्यु या जन्म दरें प्राप्त होती हैं उन्हें सामान्य मृत्यु-दर अथवा जन्म-दर (General/Crude Death/Birth Rate) कहते हैं।

किन्तु इस प्रकार का तुलनात्मक अध्ययन अधिक विश्वसनीय नहीं कहा जा सकता क्योंकि दो विभिन्न स्थानों के आयु-संगठन में अन्तर हो सकता है। जैसे, पहले स्थान में गन्दगी के कारण बच्चों की मृत्यु अधिक होती हो और दूसरे स्थान में स्वस्थ्य वातावरण के कारण कम। इन बातों का ध्यान रखते हुये यदि तुलनात्मक अध्ययन करना है तो एक स्थान की जनसंख्या को, जो अधिक विश्वसनीय है, प्रमाप जनसंख्या (Standard Population) मान लिया जाता है और उस स्थान के विभिन्न आयु-संगठन की जनसंख्याओं से दूसरे स्थान की मृत्यु दरों में गुणा किया जाता है। इन गुणनफलों के योग में प्रमाप जन-संख्या से भाग देने पर जो भाराङ्कित मध्यक निकलता है उसे प्रमाप मृत्यु दर (Standard Death Rate) कहते हैं। दूसरे स्थान की इस दर से यदि पहले स्थान की सामान्य दर से तुलना कर के कोई निष्कर्ष निकाला जाय, तो वह अधिक तर्कयुक्त और न्यायसंगत होता। नीचे एक उदाहरण द्वारा इसे स्पष्ट किया जा रहा है :—

Illustration 14 :—

Determine which of the city, *A* or *B*, is more healthy ?

Age-group (Years)	City A		City B	
	Population	Deaths	Population	Deaths
Under 5	6,000	150	2,500	60
5—15	10,000	20	12,500	25
15—65	12,000	60	20,000	80
Above 65	4,000	160	5,000	200

Solution :—

इस तालिका में विभिन्न आयु-संगठन की जनसंख्या तथा मृत्यु संख्या दी हुई है, किन्तु प्रति सहस्त्र मृत्यु दरें नहीं दी हैं। अतः कॉलम (4) और (7) में सर्वप्रथम ये दरें निकाली गई हैं। दरों को निकालने की रीति साधारण है। ऐकिक नियम (Rule of three) के द्वारा ये दरें इस प्रकार निकाली जा सकती हैं :—

∵ प्रथम नगर में पाँच वर्ष से कम की 6,000 जनसंख्या में 150 मृत्यु होती है।

∴ „ „ „ 1,000 „ $\frac{150 \times 1000}{6000}$ „

=25 प्रति हजार

इसी प्रकार अन्य आयु-संगठनों में मृत्यु दरें ज्ञात की जा सकती है।

CALCULATION OF CRUDE AND STANDARDIZED DEATH RATES

Age-group (Yars)	City A			City B		
	Population (w_1)	Deaths	Death Rate (x_1)	Population (w_2)	Deaths	Death Rate (x_2)
Under 5	6,000	150	25	2,500	60	24
5—15	10,000	20	2	12,500	25	2
15—65	12,000	60	5	20,000	80	4
Above 65	4,000	160	40	5,000	200	40
	$\Sigma w_1=$ 32,000			$\Sigma w_2=$ 40,000		

GENERAL DEATH RATES

CITY A — $\frac{(25\times 6,000)+(2\times 10,000)+(5\times 12,000)+(40\times 4,000)}{32,000}$

=12.2 per thousand

CITY B — $\frac{(24\times 2,500)+(2\times 12,500)+(4\times 20,000)+(40\times 5,000)}{40,000}$

=9.1 per thousand

अतः इन सामान्य मृत्यु दरों के आधार पर यह कहा जा सकता है कि B शहर की जनसंख्या अधिक स्वस्थ्य है क्योंकि इस शहर की मृत्यु दर कम है। किन्तु अधिक विश्वसनीय निष्कर्ष निकालने के लिये A शहर की प्रमाप मृत्यु दर को ज्ञात करना आवश्यक है, जो इस प्रकार निकाली जायगी :—

STANDARDIZED DEATH RATE OF CITY B

$$\frac{(24\times 6{,}000)+(2\times 10{,}000)+(4\times 12{,}000)+(40\times 4{,}000)}{32{,}000}$$

$=11.1$ per thousand

इस प्रकार हम देखते हैं कि B शहर की प्रमाप मृत्यु दर भी A शहर की अपेक्षा कम है। अत: अब हम विश्वासपूर्वक कह सकते हैं कि B शहर की जनसंख्या A शहर की जनसंख्या से अधिक स्वस्थ्य है।

भाराङ्कित मध्यक की विशेषतायें
(Merits of Weighted Arithmetic Average)

सांख्यिकी में साधारण मध्यक की अपेक्षा भारांकित मध्यक को विशेष महत्व दिया जाता है क्योंकि यह मध्यक समंक माला के मूल्यों को आवश्यक भार देता है। यद्यपि मूल्यों को कितना भार देना चाहिये इसके लिये किसी विशेष नियम का उल्लेख नहीं किया जा सकता, फिर भी यदि बड़े मूल्यों को अपेक्षाकृत कम व छोटे मूल्यों को अधिक भार दिया जाय तो हम सन्तोषजनक परिणाम की आशा कर सकते हैं। भार की मात्रा में परिवर्तन करने से मध्यकों में किस प्रकार अन्तर हो जाता है इसका प्रदर्शन हम उदाहरण १३ में कर चुके हैं। वस्तुतः मूल्यों को भारांकित करने के लिये सांख्यिक को अपने अनुभव व तर्क की पूर्ण सहायता लेनी चाहिये, अन्यथा भारांकित मध्यक भ्रामक परिणाम सूचित कर सकता है।

भारांकित मध्यक में साधारण मध्यक के सभी गुण पाये जाते हैं। इसका प्रयोग जन्म-दर, मृत्यु दर, आदि का तुलनात्मक अध्ययन करने के लिये भी किया जाता है। निर्देशांकों (Index Numbers) की रचना में भारांकित मध्यक विशेषरूप से उपयोगी समझा जाता है। जब समंक माला का आकार छोटा हो और उसमें मूल्यों की स्थिरता न पाई जाती हो, तो भारांकित मध्यक का प्रयोग विशेष लाभप्रद होता है।

गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean)

किसी समंकमाला के 'न' मूल्यों के पारस्परिक गुणनफल का 'न' वां मूल (Root) गुणोत्तर माध्य कहलाता है। यदि किसी माला में केवल दो मूल्य हैं तो उनके गुणनफल के वर्गमूल को गुणोत्तर माध्य कहेंगे। 4 और 16 का गुणोत्तर माध्य 64 का वर्गमूल, अर्थात् 8 होगा, और 3, 9 तथा 27 का गुणोत्तर माध्य 729 का घनमूल अर्थात 9 होगा। अतः गुणोत्तर माध्य का सूत्र (Formula) इस प्रकार दिया जा सकता है :—

$$G = \sqrt[n]{a \times b \times c \times d \ldots\ldots\ldots \times n}$$

जब $a, b, c, d,$ इन्यादि समंक माला के विभिन्न मूल्य हैं।

जहाँ दो या तीन मूल्य हों वहाँ तो उनके गुणनफल का वर्गमूल या घनमूल निकाला जा सकता है, परन्तु इससे अधिक मूल्यों के होने पर उनका गुणनफल तो हो सकता है किन्तु उनका 'न' वां मूल निकालने की कोई सरल विधि गणित में नहीं है। अतएव ऐसी स्थिति में लघुगणकों *(Logarithms)* का प्रयोग करके क्रिया को सुगम वनाया जा सकता है :—

$$G = Antilog \left\{ \frac{\log a + \log b + \log c + \log d \ldots\ldots + \log n}{n} \right\}$$

अथवा

$$G = Antilog \left\{ \frac{\Sigma \log x}{n} \right\}$$

गुणोत्तर माध्य निकालने की रीति
(Method of calculating Geometric Mean)

साधारण श्रेणी (Individual Series)

ऐसे प्रश्नों को हल करने के लिये सर्वप्रथम एक तालिका में विभिन्न मूल्यों के लघुगणक निकाल कर उनका योग कर लेना चाहिये। तदुपरान्त उपरोक्त सूत्र का प्रयोग करना चाहिये।

Illustration 15 :—

The monthly incomes of 10 families in rupees in a certain locality are given below. Calculate the Geometric Mean :—

85, 70, 15, 75, 500, 8, 45, 250, 40 and 36.

(बी० कॉम०, आगरा, १९४५)

Solution :—

CALCULATION OF GEOMETRIC MEAN

FAMILY	Income in Rs. (x)	Logarithms ($\log x$)
A	85	1.9294
B	70	1.8451
C	15	1.1761
D	75	1.8751
E	500	2.6990
F	8	0.9031
G	45	1.6532
H	250	2.3979
I	40	1.6021
J	36	1.5563
$n=10$		$\Sigma \log x = 17.6373$

गुणोत्तर माध्य के सूत्र के अनुसार

$$G = \sqrt[n]{a \times b \times c \times d \ldots\ldots n}$$

अथवा $= \sqrt[10]{85 \times 70 \times 15 \times 75 \times 500 \times 8 \times 45 \times 250 \times 40 \times 36}$

किन्तु यह स्पष्ट है कि इतनी संख्याओं का गुणा करके गुणनफल का १० वां मूल निकालना एक कठिन कार्य है। अतः लघुगणकों की सहायता लेने पर—

$$G = \text{Antilog} \left\{ \frac{\log a + \log b + \log c \ldots\ldots \log n}{n} \right\}$$

$$= \text{Antilog} \left\{ \frac{\log 85 + \log 70 + \log 15 \ldots\ldots + \log 36}{10} \right\}$$

$$= \text{Antilog} \left\{ \frac{\Sigma \log x}{10} \right\}$$

$$= \text{Antilog} \left\{ \frac{17.6373}{10} \right\}$$

$$= \text{Antilog } 1.76373$$

$= \text{Rs. } 58.08$

Illustration 16 :—

Calculate the Geometric Mean of the following two series :—

Series A	Series B
3884	0.9842
382	0.3154
63	0.0252
8	0.0068
0.4	0.0200
0.03	0.0002
0.009	0.5444
0.0005	0.4010

Solution :—

Calculation of Geometric Mean

Series A	Logarithms ($log\ x$)	Series B	Logarithms ($log\ y$)
3884	3.5888	0.9842	$\bar{1}.9930$
382	2.5821	0.3154	$\bar{1}.4983$
63	1.7993	0.0252	$\bar{2}.4014$
8	0.9031	0.0068	$\bar{3}.8325$
0.4	$\bar{1}.6021$	0.0200	$\bar{2}.3010$
0.03	$\bar{2}.4771$	0.0002	$\bar{4}.3010$
0.009	$\bar{3}.9542$	0.5444	$\bar{1}.7356$
0.0005	$\bar{4}.6990$	0.4010	$\bar{1}.6031$
$n=8$	$\Sigma\ log\ x=1.6057$	$n=8$	$\Sigma log y=\overline{11}.6659$

Series A

$$G_1 = Antilog \left\{ \frac{\Sigma \log x}{n} \right\}$$

$$= Antilog \left\{ \frac{1.6057}{8} \right\}$$

$$Antilog\ 0.2007$$

$$= 1.589 \text{ units}$$

Series B

$$G_2 = Antilog \left\{ \frac{\Sigma \log y}{n} \right\}$$

$$= Antilog \left\{ \frac{\overline{11}.6659}{8} \right\}$$

$$= Antilog \left\{ \frac{\overline{16}.+5.6659}{8} \right\}$$

$$= Antilog\ \bar{2}.7082$$

$$= 0.05105 \text{ units}$$

विच्छिन्न माला (Discrete Series)

विच्छिन्न माला में गुणोत्तर माध्य निकालने के लिए मूल्यों का अलग-अलग लघुगणक निकाल कर उनकी सम्बन्धित आवृत्तियों का गुणा करके एक तालिका में रखना चाहिए। तत्पश्चात इनका योग करके उसमें आवृत्तियों के योग का भाग दे देना चाहिए और इस प्रकार प्राप्त किये गए फल का प्रति लघुगणक (Antilog) ज्ञात कर लेना चाहिए। यही गुणोत्तर माध्य होगा। अतः गुणोत्तर माध्य के सूत्र में इस प्रकार परिवर्तन हो जायगा :—

$$G = Antilog \left\{ \frac{\log a \times f_1 + \log b \times f_2 + \log c \times f_3 \ldots + \log n \times f_n}{f_1 + f_2 + f_3 \ldots\ldots + f_n} \right\}$$

$$= Antilog \left\{ \frac{\Sigma (\log x \times f)}{\Sigma f} \right\}$$

Illustration 17 :—

From the following data calculate the Geometric Mean :—

Size of item		Frequency
6	...	3
7	...	6
8	...	9
9	...	13
10	...	8
11	...	5
12	...	4
Total	...	48

Solution :—

CALCULATION OF GEOMETRIC MEAN

Size (x)	Logarithms ($Log\ x$)	Frequency (f)	Product of Col. (2)×(3) ($log\ x \times f$)
6	0.7782	3	2.3346
7	0.8451	6	5.0706
8	0.9031	9	8.1279
9	0.9542	13	12.4046
10	1.0000	8	8.0000
11	1.0414	5	5.2070
12	1.0792	4	4.3168
		$\Sigma f=48$	$\Sigma\ log\ x=45.4615$

$$G=Antilog\left\{\frac{log\ a\times f_1+log\ b\times f_2+log\ c\times f_3\ldots\ldots+log\ n\times f_n}{f_1+f_2+f_3\ldots\ldots+f_n}\right\}$$

$$=Antilog\left\{\frac{\Sigma(log\ x\times f)}{\Sigma f}\right\}$$

$$=Antilog\left\{\frac{45.4615}{48}\right\}$$

$$=Antilog\ 0.9471$$

$$=8.85 \text{ units}$$

अविच्छिन्न माला (Continuous Series)

अविच्छिन्न माला में वर्ग के मध्य-विन्दुओं (Mid-points) के लघुगणक निकाले जाते हैं। शेष क्रिया उसी प्रकार की जाती है, जैसे ऊपर के उदाहरण में की गई है।

Illustration 18 :—

The following table gives the marks obtained by 65 students in Statistics in a certain examination :—

Examination Marks		No. of students
More than 70	...	7
,, ,, 60	...	18
,, ,, 50	...	40
,, ,, 40	...	40
,, ,, 30	...	63
,, ,, 20	...	65

Calculate the Geometric Mean of the above series.

Solution :—

CALCULATION OF GEOMETRIC MEAN

Marks	Mid-point (x)	Frequency (f)	Logarithms ($log\ x$)	Product of Col. (3)×(4) ($log\ x \times f$)
Above 70	75	7	1.8751	13.1257
60—70	65	11	1.8129	19.9419
50—60	55	22	1.7404	38.2888
40—50	45	0	1.6532	—
30—40	35	23	1.5441	35.5143
20—30	25	2	1.3979	2.7958
		$\Sigma f=65$		$\Sigma (log\ x \times f)$ =109.6665

$$G=Antilog\left\{\frac{(log\ x\times f)}{\Sigma f}\right\}$$

$$=Antilog\left\{\frac{109.6665}{65}\right\}$$

$$=Antilog\ 1.6872$$

$$=48.64 \text{ marks}$$

भाराङ्कित गुणोत्तर मध्यक (Weighted Geometric Mean)

मध्यक (Arithmetic Average) निकालने की रीति का अध्ययन करते समय यह बतलाया गया था कि समंकमाला के विभिन्न मूल्यों को उनकी सापेक्ष महत्ता के अनुसार भाराङ्कित करने की कभी कभी अत्यन्त आवश्यकता रहती है, अन्यथा सभी मूल्यों को समान भार देने के कारण मध्यक वास्तविक स्थिति को प्रदर्शित करने में असफल हो जाता है। गुणोत्तर मध्यक (Geometric Mean) को भी इसी उद्देश्य से भाराङ्कित किया जाता है। भाराङ्कित गुणोत्तर मध्यक निकालने के लिये निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाता है :—

$$Gw=Antilog\left\{\frac{log\ a\times w_1+log\ b\times w_2+log\ c\times w_3\ldots+log\ n\times w_n}{w_1+w_2+w_3\ldots\ldots+w_n}\right\}$$

$$=Antilog\left\{\frac{\Sigma(log\ \ x\times w)}{\Sigma w}\right\}$$

Illustration 19 :—

Compute the Weighted Geometric Average of Relative Prices of the following commodities for the year 1939 (Base year : 1938=100) :—

Commodity	Relative Prices	Weight (Value produced in 1938)
Corn	128.8	1,385
Cotton	62.4	819
Hay	117.7	842
Wheat	99.0	561
Oats	130.9	408
Potatoes	143.5	194
Sugar	125.6	142
Barley	150.2	100
Tobacco	101.1	103
Rye	116.2	25
Rice	117.5	17
Oil-seeds	78.7	29

How does it differ from the unweighted Geometric Mean ?

Solution :—

CALCULATION OF GEOMETRIC MEAN

Commodity	Relative Price (x)	Logarithm ($\log x$)	Weight (w)	Product of Col. (3) & (4) ($\log x \times w$)
Corn	128.8	2.1106	1,385	2923.1810
Cotton	62.4	1.7952	819	1470.2688
Hay	117.7	2.0719	842	1744.5398
Wheat	99.0	1.9956	561	1119.5316
Oats	130.9	2.1173	408	863.8584
Potatoes	143.5	2.1584	194	418.7296
Sugar	125.6	2.1004	142	298.2568
Barley	150.2	2.1761	100	217.6100
Tobacco	101.1	2.0043	103	206.4429
Rye	116.2	2.0645	25	51.6125
Rice	117.5	2.0719	17	35.2223
Oil seeds	78.7	1.8960	29	54.9840
$n=12$		$\Sigma \log x =$ 24.5622	$\Sigma w =$ 4,625	$\Sigma(\log x \times w) =$ 9404.2377

SIMPLE GEOMETRIC MEAN

$$G = Antilog \left\{ \frac{\Sigma (\log x)}{n} \right\}$$

$$= Antilog \left\{ \frac{24.5622}{12} \right\}$$

$$= Antilog\ 2.04685$$

$$= 111.4$$

WEIGHTED GEOMETRIC MEAN

$$Gw = Antilog \left\{ \frac{\Sigma(\log x \times w)}{\Sigma w} \right\}$$

$$= Antilog \frac{9{,}404.2377}{4{,}625}$$

$$= Antilog\ 2.033$$

$$= 107.9$$

गुणोत्तर मध्यक के लाभ (Advantages of Geometric Mean)

(१) गुणोत्तर मध्यक समंक माला की सभी आकृतियों पर आधारित रहता है।

(२) इसका प्रयोग बीजगणित में किया जा सकता है।

(३) यह मध्यक समंक माला के बड़े मूल्यों को कम व छोटे मूल्यों को अधिक महत्व देता है।

(४) जहाँ समंकों की आकृतियों में विशेष विषमता पाई जाती हो वहाँ इसका प्रयोग विशेष उपयुक्त समझा जाता है।

(५) यदि समंकों का कुल मूल्य व उनकी कुल संख्या ज्ञात हो, तो इसकी गणना की जा सकती है।

(६) इसी प्रकार यदि गुणोत्तर मध्यक व समंकों की कुल संख्या ज्ञात हो तो समंक माला के कुल मूल्य को ज्ञात किया जा सकता है।

(७) किसी भी समंक माला में गुणोत्तर म-यक निकाला जा सकता है, यदि उसमें कोई मूल्य शून्य न हो।

(८) अनुपातों (Ratios) का मध्यक निकालने के लिये गुणोत्तर मध्यक विशेषरूप से उपयुक्त समझा जाता है। इसीलिए निर्देशांकों का अध्ययन करने के लिये यह माध्य श्रेष्ठ माना गया है।

गुणोत्तर मध्यक के दोष (Disadvantages of Geometric Mean)

(१) गुणोत्तर मध्यक की गणन-क्रिया अन्य माध्यों की अपेक्षा कठिन है।

(२) इसको ज्ञात करने के लिए समंक माला की सभी आकृतियों का ज्ञान होना आवश्यक है।

(३) यदि समंक माला की कोई भी आकृति शून्य अथवा ऋणात्मक (—) है, तो गुणोत्तर मध्यक यहीं निकाला जा सकता।

(४) दो समंक मालाओं के गुणोत्तर मध्यक समान होते हुये भी उनकी बनावट में अन्तर हो सकता है, जैसा मध्यक के सम्बन्ध में बतलाया गया है।

(५) साधारण व्यक्ति गुणोत्तर मध्यक के प्रयोग को सरलतापूर्वक नहीं समझ सकते।

हरात्मक माध्य (Harmonic Mean)

यदि किसी समंकमाला के मूल्यों की संख्या को उनके व्युत्क्रमों (Reciprocals) से भाग दिया जाय, तो जो मूल्य प्राप्त होगा उसे हरात्मक मध्यक (Harmonic) Average) कहते हैं; अथवा यदि किसी समंक माला के मूल्यों के व्युत्क्रमों का माध्य (Arithmetic Average) निकाल कर उसका व्युत्क्रम निकाला जाय, तो वह मूल्य हरात्मक माध्य होगा। हरात्मक माध्य को ज्ञात करने का यह सूत्र है :—

$$H=\frac{n}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ldots+\frac{1}{n}}$$

अथवा

$$H=Reciprocal\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ldots+\frac{1}{n}}{n}$$

वास्तव में ये दोनों सूत्र एक ही हैं, क्योंकि दूसरे सूत्र को केवल उलट कर रखा गया है और फल का पुनः व्युत्क्रम निकालने का संकेत किया गया है।

हरात्मक माध्य निकालने की रीति
(Method of calculating the Harmonic Mean)
साधारण श्रेणी (Individual Series)

Illustration 20 :—

In a certain factory a unit of work is completed by A in 4 minutes, by B in 5 minutes, by C in 6 minutes, by D in 10 minutes and by E in 12 minutes. Using Harmonic Mean, find out their average rate of working?

Solution :—

A, B, C, D और *E* की मध्यक कार्य-गति निकालने के लिये यहाँ हरात्मक माध्य का प्रयोग किया जा रहा है। उपरोक्त सूत्र के आधार पर हरात्मक माध्य इस प्रकार निकाला जायगा :—

(अ) प्रथम सूत्र से

$$H=\frac{n}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}}$$

यहाँ a, b, c, d और e प्रति इकाई काम को पूर्ण करने में लगने वाला समय है।

$$=\frac{5}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}}$$

$$= 5 \div \frac{48}{60}$$

$$=\frac{5\times 60}{48}$$

$= 6\frac{1}{4}$ minutes (average rate of working)

(ब) द्वितीय सूत्र से

$$H= Reciprocal \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}}{n}$$

$$= Reciprocal \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{13}+\frac{1}{12}}{5}$$

$$= Reciprocal \frac{48}{60}\div 5$$

$$=\frac{5\times 60}{48}$$

$= 6\frac{1}{4}$ minutes (average rate of working)

Illustration 21 :—

An aeroplane flies around a square whose side is 100 miles long, taking the first side @ 100 miles per hour, the second side

@ 200 miles per hour, the third side @ 300 miles per hour and the fourth side @ 400 miles per hour. What is the average speed of the aeroplane? Test the validity of your answer.

(*M. J. Moroney*)

Solution :—

$$H=\frac{n}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}$$

$$=\frac{4}{\frac{1}{100}+\frac{1}{200}+\frac{1}{300}+\frac{1}{400}}$$

$$= 4 \div \frac{25}{1,200}$$

$$=\frac{4\times 1,200}{25}$$

$$= 192 \text{ miles per hour}$$

इस प्रश्न को हल करने के लिये यदि हमने हरात्मक मध्यक के बजाय साधारण मध्यक का प्रयोग किया होता तो हमें यह परिणाम प्राप्त होता—

$$a=\frac{100+200+300+400}{4}$$

$$=250 \text{ miles per hour}$$

किन्तु यह परिणाम अशुद्ध है। इसकी पुष्टि हम इस प्रकार कर सकते हैं :—

कल्पना कीजिये कि वर्ग *A, B, C, D* की प्रत्येक भुजा 100 मील लम्बी है जिसके चारो ओर वायुयान को उड़ना है; अतः

A से *B* तक जाने में उसे 1 घन्टा समय लगा,
B „ *C* „ „ „ 30 मिनट „ „
C „ *D* „ „ „ 20 „ „ „
D „ *A* „ „ „ 15 „ „ „

इस प्रकार कुल 2 घन्टे 5 मिनट समय लगा।

∵ $2\frac{1}{12}$ घन्टे में वायुयान 400 मील की यात्रा करता है,

$\therefore$ 1 „ „ „ $\frac{400 \times 12}{25}$ „ „ „

=192 miles per hour.

Illustration 22 :—

The monthly income of ten families in rupees in a certain locality are given below. Calculate the Harmonic Mean :—

85, 70, 10, 75, 500, 8, 42, 250, 40 and 36

(बी० कॉम०, आगरा, १९४५)

Solution :—

उपर्युक्त उदाहरण में दिये गए मूल्यों का व्युत्क्रम निकालना कठिन है, और यदि निकाला भी जाय तो बहुत समय लगेगा। अतः व्युत्क्रम-तालिका (Reciprocal Table) की सहायता लेना अधिक सुविधाजनक होगा। निम्न सारिणी में व्युत्क्रम-तालिका की सहायता से व्युत्क्रम निकाल कर रखे गये हैं :—

Family	Income in Rs. (x)	Reciprocals ($1/x$)
A	85	0.01176
B	70	0.01429
C	10	0.10000
D	75	0.01333
E	500	0.00200
F	8	0.12500
G	42	0.02381
H	250	0.00400
I	40	0.02500
J	36	0.02778
$n=10$		$\Sigma(1/x)=0.34697$

$$H=\frac{n}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ldots\ldots+\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{n}{\Sigma(1/x)}$$

$$= \frac{10}{0.34697}$$

$$= \text{Rs. } 28.82$$

विच्छिन्न माला (Discrete Series)

विच्छिन्न माला में हरात्मक माध्य निकालने के लिए मूल्यों के व्युत्क्रम को उनकी सम्बन्धित आवृत्तियों से गुणा किया जाता है, और फिर कुल आवृत्तियों के योग में इन गुणनफलों के योग से भाग दे दिया जाता है।

Illustration 23 :—

Wages in Rs.	10	20	30	40	50	60
No. of Labourers	5	7	15	25	6	2

Calculate the Harmonic Mean.

Solution :—

CALCULATION OF HARMONIC MEAN

Wages in Rs. (x)	No. of abourers (f)	Reciprocal ($1/x$)	Product of Col. (2)×(3) (f/x)
10	5	0.10000	0.50000
20	7	0.05000	0.35000
30	15	0.03333	0.49995
40	25	0.02500	0.62500
50	6	0.02000	0.12000
60	2	0.01667	0.03334
	$\Sigma(f)=60$	$\Sigma(1/x)=0.24500$	$\Sigma(f/x)=2.12829$

$$H = \frac{\Sigma(f)}{\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \frac{f_3}{x_3} \ldots\ldots + \frac{f_n}{x_2}}$$

$$= \frac{\Sigma f}{(\Sigma f/x)}$$

$$= \frac{60}{2.12829}$$

$$= \text{Rs. } 28.2$$

अविच्छिन्न माला (Continuous Series)

अविच्छिन्न माला में हरात्मक मध्यक निकालने के लिये वही ऊपर वाला सूत्र काम में लाया जाता है, किन्तु मूल्यों के व्युत्क्रम निकालने के बजाय उनके मध्य-विन्दुओं के व्युत्क्रम निकाले जाते हैं।

Illustration 24 :—

Find out the Harmonic Mean of the following distribution :—

Groups	Frequency
1.5—2.5	5
2.5—3.5	7
3.5—4.5	11
4.5—5.5	9
5.5—6.5	8

Solution :—

CALCULATION OF HARMONIC MEAN

Group	Mid-point (x)	Frequency (f)	Reciprocals ($1/x$)	Product of Col. (3) & (4) (f/x)
1.5—2.5	2.0	5	0.5000	2.5000
2.5—3.5	3.0	7	0.3333	2.3331
3.5—4.5	4.0	11	0.2500	2,7500
4.5—5.5	5.0	9	0.2000	1.8000
5.5—6.5	6.0	8	0.1667	1.3336
		$\Sigma(f)=40$		$\Sigma(f/x)=10.7167$

$$H = \frac{\Sigma(f)}{\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \frac{f_3}{x_3} \;\ldots\ldots + \frac{f_n}{x_n}}$$

$$= \frac{\Sigma(f)}{(\Sigma f/x)}$$

$$= \frac{40}{10.7167}$$

$$= 3.732 \text{ units}$$

हरात्मक मध्यक के लाभ

(Advantages of Harmonic Mean)

(१) साधारण मध्यक व गुणोत्तर मध्यक की ही भाँति हरात्मक मध्यक भी समंक माला की सभी अकृतियों पर आधारित रहता है।

(२) हरात्मक मध्यक गुणोत्तर मध्यक की अपेक्षा बड़े मूल्यों को कम व छोटे मूल्यों को अधिक भार देता है।

(३) अत्यधिक विषमता वाली समंक-मालाओं में इसका प्रयोग विशेष लाभदायक होता है।

(४) यदि समंकों का कुल मूल्य व उनकी कुल संख्या ज्ञात हो तो अन्य मूल्यों के अभाव में भी हरात्मक मध्यक ज्ञात किया जा सकता है।

(५) इसी प्रकार हरात्मक मध्यक व समंकों की कुल संख्या ज्ञात हो तो समंकों का कुल मूल्य निकाला जा सकता है।

(६) गति (Motion), रफ़्तार (Speed), चलन-वेग (Velocity), आदि का मध्यक निकालने के लिये हरात्मक मध्यक विशेष उपयुक्त समझा जाता है।

हरात्मक मध्य के दोष

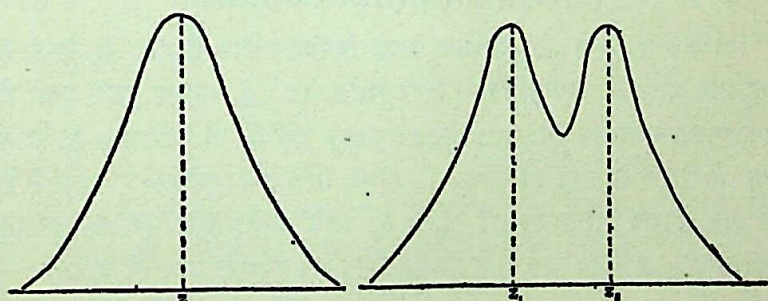
(Disadvantages of Harmonic Mean)

(१) गुणोत्तर मध्यक की भाँति इस माध्य की गणना भी बड़ी कठिन है।

(२) हरात्मक मध्यक निकालने के लिये समंक माला की सभी आकृतियों का ज्ञान होना आवश्यक है।

(३) साधारण मध्यक व गुणोत्तर मध्यक के अन्य सभी दोष इसमें पाये जाते हैं। सांख्यिकी में इस माध्य का प्रयोग सीमित है।

भूयिष्ठक (Mode)

भूयिष्ठक किसी समंक माला के उस चल-मूल्य (Variable) को कहते हैं जिसकी सर्वाधिक आवत्ति हुई हो।* 'Mode' शब्द फ्रेंच भाषा के शब्द (*la Mode*) से बना है, जिसका वास्तविक अर्थ फैशन (Fashion) है। यदि किसी समंक माला में कोई मूल्य ऐसा है जिसकी अभ्यावृत्ति (Repetition) दिखलाई पड़ रही है, तो ऐसा महत्वपूर्ण मूल्य सांख्यिकी में भूयिष्ठक कहलाता है। यदि समंक माला के सभी मूल्यों को एक विन्दुरेखीय पत्र (Graph Paper) पर प्रांकित किया जाय, तो उस पर निर्मित होने वाले वक्र (Curve) का सबसे ऊँचा शीर्ष वही मूल्य प्रकट करेगा जिसकी आवृत्ति सबसे अधिक बार हुई है, और यही मूल्य भूयिष्ठक है। यदि समंक माला में कई मूल्य ऐसे हैं जिनकी अधिकतम आवृत्ति समान रूप से हुई है तो विन्दुरेखीय पत्र पर बनने वाले वक्र में कई समान ऊँचाई के शीर्ष बन जायेंगे, अतः उस समंक माला में कई भूयिष्ठक होंगे। इसका स्पष्टीकरण निम्न चित्र द्वारा किया जा सकता है :—

भूयिष्ठक निकालने की रीति

(Method of calculating the Mode)

साधारण श्रेणी (Individual Series)

साधारण श्रेणी में भूयिष्ठक निकालने की रीति बड़ी आसान है। ऐसी श्रेणी में भूयिष्ठक केवल निरीक्षण (Inspection) मात्र से ही जाना जा

*"The value of the variable which occurs most frequently in a distribution is called the mode"—Kenney.

सकता है। श्रेणी के मूल्यों में यह देखना चाहिये कि ऐसा कौन सा मूल्य है जिसकी आवृत्ति सबसे अधिक बार हुई है। यही मूल्य भूयिष्ठक होगा।

Illustration 25 :—

Given below are the monthly salaries of 10 officers of an industrial concern. Find out the modal salary :—

OFFICER	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Salary in Rupees	250	150	230	400	500	270	250	230	250	200

Solution :—

उपर्युक्त तालिका को ध्यानपूर्वक देखने से ज्ञात होता है कि 250 रु० प्रति मास ही ऐसा वेतन है जो तीन कर्मचारियों को दिया जाता है। चूँकि 250 रु० की आवृत्ति इस तालिका में सबसे अधिक बार (अर्थात्, तीन बार) हुई है, इसलिये यही मूल्य भूयिष्ठक है।

विच्छिन्न माला (Discrete Series)

विच्छिन्न माला में भी भूयिष्ठक केवल निरीक्षण मात्र से ज्ञात हो सकता है किन्तु यदि माला में अनियमिता (Irregularity) है, अथवा दूसरे शब्दों में समंक माला सजातीय (Homogeneous) नहीं है, तो भूयिष्ठक का ज्ञान केवल निरीक्षण से नहीं हो सकता। ऐसी स्थिति में भूयिष्ठक निकालने के लिये एक विशेष रीति अपनाई जाती है, जिसे वर्गण-रीति (Grouping Method) कहते हैं। यह रीति निम्नलिखित उदाहरण से स्पष्ट हो जायगी :—

Illustration 26 :—

The following table shows the various sizes of shoes sold at a shop during the first week of a month. Find out the Mode.

Size	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0
Pairs	30	7	5	10	20	23	30	20	15	4	6	30

Solution :—

इस समंक माला में सहजातीयता (Homogeneity) का पूर्ण अभाव दिखलाई पड़ता है, अतः यह कहना कठिन है कि 3.5", 6.5" और 9.0" में कौन सा आकार भूयिष्ठक है क्योंकि इन तीनों आकारों की आवृत्तियाँ समानरूप से अधिकाधिक हैं। इसलिये वास्तविक भूयिष्ठ-आकार की जानकारी के लिये निम्नलिखित रीति से वर्गण करने की आवश्यकता पड़ेगी :—

GROUPING TABLE

Size (x)	Frequency	Grouping in				
		Twos	Twos	Threes	Threes	Threes
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
3.5	30	37		42		
4.0	7		12		22	
4.5	5	15				35
5.0	10		30	53		
5.5	20	43			73	
6.0	23		53			73
6.5	30	50		65		
7.0	20		35		39	
7.5	15	19				25
8.0	4		10	40		
8.5	6	36				
9.0	30					

ऊपर की सारणी को ध्यानपूर्वक देखने से यह ज्ञात हो जायगा कि दूसरे और तीसरे कालमों में दो-दो आवृत्तियों को जोड़ कर रखा गया है। तीसरे कालम में दो-दो आवृत्तियों का जोड़ करने के पहले ऊपर से एक आवृत्ति छोड़ दी गई है। ऐसा इसलिये किया जाता है कि सभी आवृत्तियाँ वर्गण में आ जायँ। चौथे, पाँचवें और छठे कालमों में तीन-तीन आवृत्तियाँ जोड़ कर रखी गई हैं। जोड़ रखने के समय कालम पाँच में ऊपर से एक, और कालम छः में ऊपर से दो आवृत्तियाँ छोड़ दी गई हैं।

साधारण प्रश्नों को हल करते समय दो-दो आवृत्तियों का दो बार, और तीन-तीन आवृत्तियों का तीन बार वर्गण करना पर्याप्त होता है। आवश्यकता पड़ने पर इसी प्रकार चार-चार आवृत्तियों को भी जोड़ कर रखा जा सकता है।

अब भूयिष्ठक निकालने के लिये एक विश्लेषण तालिका (Analysis Table) बनाने की आवश्यकता पड़ती है, जिससे यह जाना जा सके कि सम्पूर्ण वर्गण-क्रिया में कौन सी आवृत्ति सबसे अधिक बार शामिल हुई। विश्लेषण तालिका बनाने के पूर्व यह आवश्यक है कि उन आवृत्तियों को चिह्नित कर दिया जाय जो विभिन्न कालमों में सर्वाधिक हैं, जैसे, पहले कालम में 30, 30 तथा 30, दूसरे कालम में 50 तीसरे कालम में 53, चौथे कालम में 65, पाँचवें कालम में 73 और छठे कालम में पुन: 73। विश्लेषण तालिका इस प्रकार बनाई जाती है :—

ANALYSIS TABLE

Column size	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0
(1)	*						*					*
(2)							*	*				
(3)						*	*					
(4)							*	*	*			
(5)					*	*	*					
(6)						*	*	*				
Total	1				1	3	6	3	1			1

विश्लेषण तालिका में ऊपर की ओर उतने कालम बनाने चाहिये जितने समंकों के आकार अथवा मूल्य हों, और बाईं ओर ऊपर से नीचे की ओर कालमों की संख्या लिख देनी चाहिये। अब वर्गण-सारिणी के प्रत्येक आवृत्ति वाले खाने में यह देखना चाहिये कि कौन-कौन सी आवृत्तियाँ चिह्नित की गई हैं। पहले कालम में 30, 30 और 30 को चिह्नित किया गया है, जो क्रमश: 3.5″, 6.5″ और 9.0″ वाले आकारों की आवृत्तियाँ हैं। अत: विश्लेषण तालिका में पहले कालम के समक्ष इन आकार वाले खानों में एक-एक चिन्ह (*) रख देना चाहिये। दूसरे कालम में सबसे बड़ी आवृत्ति 50 है जो 6.5″ और 7.0″ वाले आकारों की आवृत्तियों का योग है। अत: विश्लेषण तालिका में दूसरे कालम के समक्ष इन आकार वाले खानों में उसी प्रकार के

चिन्ह बना देने चाहिये। इसी प्रकार वर्गण-सारिणी में चिन्हित की गई सभी आवृत्तियों पर ध्यान देते हुये विश्लेषण तालिका तैयार की जाती है।

अब योग वाले कालम को देखने से स्पष्ट हो जायगा कि 6.5" ही एक ऐसा आकार है जो हमारी वर्गण-क्रिया में सबसे अधिक बार (छ: बार) आया है, अतः यही आकार भूयिष्ठक कहलायेगा। यद्यपि 3.5" और 9.0" वाले आकारो की आवृत्तियाँ भी 30 ही हैं, किन्तु उन आकारों को भूयिष्ठक नहीं कहा जा सकता क्योंकि उनके आस-पास के आकारों का जमाव अत्यधिक कम है। इस उदाहरण से यह स्पष्ट हो जाता है कि भूयिष्ठक ज्ञात करने के लिये वर्गण-क्रिया कितनी आवश्यक है।

अविच्छिन्न माला (Continuous Series)

अविच्छिन्न माला में भी भूयिष्ठक ज्ञात करने के लिये वर्गण की आवश्यकता पड़ती है, किन्तु विश्लेषण तालिका द्वारा केवल उस वर्ग (Group) को ही जाना जा सकता है जिसकी सीमाओं के अन्तर्गत भूयिष्ठक का होना निश्चित है। अतः उन सीमाओं के बीच भूयिष्ठक कहाँ है, यह ज्ञात करने के लिये आन्तरगणन (Interpolation) करने की आवश्यकता पड़ती है। आन्तरगणन का सूत्र निम्नलिखित है :—

$$Z = l_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times (l_2 - l_1)$$

इस सूत्र में प्रयुक्त किये गये चिन्हों का स्पष्टीकरण यह है :—

Z stands for Mode (भूयिष्ठक)

l_1 stands for Lower Limit of the modal class-interval (भूयिष्ठ वर्ग की निचली सीमा)

l_2 stands for Upper Limit of the modal class-interval (भूयिष्ठ वर्ग की ऊपरी सीमा)

f_1 stands for Frequency of the modal group (भूयिष्ठ वर्ग की आवृत्ति)

f_0 stands for Frequency of the group prior to the modal group (भूयिष्ठ वर्ग के पूर्व वर्ग की आवृत्ति)

f_2 stands for Frequency of the group just after the modal group (भूयिष्ठ वर्ग के बाद वाले वर्ग की आवृत्ति)

अविच्छिन्न माला में भूयिष्ठक निकालने की रीति निम्नलिखित उदाहरण से स्पष्ट हो जायगी :—

Illustration 27 :—

The following table shows the frequency with which profits. of some Private Limited Companies are made. What is the mode ?

Exceeding Rs.	Not Exceeding Rs.	Frequency
3,000	4,000	92
4,000	5,000	35
5,000	6,000	21
6,000	7,000	66
7,000	8,000	80
8,000	9,000	52
9,000	10,000	20
10,000	11,000	14

Solution :—

GROUPING TABLE

Group (x)	Frequency (f)	Grouping in				
		Twos	Twos	Threes	Threes	Threes
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
3,000—4,000	92	127		148		
4,000—5,000	35		56		122	
5,000—6,000	21	87				167
6,000—7,000	66		146	198		
7,000—8,000	80	132.			152	
8,000—9,000	52		72			86
9,000—10,000	20	34				
10,000—11,000	14					

ANALYSIS TABLE

Column Group	3,000-4,000	4,000-5,000	5,000-6,000	6,000-7,000	7,000-8,000	8,000-9,000	9,000-10,000	10,000-11,000
(1)	*							
(2)					*	*		
(3)				*	*			
(4)				*	*	*		
(5)					*	*	*	
(6)			*	*	*			
Total	1		1	3	5	3	1	

विश्लेषण तालिका को देखने से यह स्पष्ट हो जाता है कि वर्गण-क्रिया में 7,000 से 8,000 रु० वाला वर्ग सबसे अधिक वार (अर्थात् पाँच वार) आया है, अतः यही भूयिष्ठ-वर्ग (Modal Group) है, जिसकी सीमाओं के अन्तर्गत भूयिष्ठक होगा।

अब भूयिष्ठक का वास्तविक मूल्य ज्ञात करने के लिये हमें ऊपर दिये गये आन्तरगणन वाले सूत्र को प्रयोग में लाना पड़ेगा :—

$$Z=l_1+\frac{f_1-f_0}{2f_1-f_0-f_2}\times(l_2-l_1)$$

इस सूत्र में विभिन्न मूल्यों का प्रयोग करने पर

$$Z=7,000+\frac{80-66}{160-66-52}\times(8,000-7,000)$$

$$=7,000+\frac{14}{42}\times 1,000$$

$$=7000+\frac{1000}{3}$$

$$=\text{Rs. } 7,333\tfrac{1}{3}$$

$$=\text{Rs. } 7,333.33 \text{ nP.}$$

Illustration 28 :—

Find out the modal earning of the following frequency distribution :—

Earnings in Rs. nP.		Number of workers
20—29.99	...	20
30—39.99	...	28
40—49.99	...	32
50—59.99	...	28
60—69.99	...	22
70—79.99	...	26
80—89.99	...	34
90—99.99	...	26

Solution :—

GROUPING TABLE

Earnings in Rs. nP.	Number of Workers	Grouping in				
		Twos	Twos	Threes	Threes	Threes
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
20—29.99	20	48		80		
30—39.99	28		60		88	
40—49.99	32	60				82
50—59.99	28		50	76		
60—69.99	22	48			82	
70—79.99	26		60			86
80—89.99	34	60				
90—99.99	26					

ANALYSIS TABLE

Column Group	20—29.99	30—39.99	40—49.99	50—59.99	60—69.99	70—79.99	80—89.99	90—99.99
(1)							*	
(2)			*	*			*	*
(3)		*	*			*	*	
(4)	*	*	*					
(5)		*	*	*				
(6)						*	*	*
Total	1	3	4	2		2	4	2

उपर्युक्त विश्लेषण तालिका का निरीक्षण करने से ज्ञात होगा कि वर्ग (40—49·99) तथा (80—89·99) की अभ्यावृत्ति समान है। अतः यह कहना कठिन है कि इन दोनों वर्गों में से किस वर्ग के अन्तर्गत भूयिष्ठक का वास्तविक मूल्य है। ऐसी स्थिति में भूयिष्ठक अस्पष्ट (Ill-defined) समझना चाहिये।

भूयिष्ठक का विन्दुरेखीय प्रदर्शन
(Graphic Presentation of Mode)

भूयिष्ठक को विन्दुरेखीय ढंग से भी ज्ञात किया जा सकता है। इसके लिये सर्वप्रथम हमें आवृत्ति-वितरण में दी हुई आवृत्तियों के आधार पर एक आवृत्ति-वक्र बनाने की आवश्यकता पड़ती है। उदाहरण १३, पृष्ठ संख्या १५३ पर हम वतला चुके है कि आवृत्ति-वक्र की रचना किस प्रकार की जाती है। आवृत्ति-वक्र के शीर्ष विन्दु से यदि कोई रेखा भुजाक्ष तक लम्बवत खींची जाय तो वह जिस विन्दु पर भुजाक्ष को स्पर्श करेगी, शून्यविन्दु से वहाँ तक की दूरी भूयिष्ठक का मूल्य वतलायेगी। जब आवृत्ति-वक्र एक से अधिक शीर्षों वाला होता है तो भूयिष्ठक के अनेक मूल्य हो सकते हैं। ऐसी परिस्थिति में भूयिष्ठक के बजाय किसी अन्य माध्य का प्रयोग करना उचित समझा जाता है।

Illustration 29 :—

Determine the value of the Mode by using the data given in Illustration No. 13 on page 153 :—

यदि साधारण सूत्र से भूयिष्ठक ज्ञात किया जाय तो

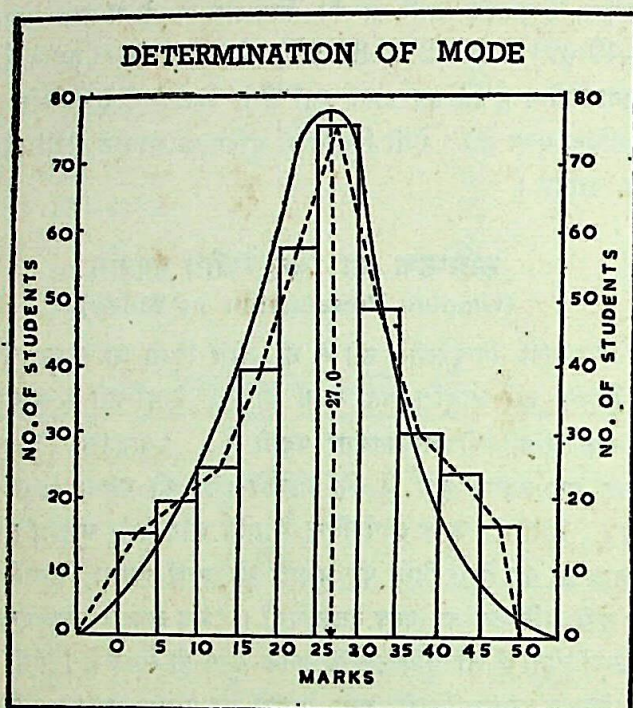
$$Z = l_1 + \frac{f_1 - fo}{2f_1 - fo - f_2} \times (l_2 - l_1)$$

$$= 25 + \frac{75 - 57}{150 - 57 - 48} \times (30 - 25)$$

$$= 25 + \frac{18}{45} \times 5$$

$$= 25 + 2$$

$$= 27 \cdot 0 \text{ marks}$$

विन्दुरेखीय रीति से भी करीब इतना ही उत्तर प्राप्त होगा :—

भूयिष्ठक के लाभ (Advantages of Mode)

(१) साधारण समंक मालाओं में केवल निरीक्षण मात्र से ही भूयिष्ठक ज्ञात किया जा सकता है।

(२) भूयिष्ठक पर चरम-मूल्यों का प्रभाव न्यूनतम होता है। गणितीय माध्यों की भाँति यह माध्य समंक माला के सभी मूल्यों पर आधारित नहीं होता।

(३) जीवनोपयोगी समस्याओं की केन्द्रीय प्रवृत्ति पर भूयिष्ठक के द्वारा ही प्रकाश डाला जा सकता है।

(४) भूयिष्ठक की गणन-क्रिया भी सरल व स्पष्ट है। अतः साधारण व्यक्ति भी इसका तात्पर्य जानते हैं।

(५) इसको बिन्दुरेखीय रीति से भी ज्ञात किया जा सकता है।

(६) जिन आवृत्ति-वितरणों को प्रांकित करने पर घन्टी के आकार का वक्र बनता है, उनमें भूयिष्ठक का पता लगाना अधिक सरल होता है।

भूयिष्ठक के दोष (Disadvantages of Mode)

(१) भूयिष्ठक का प्रयोग बीजगणित की क्रियाओं में नहीं किया जा सकता।

(२) यह एक अनिश्चित माध्य है क्योंकि आवृत्ति-वितरण में विषमता होने पर इसे नहीं निकाला जा सकता।

(३) यह माला के मध्य के कुछ ही मूल्यों पर आधारित होने के कारण चरम-मूल्य वाले समंकों को कोई महत्त्व नहीं देता।

(४) भूयिष्ठक ज्ञात करने के लिए समंकों को आरोही अथवा अवरोही क्रम में अनुविन्यसित करना आवश्यक होता है।

(५) यदि केवल भूयिष्ठक व चलों की कुल संख्या दी हुई हो तो उनके कुल मूल्य की जानकारी नहीं की जा सकती।

(६) अविच्छिन्न माला में यदि वर्गान्तरों का विस्तार बड़ा हो किन्तु आवृत्तियों का आकार छोटा हो, तो शुद्ध भूयिष्ठक की प्राप्ति एक कल्पना मात्र है।

मध्यका (Median)

यदि किसी समंक माला के विभिन्न चल-मूल्यों का विन्यास (Arrangement) आरोही (Ascending) या अवरोही (Descending) क्रम में कर दिया जाय, तो मध्यका उनके मध्य का वह मूल्य होगी जिसके ऊपर और नीचे स्थित चलों की संख्या समान हो। वस्तुतः मध्यका वह केन्द्र-विन्दु है जो समंक माला को दो बराबर भागों में इस प्रकार बाँट देती है कि उसके एक ओर के सब चल उससे कम मूल्य के, और दूसरी ओर के सब चल उससे अधिक मूल्य के होते हैं। यदि सात व्यक्तियों का वजन क्रमशः 120 पौंड, 125 पौंड, 130 पौंड, 135 पौंड, 140 पौंड, 145 पौंड और 150 पौंड है, तो मध्यका 135 पौंड होगी क्योंकि यही एक ऐसा मूल्य है जिसके एक ओर तीन छोटे मूल्य तथा दूसरी ओर तीन बड़े मूल्य हैं।

मध्यका निकालने की रीति
(Method of calculating the Median)

साधारण श्रेणी (Individual Series)

किसी साधारण श्रेणी में मध्यका निकालने के लिये सबसे आवश्यक बात यह है कि चलों को पहले आरोही या अवरोही क्रम से एक तालिका में रख

लिया जाय। सुविधा के लिये फिर निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाता है जिससे वह मूल्य शीघ्र ज्ञात किया जा सके जिसके एक ओर सब छोटे मूल्य, तथा दूसरी ओर सब बड़े मूल्य हों :—

$$M = \text{Size of } \left\{\frac{N+1}{2}\right\} \text{th item}$$

जिसमें M=Median (मध्यका) और N=No. of items (संख्या)

Illustration 30 :—

Given below are the marks obtained by 27 students in Statistics in a University Examination. Find out the Median

Roll No.	Marks	Roll No.	Marks	Roll No.	Marks
1	40	10	55	19	15
2	32	11	52	20	68
3	62	12	30	21	89
4	70	13	27	22	95
5	82	14	71	23	36
6	22	15	83	24	42
7	44	16	62	25	64
8	44	17	45	26	37
9	60	18	48	27	20

Solution :—

MARKS ARRANGED IN ASCENDING ORDER

Item No.	Marks	Item No.	Marks	Item No.	Marks
1	15	10	42	19	62
2	20	11	44	20	64
3	22	12	44	21	68
4	27	13	45	22	70
5	30	14	48	23	71
6	32	15	52	24	82
7	36	16	55	25	83
8	37	17	60	26	89
9	40	18	62	27	95

$$M = \text{Size of } \left\{\frac{N+1}{2}\right\} \text{th item}$$
$$= \text{Size of } \left\{\frac{27+1}{2}\right\} \text{th item}$$
$$= \text{Size of 14th item}$$
$$= 48 \text{ marks}$$

यदि प्राप्ताङ्कों को हम अवरोही क्रम से रखते हैं, तो भी यही परिणाम प्राप्त होगा :—

MARKS ARRANGED IN DESCENDING ORDER

Item No.	Marks	Item No.	Marks	Item No.	Marks
1	95	10	62	19	40
2	89	11	60	20	37
3	83	12	55	21	36
4	82	13	52	22	32
5	71	14	48	23	30
6	70	15	45	24	27
7	68	16	44	25	22
8	64	17	44	26	20
9	62	18	42	27	15

$$M = \text{Size of } \left\{\frac{N+1}{2}\right\} \text{th item}$$
$$= \text{Size of } \left\{\frac{27+1}{2}\right\} \text{th item}$$
$$= \text{Size of 14th item}$$
$$= 48 \text{ marks}$$

इस प्रकार साधारण श्रेणी में जब N एक विषम (Odd) संख्या हो तो मध्यका ज्ञात करना सरल है। किन्तु एक कठिनाई तब उठती है जब N एक सम (Even) संख्या हो, क्योंकि सूत्र के अनुसार इसमें एक जोड़ कर दो से भाग देने पर एक भिन्न (Fraction) आ जायगी। ऊपर के उदाहरण में कल्पना कीजिये कि एक विद्यार्थी और है जिसने 75 अंक प्राप्त किये हैं। अब इस प्रश्न का हल इस प्रकार होगा :—

MARKS ARRANGED IN ASCENDING ORDER

Item No.	Marks	Item No.	Marks	Item No.	Marks
1	15	10	42	19	62
2	20	11	44	20	64
3	22	12	44	21	64
4	27	13	45	22	70
5	30	14	48	23	71
6	32	15	52	24	75
7	36	16	55	25	82
8	37	17	60	26	83
9	40	18	62	27	89
				28	95

$$M = \text{Size of } \left\{\frac{N+1}{2}\right\} \text{th item}$$

$$= \text{Size of } \left\{\frac{28+1}{2}\right\} \text{th item}$$

$$= \text{Size of } 14.5\text{th item}$$

ऐसी स्थिति में मध्यका ज्ञात करने के लिये हमें अनुमान करने की आवश्यकता पड़ती है। अतः यह कल्पना कर लिया जाता है कि मध्यका पूर्णांक संख्या (जैसे यहाँ 14) तथा अगली संख्या (15) के मूल्यों का मध्य-मूल्य है।

$$M = \text{Size of } 14.5\text{th item}$$

$$= \frac{48+52}{2}$$

$$= 50 \text{ marks}$$

Illustration 31 :—

The mean daily sunshine for Great Britain and Ireland for the years 1945-1955 is given below :—

Month	Jan.	Feb.	Mar.	Apl.	May	June	July	Aug.	Sep.	Oct.	Nov.	Dec.
Hours	1.49	2.40	3.62	5.21	5.81	6.25	5.45	5.32	4.41	2.99	1.85	1.40

Find the median number of hours' sunshine per day.

(बी० कॉम०, बनारस, १९५५)

Solution :—

इस प्रश्न को भी हल करने के लिये सर्वप्रथम इन मूल्यों को एक तालिका में आरोही या अवरोही क्रम से रख कर ऊपर बतलाये गये सूत्र का प्रयोग करना पड़ेगा।

HOURS' OF SUNSHINE ARRANGED IN ASCENDING ORDER

Item No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Hours	1.40	1.49	1.85	2.49	2.99	3.62	4.41	5.21	5.32	5.45	5.81	6.25

$$M = \text{Size of } \left\{ \frac{N+1}{2} \right\} \text{ th item}$$

$$= \text{Size of } \left\{ \frac{12+1}{2} \right\} \text{ th item}$$

$$= \text{Size of } 6.5\text{th item}$$

$$= \frac{3.62+4.41}{2}$$

$$= 4.015 \text{ hours sunshine per day.}$$

Illustration 32 :—

Dealings in a certain security at the following prices took place on the Bombay Stock Exchange. Calculate the median price.

$$100\frac{5}{16},\ 100\frac{3}{8},\ 100\frac{1}{4},\ 100\frac{5}{16},\ 100\frac{3}{16},\ 100\frac{1}{4},\ 100\frac{3}{8},$$

$$100\frac{9}{32},\ 100\frac{11}{32},\ 100\frac{1}{16},\ 100\frac{1}{8},\ 100,\ 99\frac{7}{8},\ 99\frac{9}{32},\ 99\frac{11}{32},$$

$$99\frac{3}{8},\ 99\frac{1}{4}$$

(बी० कॉम, बनारस, १९५१)

Solution :—

ध्यान देने से स्पष्ट हो जायगा कि यह भी एक साधारण श्रेणी है, अतः मध्यका ज्ञात करने के लिये विभिन्न मूल्यों को आरोही अथवा अवरोही क्रम से

रखना पड़ेगा। परन्तु इस प्रश्न में सभी मूल्य भिन्न में दिये हुये हैं जिनमें बड़ी और छोटी भिन्नों को शीघ्रतापूर्वक पहचानना कठिन है। इसका विन्यास इस प्रकार किया जा सकता है :—

पूर्णांक संख्याओं को विस्मृत करते हुये भिन्न के हरों (Denominators) का ल० स० प० निकालना चाहिये, जो 32 होगा। अब ल० स० प० 32 लेकर भिन्न के अंशों (Numerators) को एक समान आधार पर कर लेना चाहिये—

$$\frac{10, 12, 8, 10, 6, 8, 12, 9, 11, 2, 4, 0, 28, 9, 12, 8, 11}{32}$$

यह ध्यान रखते हुये कि प्रथम 11 भिन्नों का पूर्णांक 100 है तथा अन्तिम 5 भिन्नों का पूर्णांक 99 है, हम इन भिन्नों को आरोही क्रम से इस प्रकार रख सकते हैं :—

Prices arranged in Ascending Order

Item No.	Prices	Item No.	Prices
1	$99\frac{1}{4}$	10	$100\frac{1}{4}$
2	$99\frac{9}{32}$	11	$100\frac{1}{4}$
3	$99\frac{11}{32}$	12	$100\frac{9}{32}$
4	$99\frac{3}{8}$	13	$100\frac{5}{16}$
5	$99\frac{7}{8}$	14	$100\frac{5}{16}$
6	100	15	$100\frac{11}{32}$
7	$100\frac{1}{16}$	16	$100\frac{3}{8}$
8	$100\frac{1}{8}$	17	$100\frac{3}{8}$
9	$100\frac{3}{16}$		$N=17$

उपरोक्त तालिका में मूल्यों को आरोही क्रम रखते समय सबसे पहले 99 पूर्णांक वाले उस मूल्य को रखा गया है जिसका समान किया गया अंश सबसे छोटा (अर्थात 8) है, और इसी क्रम से चलते हुये सबसे अन्त में 100 पूर्णांक वाले उन मूल्यों को रखा गया है जिनके समान किये गये अंश सबसे बड़े (अर्थात 12, 12) हैं।

मध्यका का मूल्य अब इस प्रकार निकलेगा :—

$$M = \text{Size of } \left\{\frac{N+1}{2}\right\} \text{th item}$$

$$= \text{Size of } \left\{\frac{17+1}{2}\right\} \text{th item}$$

$$= \text{Size of 9th item}$$

$$= 100\frac{3}{16} \text{ units.}$$

विच्छिन्न माला (Discrete Series)

विच्छिन्न माला में मध्यका ज्ञात करने के लिये मूल्यों को आरोही अथवा अवरोही क्रम से रखने की आवश्यकता नहीं पड़ती क्योंकि इसमें विभिन्न मूल्यों की आवृत्तियाँ दी रहती हैं। इसमें केवल संचयी आवृत्ति (Cumulative Freqnency) निकाल ली जाती है और उपरोक्त सूत्र की सहायता से मध्यका का मूल्य ज्ञात कर लिया जाता है। निम्नलिखित उदाहरण से विच्छिन्न माला में मध्यका ज्ञात करने की रीति स्पष्ट हो जायगी :—

Illustration 33 :—

The following is the distribution of wages per thousand employees in a certain factory :—

Daily wages in Annas	14	15	16	17	18	19	20	21	22	Total
Number of employees	13	23	43	102	175	220	204	139	81	1,000

Calculate the median wage.

CUMULATIVE FREQUENCY TABLE

Daily wages in Annas (*x*)	Number of employees (*f*)	Cumulative Frequency (*cf*)	
14	13	—	13
15	23	13+ 23=	36
16	43	36+ 43=	79
17	102	79+102=	181
18	175	181+175=	356
19	220	356+220=	576
20	204	576+204=	780
21	139	780+139=	919
22	81	919+ 81=	1,000=(*N*)

$$M = \text{Size of } \left\{\frac{N+1}{2}\right\} \text{th item}$$

$$= \text{Size of } \left\{\frac{1{,}000+1}{2}\right\} \text{th item}$$

$$= \text{Size of } 500.5\text{th item}$$

$$= 19 \text{ Annas}$$

इस प्रकार मध्यका निकालते समय उसकी संख्या (जैसे यहाँ 500.5) के स्थान का निश्चय करने के लिये संचयी आवृत्ति (Cumulative Frequency) वाले कालम में ऊपर से नीचे की ओर देखना चाहिये। जिस संचयी आवृत्ति में मध्यका संख्या प्रथम बार सम्मिलित हो ठीक उसी के सामने प्रथम कालम में दिया हुआ मूल्य मध्यका है।

अविच्छिन्न माला (Continuous Series)

अविच्छिन्न माला में मध्यका ज्ञात करने के लिये एक आन्तरगणन (Interpolation) का सूत्र प्रयोग में लाना पड़ता है क्योंकि मध्यका संख्या सम्मिलित रखने वाली संचयी आवृत्ति के सामने एक मूल्य न मिलकर एक वर्ग मिलेगा जिसके अन्तर्गत मध्यका होगी। अविच्छिन्न माला में मध्यका ज्ञात करने का यह सूत्र है:—

$$M = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f} \times (m - c)$$

अथवा

$$M = l_1 + \frac{i}{f} \times (m - c)$$

M stands for Median (मध्यका)

l_1 stands for Lower Limit of the median group (मध्यका वर्ग की निचली सीमा)

l_2 stands for Upper Limit of the median group (मध्यका वर्ग की ऊपरी सीमा)

f stands for frequency of the median group (मध्यका वर्ग की आवृत्ति)

m stands for Median No. (मध्यका संख्या)

c stands for cumulative frequency of the group prior to the median group (मध्यका वर्ग के पूर्व वाले वर्ग की संचयी आवृत्ति)

i stands for $(l_2 - l_1)$

निम्नलिखित उदाहरण से इस सूत्र का प्रयोग स्पष्ट हो जायगा :—

Illustration 34 :—

The following table gives the length of life of 150 '*Osram*' electric bulbs of 100 Watt. Calculate the median.

Life in Hours	Frequency
Below 400	4
400—800	12
800—1200	35
1200—1600	46
1600—2000	27
2000—2400	12
2400—2800	10
2800—3200	4

Solution :—

इस प्रश्न को हल करने के पूर्व सारणी एक संचयी-आवृत्ति (Cumulative Frequency Table) बना कर मध्यका सख्या निकालनी चाहिये :—

Cumulative Frequency Table

Life in Hours (x)	Frequency (f)	Cum. Frequency (cf)
Below 400	4	4
400— 800	12	16
800—1200	35	51
1200—1600	46	97
1600—2000	27	124
2000—2400	12	136
2400—2800	10	146
2800—3200	4	150

$m =$ Size of $\left\{\frac{N+1}{2}\right\}$th item

$=$ Size of $\left\{\frac{150+1}{2}\right\}$th item

$=$ Size of 75·5th item which falls in the median group (1200—1600)

75·5 के सामने एक मूल्य न हो कर एक वर्ग (1200-1600) है। यदि एक मूल्य होता, जैसा हम विच्छिन्न माला में पाते हैं, तो वही मध्यका का मूल्य होता। अतः 1200 से 1600 के मध्य से मध्यका निकालने के लिये उपरोक्त सूत्र का इस प्रकार प्रयोग करना पड़ेगा :—

$$M = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f} \times (m - c)$$

$$= 1200 + \frac{1600 - 1200}{46}(75 \cdot 5 - 51)$$

$$= 1200 + \frac{400}{46} \times \frac{245}{10}$$

$$= 1413\frac{1}{23} \text{ hours}$$

$$= 1413 \cdot 04 \text{ hours (approximately)}$$

मध्यका का विन्दुरेखीय प्रदर्शन
(Graphic Presentation of Median)

भूयिष्ठक के समान ही मध्यका का भी विन्दुरेखीय प्रदर्शन किया जा सकता है। इसकी दो रीतियाँ हैं :—

(१) संचयी आवृति वक्र (Cumulative Frequency Curve) अथवा 'ओजाइव' वक्र (Ogive Curve) द्वारा;

(२) 'गाल्टन' (Galton) रीति द्वारा।

संचयी आवृत्ति वक्र अथवा 'ओजाइव' वक्र (Cumulative Frequency Curve or Ogive Curve)

इस रीति से मध्यका ज्ञात करने के लिये पहले आवृत्तियों को संचयी आवृत्तियों में परिणित कर लिया जाता है। फिर विन्दुरेखीय पत्र पर समंकों के मूल्य को भुजाक्ष पर तथा संचयी आवृत्तियों को कोटि-अक्ष पर लेकर वक्र की रचना कर ली जाती हैं। अध्याय ६ में हम बतला चुके हैं कि आवृत्तियों का संचय या तो प्रारम्भ की ओर से या अन्त की ओर से किया जा सकता है। जब संचय प्रारम्भ की ओर से किया जाता है तो संचयी आवृत्तियाँ क्रमशः बढ़ती जाती हैं, और जब अन्त की ओर से किया जाता है तो वे क्रमशः घटती जाती हैं। अतः इनका प्रभाव वक्र के आकार पर भी पड़ता है। प्रथम स्थिति में वक्र ऊपर की ओर क्रमशः उठता जाता है, किन्तु दूसरी स्थिति में वह नीचे की ओर गिरता हुआ दृष्टिगोचर होता है। इस प्रकार ओजाइव वक्र के दो आकार हुये :—

(अ) Less than Ogive Curve—जब आवृत्तियों का संचय प्रारम्भ से कर के आवृत्ति-वितरण को 'Less than' Table में परिणित किया गया हो;

(ब) More than Ogive Curve—जब आवृत्तियों का संचय अन्त की ओर से करके आवृत्ति-वितरण को 'More than' Table में परिणित किया गया हो।

'Less than' Ogive Curve बनाते समय इस बात का ध्यान रखना चाहिये कि संचयी आवृत्तियाँ वर्गों की ऊपरी सीमा पर प्रांकित की जायँगी। इसके विपरीत, 'More than' Ogive Curve बनाते समय वे वर्गों की निचली सीमा पर प्रांकित होंगी।

वक्र का निर्माण करने के उपरान्त आवृत्ति-वितरण की कुल आवृत्तियों के योग को N मान कर मध्यका संख्या (Median No.) निकाल लेनी चाहिये, और उसे कोटि-अक्ष पर चिन्हित कर के वहाँ से भुजाक्ष के समानान्तर एक रेखा खीचनी चाहिये। यह रेखा जिस स्थान पर 'ओजाइव' वक्र को स्पर्श करे

वहाँ से एक लम्बवत रेखा भुजाक्ष तक बनानी चाहिये। शून्य-विन्दु से यहाँ तक की दूरी मध्यका होगी।

Illustration 35 :—

The following figures show the monthly incomes of 700 families in a certain locality :—

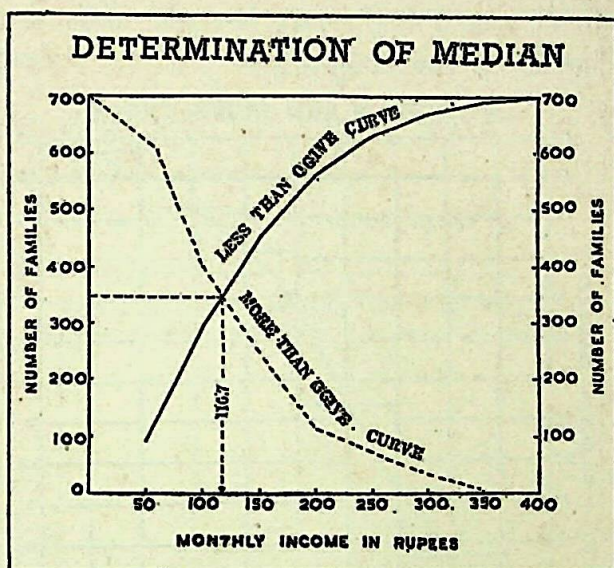
Monthly income (in rupees)		Number of families
0—	...	93
50—	...	205
100—	...	157
150—	...	109
200—	...	64
250—	...	41
300—	...	22
350—400	...	9

(*a*) Draw '*Less than*' and '*More than*' Ogive Curves, and determine the value of the median.

(*b*) Check your result by using the standard formula for locating the Median.

(सर्टिफिकेट, बनारस, १९५८)

CALCULATION OF CUMULATIVE FREQUENCIES

Monthly income (in rupees)	Number of families	Cumulative Frequencies (*Ascending*)	Cumulative Frequencies (*Descending*)
0—50	93	93	700
50—100	205	298	607
100—150	157	455	402
150—200	109	564	245
200—250	64	628	136
250—300	41	669	72
300—350	22	691	31
350—400	9	700	9

चित्र को देखने से स्पष्ट हो जायगा कि जहाँ दोनों वक्र कट रहे हैं वहीं से मध्यका का निर्धारण हो रहा है। मध्यका संख्या इस प्रकार ज्ञात की गई है :—

$$\textit{Median No.} = \text{Value of } \left\{\frac{N+1}{2}\right\} \text{th item}$$

$$= \text{Value of } \left\{\frac{700+1}{2}\right\} \text{th item}$$

$$= \text{Value of } 350{\cdot}5\text{th item}$$

अतः मध्यका का मूल्य 116·7 रुपये हुआ।

यदि साधारण सूत्र से मध्यका ज्ञात की जाय तो वह भी इतनी ही होगी—

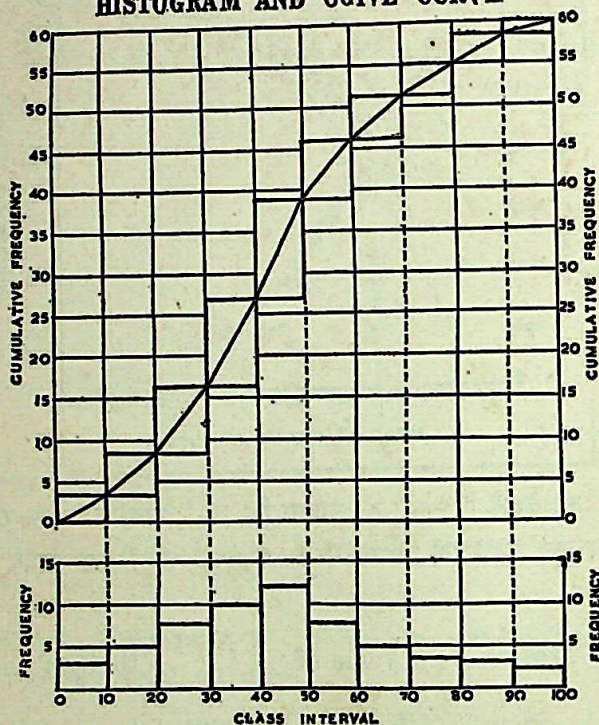
$$M = l_1 + \frac{i}{f} \times (m - c)$$

$$= 100 + \frac{50}{157} \times (350{\cdot}5 - 298)$$

$$= 100 + \frac{50}{157} \times 52{\cdot}5$$

$$= \text{Rs. } 116{\cdot}7$$

आवृत्ति-वक्र व संचयी आवृत्ति-वक्र के विन्दुरेखीय प्रदर्शन का पारस्परिक सम्बन्ध निम्न चित्र में देखा जा सकता है :—

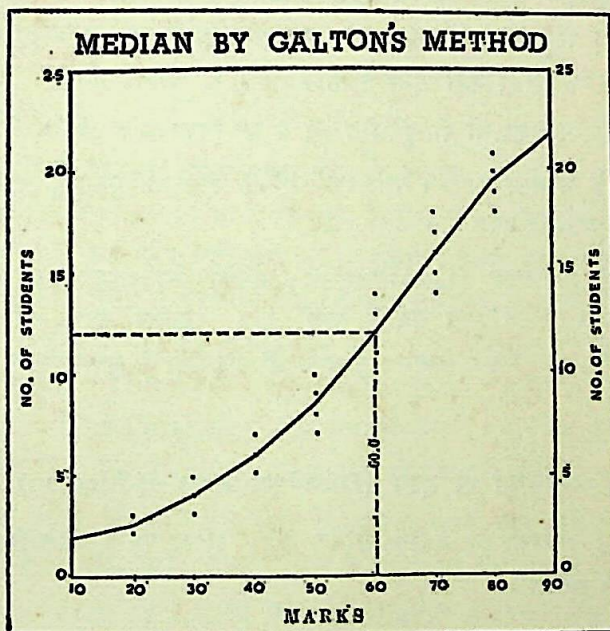
HISTOGRAM AND OGIVE CURVE

गाल्टन की रीति (Galton's method for determining Median)

गाल्टन नामक सांख्यिक ने भी मध्यका को विन्दुरेखीय रीति से ज्ञात करने की एक रीति बतलाई है। इस रीति के अनुसार चलों के मूल्य को भुजाक्ष पर तथा उनकी आवृत्तियों को कोटि-अक्ष पर प्रदर्शित किया जाता है। किन्तु वक्र बनाते समय प्रथम विन्दु को आधार मान कर दूसरे विन्दु को प्रांकित करना पड़ता है, अतः कोटि-अक्ष का मापदण्ड कुल आवृत्तियों के योग के आधार पर निर्धारित करना आवश्यक होता है। इसके अतिरिक्त वक्र बनाने का ढंग भी दूसरा है। प्रत्येक आवृत्ति के लिये विन्दुओं को प्रांकित करने के उपरान्त वक्र को उनके मध्य से खींचना पड़ता है।

Illustration 36 :—

The following table shows the marks obtained by a batch of 23 M.Com., students in Statistics, out of 100 :—

Marks	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Frequency	2	1	2	2	3	4	4	3	2

Determine the Median by Galton's Method.

चित्र को देखने से यह स्पष्ट हो जायगा कि जहाँ विन्दुओं की संख्या विषम (Odd) है, वहाँ तो वक्र उनके मध्यस्थ विन्दु से, और जहाँ सम (Even) है वहाँ मध्य के दो विन्दुओं के बीच से खींचा गया है। इस प्रकार मध्यका का मूल्य 60 है।

मध्यका के लाभ (Advantages of Median)

(१) मध्यका की गणना प्रत्येक समंक माला में की जा सकती है।

(२) यदि समंकों की आकृतियाँ आरोही अथवा अवरोही क्रमानुसार हों तो केवल निरीक्षण मात्र से ही मध्यका का अनुमान लगाया जा सकता है।

(३) मध्यका समंक माला के केवल मध्य के मूल्यों पर आधारित रहती है, अतः माला के चरम-मूल्यों (Extreme Items) के अभाव में भी इसे ज्ञात किया जा सकता है।

(४) चरम-मूल्यों की आकृतियों में यदि अन्तर हो जाय तो भी मध्यका का मूल्य वही रहता है। अतः मध्यका पूर्णरूप से समंक माला की केन्द्रीय-प्रवृत्ति का प्रदर्शन करने में सफल होती है।

(५) मध्यका साधारणतः समंक माला के अन्तर्गत ही स्थित होती है। यह गुण अन्य माध्यों में नहीं पाया जाता।

(६) मध्यका को विन्दुरेखीय ढंग से भी निकाला जा सकता है।

(७) मध्यका का अर्थ साधारण व्यक्ति भी समझ सकते हैं क्योंकि इसकी गणन-क्रिया बड़ी सरल है।

(८) गुणात्मक (Qualitative) समंकों का अध्ययन करने के लिए मध्यका विशेष उपयुक्त समझी जाती है। स्वास्थ्य, ज्ञान, गरीबी, आदि विषयों का तुलनात्मक अध्ययन मध्यका की सहायता से सुचारुरूप से किया जा सकता है।

मध्यका के दोष (Disadvantages of Median)

(१) मध्यका का प्रयोग सीमित है। इसका प्रयोग बीजगणित में नहीं किया जा सकता।

(२) यह माध्य समंक माला के सभी मूल्यों को समान महत्व देता है।

(३) यदि समंकों की कुल संख्या व मध्यका ज्ञात हो, तो समंकों का कुल मूल्य नहीं निकाला जा सकता।

(४) कभी कभी समंक माला में मध्यका ऐसे स्थान पर हो सकती है जहाँ माला का प्रतिनिधित्व करने वाले बहुत ही कम मूल्य हों।

(५) यदि समंकों की आकृतियों में सहजातीयना नहीं है. तो मध्यका माला की केन्द्रीय-प्रवृत्ति का वास्तविक प्रदर्शन करने में असमर्थ होगी।

(६) मध्यका ज्ञात करने के लिए समंकों का आरोही अथवा अवरोही क्रम से अनुविन्यसन करना अनिवार्य होता है।

चतुर्थांश, पंचमांश, अष्टमांश, दशांश, शतांश, इत्यादि
(Quartile, Quintile, Octile, Decile, Percentile, etc.)

जिस प्रकार किसी समंक माला को दो बराबर भागों में वांटने वाली मध्यका होती है, उसी प्रकार उसे क्रमशः चार, पाँच, आठ, दस अथवा सौ बराबर भागों में वांटने वाले मूल्य चतुर्थांश, पंचमांश, अष्टमांश, दशांश और शतांश होते हैं। सांख्यिकी में समंक माला के विस्तृत अध्ययन के लिये उसके विभिन्न चतुर्थांश, दशांश और शतांश की गणना आवश्यक होती है। पंचमांश, अष्टमांश, इत्यादि का प्रयोग सीमित है, किन्तु उनको निकालने की विधि उसी आधार पर है।

जिस प्रकार मध्यका समंक माला को दो बराबर भागों में बाँटती है, उसी प्रकार उन दोनों बराबर भागों को पुनः द्विभाग करना चतुर्थांश का काम है। मध्यका से कम मूल्य वाले भाग को समद्विभाग करने वाले चतुर्थांश को प्रथम या निचला चतुर्थांश (First or Lower Quartile) तथा मध्यका से अधिक मूल्य वाले भाग को समद्विभाग करने वाले चतुर्थांश को तृतीय या ऊपरी चतुर्थांश (Third or Upper Quartile) कहते हैं। द्वितीय चतुर्थांश (Second Quartile) स्वयं मध्यका है। इस प्रकार एक समंक माला में उसे चार बराबर भागों में बाँटने वाले तीन चतुर्थांश होते हैं।

दशांश और शतांश समंक माला के क्रमशः दसवें और सौवें भागों को प्रकट करते हैं। अतः किसी माला में कुल 9 दशांश या 99 शतांश होते हैं।

चतुर्थांश, दशांश और शतांश के लिये सांख्यिकी में निम्नलिखित चिन्हों (Symbols) का प्रयोग किया जाता है :—

Quartile : Q_1, Q_2 तथा Q_3;
Decile : $D_1, D_2 \ldots\ldots\ldots D_9$;
Percentile : $P_1, P_2 \ldots\ldots P_{99}$.

चतुर्थांश, दशांश और शतांश निकालने की रीति
(Method of calculating Quartiles, Deciles and Percentiles)

साधारण श्रेणी (Individual Series)

मध्यका के सूत्र के समान ही इनके भी सूत्र हैं किन्तु $(N+1)$ में 2 से भाग देने के स्थान पर क्रमशः 4, 10 और 100 से भाग दिया जाता है तथा

($N+1$) में अभीष्ट चतुर्थांश, दशांश या शतांश संख्या का गुणा करना पड़ता है। उदाहरण के लिये :—

चतुर्थांश (Quartiles)

$$Q_1 = \text{Size of } \left\{ \frac{N+1}{4} \right\} \text{th item}$$

$$Q_3 = \text{Size of } \left\{ \frac{3(N+1)}{4} \right\} \text{th item}$$

दशांश (Deciles)

$$D_1 = \text{Size of } \left\{ \frac{N+1}{10} \right\} \text{th item}$$

$$D_9 = \text{Size of } \left\{ \frac{9(N+1)}{10} \right\} \text{th item}$$

शतांश (Percentiles)

$$P_1 = \text{Size of } \left\{ \frac{N+1}{100} \right\} \text{th item}$$

$$P_{99} = \text{Size of } \left\{ \frac{99(N+1)}{100} \right\} \text{th item}$$

Illustration 37 :—

Monthly incomes of twenty families are given below, in rupees :—

2,000 ; 35 ; 400 ; 15 ; 40 ; 1,500 ; 300 ; 6 ; 90 ; 250 ; 20 ; 12 ; 450 ; 10 ; 150 ; 8 ; 25 ; 30 ; 1,200 ; 60.

Calculate the First and Third Quartiles, 8th Decile and 65th Percentile.

Solution :—

चूंकि यह एक साधारण श्रेणी है, इसलिये इसका पहले आरोही या अवरोही क्रम से विन्यास करना पड़ेगा। यदि विभिन्न मूल्यों को हम आरोही क्रम से रक्खें, तो निम्न तालिका की रचना होगी :—

INCOMES ARRANGED IN ASCENDING ORDER

Item No.	Income Rs.	Item No.	Income Rs.
1	6	11	60
2	8	12	90
3	10	13	150
4	12	14	250
5	15	15	300
6	20	16	400
7	25	17	450
8	30	18	1,200
9	35	19	1,500
10	40	20	2,000

Q_1 = Size of $\left\{\frac{N+1}{4}\right\}$th item

= Size of $\left\{\frac{20+1}{4}\right\}$th item

= Size of 5.25th item

= Size of 5th item $+\frac{1}{4}$ (size of 6th item—size of 5th item)

$= 15+\frac{1}{4}(20-15)$

= Rs. 16.25

Q_3 = Size of $\left\{\frac{3(N+1)}{4}\right\}$th item

= Size of $\left\{\frac{3(20+1)}{4}\right\}$th item

= Size of 15.75th item

= Size of 15th item $+\frac{3}{4}$ (size of 16th—size of 15th item)

$= 300+\frac{3}{4}(400-300)$

= Rs. 375

$$D_8 = \text{Size of } \left\{\frac{8(N+1)}{10}\right\} \text{th item}$$

$$= \text{Size of } \left\{\frac{8(20+1)}{10}\right\} \text{th item}$$

$$= \text{Size of } 16.8\text{th item}$$

$$= \text{Size of 16th item} + \tfrac{8}{10} (\text{size of 17th} - \text{size of 16th item})$$

$$= 400 + \tfrac{8}{10}(450 - 400)$$

$$= \text{Rs. } 440$$

$$P_{65} = \text{Size of } \left\{\frac{65(N+1)}{100}\right\} \text{th item}$$

$$= \text{Size of } \left\{\frac{65(20+1)}{100}\right\} \text{th item}$$

$$= \text{Size of } 13.65\text{th item}$$

$$= \text{Size of 13th item} + \frac{65}{100} (\text{size of 14th} - \text{size of 13th item})$$

$$= 150 + \frac{65}{100} (250 - 150)$$

$$= \text{Rs. } 215$$

विच्छिन्न माला (Discrete Series)

विंच्छिन्न माला में उपरोक्त मापों को ज्ञात करने का ढंग निम्नलिखित उदाहरण से स्पष्ट हो जायगा :—

Illustration 38 :—

The following table shows the marks obtained by 227 students in a general knowledge test out of 100. Find out the Lower and Upper Quartiles, 6th Decile and 30th Percentile.

Marks	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Frequency	2	7	17	29	38	41	40	30	17	6

Solution :—

CUMULATIVE FREQUENCY TABLE

Marks (x)	Frequency (f)	Cum. Frequency (cf)
10	2	2
20	7	9
30	17	26
40	29	55
50	38	93
60	41	134
70	40	174
80	30	204
90	17	221
100	6	227

$$Q_1 = \text{Size of } \left\{ \frac{N+1}{4} \right\} \text{th item}$$

$$= \text{Size of } \left\{ \frac{227+1}{4} \right\} \text{th item}$$

$$= \text{Size of 57th item}$$

$$= 50 \text{ marks}$$

$$Q_3 = \text{Size of } \left\{ \frac{3(N+1)}{4} \right\} \text{th item}$$

$$= \text{Size of } \left\{ \frac{3(227+1)}{4} \right\} \text{th item}$$

$$= \text{Size of 171st item}$$

$$= 70 \text{ marks}$$

$$D_6 = \text{Size of } \left\{ \frac{6(N+1)}{10} \right\} \text{th item}$$

$$= \text{Size of } \left\{ \frac{6(227+1)}{10} \right\} \text{th item}$$

$$= \text{Size of 136.8th item}$$

$$= 70 \text{ marks}$$

$$P_{30} = \text{Size of } \left\{ \frac{30(N+1)}{100} \right\} \text{th item}$$

$$= \text{Size of } \left\{ \frac{30(227+1)}{100} \right\} \text{th item}$$

=Size of 68.4th item

=50 marks

अविच्छिन्न माला (Continuous Series)

अविच्छिन्न माला में चतुर्थांश, दशांश एवं शतांश, इत्यादि निकालने के लिये मध्यका निकालने वाले सूत्र के समान ही उसी आधार पर निर्मित सूत्रों का प्रयोग करना पड़ता है। केवल सुविधानुसार थोड़ा थोड़ा परिवर्तन करने की आवश्यकता पड़ती है। सूत्र में दिये गये (m) के स्थान पर (q_1), (q_3), ($d_1 \ldots d_9$), ($p_1 \ldots p_{99}$), इत्यादि हो जायगा, और (c) अभीष्ट चतुर्थांश, दशांश या शतांश वाले वर्ग के पूर्व वर्ग की संचयी आवृत्ति होगी।

Illustration 39 :—

From the following distribution, calculate the Median Lower Quartile, 8th Decile and 56th Percentile. Also calculate the Second Quartile; 5th Decile; 25th, 50th and 56th Percentiles.

Class Intervals		Frequency
1—3	...	6
3—5	...	53
5—7	...	85
7—9	...	56
9—11	...	21
11—13	...	16
13—15	...	4
15—17	...	4

(बी० कॉम०, बनारस, १९५३)

Solution :—

CUMULATIVE FREQUENCY TABLE

Class Intervals (x)	Frequency (f)	Cum. Frequency (cf)
1—3	6	6
3—5	53	59
5—7	85	144
7—9	56	200
9—11	21	221
11—13	16	237
13—15	4	241
15—17	4	245

$$m = \text{Size of } \left\{ \frac{N+1}{2} \right\} \text{th item}$$

$$= \text{Size of } \left\{ \frac{245+1}{2} \right\} \text{th item}$$

= Size of 123rd item which falls in median group (5—7)

$$M = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f} \times (m - c)$$

$$= 5 + \frac{7-5}{85} \times (123-59)$$

$$= 5 + \frac{2}{85} \times 64$$

= 6.5 units

$$q_1 = \text{Size of } \left\{ \frac{N+1}{4} \right\} \text{th item}$$

$$= \text{Size of } \left\{ \frac{245+1}{4} \right\} \text{th item}$$

= Size of 61.5th item which falls in the lower quartile group (5—7)

$$Q_1 = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f} \times (q_1 - c)$$

$$= 5 + \frac{7-5}{85} \times (61.5-59)$$

$$= 5 + \frac{2}{85} \times \frac{25}{10}$$

= 5.06 units

$$d_8 = \text{Size of } \left\{ \frac{8(N+1)}{10} \right\} \text{th item}$$

$$= \text{Size of } \left\{ \frac{8\,(245+1)}{10} \right\} \text{th item}$$

= Size of 196.8th item which falls in decile group (7—9)

$$D_8 = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f} \times (d_8 - c)$$

$$= 7 + \frac{9-7}{56} \times (196.8 - 144)$$

$$= 7 + \frac{2}{56} \times \frac{528}{10}$$

$$= 8.9 \text{ units}$$

$$p_{56} = \text{Size of} \left\{ \frac{56(N+1)}{100} \right\} \text{th item}$$

$$= \text{Size of} \left\{ \frac{56(245+1)}{100} \right\} \text{th item}$$

= Size of 137.76th item which falls in percentile group (5—7)

$$P_{56} = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f} \times (p_{56} - c)$$

$$= 5 + \frac{7-5}{85} \times (137.76 - 59)$$

$$= 5 + \frac{2}{85} \times \frac{7876}{100}$$

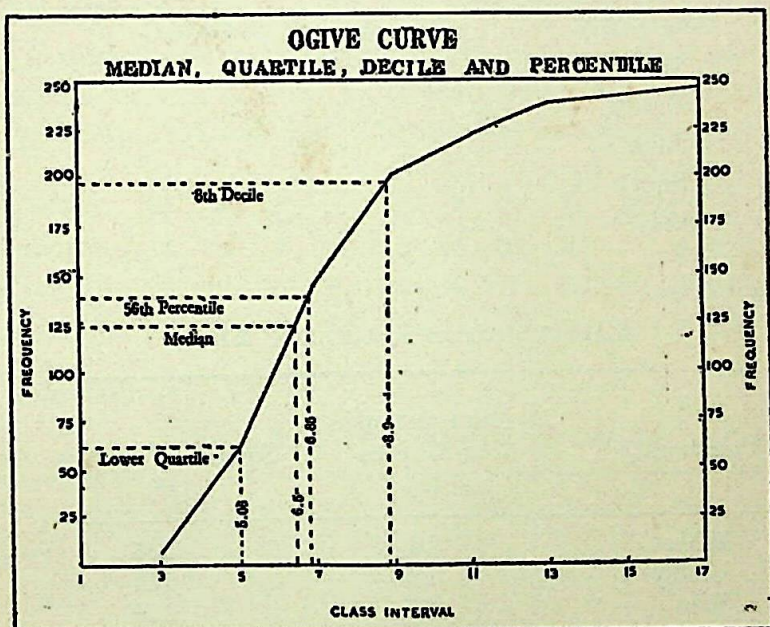
$$= 6.85 \text{ units}$$

उपरोक्त रीति से Second Quartile; 5th Decile; 25th, 50th और 80th Percentile भी निकाला जा सकता है, किन्तु यदि ध्यानपूर्वक देखा जाय तो ये सब माप ऊपर निकाले गये मूल्यों के आधार पर बड़ी आसानी से बतलाये जा सकते हैं। Second Quartile ($\frac{2}{4}$) वास्तव में Median का ही दूसरा नाम है। उसी तरह 5th Decile ($\frac{5}{10}$) और 50th Percentile ($\frac{50}{100}$) भी Median ही हैं। 25th Percentile ($\frac{25}{100}$) Lower Quartile है, तथा 80th Percentile ($\frac{80}{100}$) बराबर 8th Decile के है। अतः

$Q_2 = 6.5$ units, $D_5 = 6.5$ units, $P_{50} = 6.5$ units,
$P_{25} = 5.06$ units and $P_{80} = 8.9$ units.

मध्यका की ही भाँति हम चतुर्थांश, दशांश व शतांश, आदि का भी विन्दुरेखीय प्रदर्शन कर सकते हैं।

Illustration 40:—

Using the data given in Illustration No. 39, determine graphically the value of the Median, Lower Quartile, 8th Decile and 56th Percentile.

चित्र को देखने से स्पष्ट हो जायगा कि मध्यका संख्या (m), प्रथम चतुर्थांश संख्या (q_1), दशांश संख्या (d_8) तथा शतांश संख्या (p_{56}) के आधार पर डाले गये लम्ब क्रमश: 6.5, 5.06, 8.9 तथा 6.85 इकाइयाँ प्रकट कर रहे हैं।

अस्तु, चतुर्थांश, दशांश व शतांश, आदि की सहायता से हम किसी समंक माला के विभिन्न भागों का अध्ययन करते हैं। इन्हें स्थानिक मूल्य (Provisional Values) भी कहा जाता है।

वर्गकरणी माध्य (Quadratic Mean)

सांख्यिकी में वर्गकरणी माध्य का प्रयोग बहुत कम होता है। यदि किसी समंक माला के विभिन्न चल-मूल्यों के वर्ग निकाल कर उनका साधारण

मध्यक निकाला जाय, और पुनः उस मध्यक का वर्गमूल निकाल लिया जाय, तो वह वर्गकरणी माध्य होगा। नीचे एक उदाहरण दिया जा रहा है :—

Illustration 41 :—

Find out the Quadratic Mean of the following prices of some commodities given in rupees :—

Commodity		Price per md. in Rupees
Wheat	...	16
Barley	...	12
Rice	...	20
Sugar	...	36
Oil	...	15

Solution :—

CALCULATION OF QUADRATIC MEAN

Commodity	Price per md. in Rupees (x)	Square of Values (x^2)
Wheat	16	256
Barley	12	144
Rice	20	400
Sugar	36	1,296
Oil	15	225
$n=5$		$\Sigma x^2=2,321$

$$\text{Quadratic Mean} = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{2,321}{5}}$$

$$= \sqrt{464.2}$$

$$= \text{Rs. } 21.5$$

संग्रथित माध्य (Composite Average)

संग्रथित माध्य विभिन्न समंक मालाओं के साधारण माध्यों का माध्य है। यदि विभिन्न समंक मालाओं के अलग-अलग मध्यक निकाल लिये जायें और फिर उन्हें जोड़कर समंक मालाओं की संख्या से भाग दे दिया जाय तो प्राप्तफल संग्रथित माध्य होगा।

Illustration 42 :—

Given below are the monthly sales, in thousands of rupees, of The Sunshine Electric Co., of India Private Limited, for the year 1954, 1955 and 1956. Calculate the Composite Average.

Year		Jan.	Feb.	Mar.	Apl.	May	June	Jly.	Aug.	Sep.	Oct.	Nov.	Dec.
1954	...	5	6	8	10	15	18	10	9	7	4	2	2
1955	...	9	12	15	21	17	15	11	10	10	8	8	8
1956	...	8	7	10	14	18	11	8	5	4	9	9	5

Solution :—

CALCULATION OF COMPOSITE AVERAGE

Year	Jan.	Feb.	Mar.	Apl.	May	June	July	Aug.	Sep.	Oct.	Nov.	Dec.	Total
1954(x_1)	5	6	8	10	15	18	10	9	7	4	2	2	$\Sigma x_1 = 96$
1955(x_2)	9	12	15	21	17	15	11	10	10	8	8	8	$\Sigma x_2 = 144$
1956(x_3)	8	7	10	14	18	11	8	5	4	9	9	5	$\Sigma x_3 = 108$

SIMPLE ARITHMETIC AVERAGE

1954

$$a_1 = \frac{\Sigma x_1}{n} = \frac{96}{12} = 8$$

1955

$$a_2 = \frac{\Sigma x_2}{n} = \frac{144}{12} = 12$$

1956

$$a_3 = \frac{\Sigma x_3}{n} = \frac{108}{12} = 9$$

$$\text{Composite Average} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{}$$

$$=\frac{8+12+9}{3}$$

$$=\text{Rs. } 9.67 \text{ thousands.}$$

विभिन्न माध्यों का स्थान-निरूपण
(Position of the Averages)

उदाहरण १, १५, तथा २२ का अध्ययन करने से ज्ञात होगा कि तीनों माध्यों में मध्यक सबसे बड़ा है, उसके पश्चात् गुणोत्तर मध्यक और फिर हरात्मक मध्यक। यह परिणाम हम सभी सांख्यिकीय मालाओं में पाते हैं। केवल उस स्थिति में ये तीनों मध्यक समान होते हैं, जब समंकों की समस्त आकृतियाँ समान हों।

Illustration 43 :—

Prove that

$$a \geq G \geq H$$

(बी० कॉम०, बनारस, १९४५)

Solution :—

इस उदाहरण में यह सिद्ध करना है कि किसी समंक माला में मध्यक, गुणोत्तर मध्यक तथा हरात्मक मध्यक बराबर होते हैं, अथवा मध्यक गुणोत्तर मध्यक की अपेक्षा तथा गुणोत्तर मध्यक हरात्मक मध्यक की अपेक्षा बड़ा होता है।

PROOF : (१) कल्पना कीजिये कि x व y किसी समंक माला के दो मूल्य हैं। यदि x व y के मूल्य समान हैं तो तीनों मध्यक भी समान होंगे। उदाहरण के लिये दोनों के मूल्य 5 लीजिये। अतएव,

$$a=\frac{5+5}{2} \qquad G=\sqrt{5\times5} \qquad H=\frac{2}{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}$$

$$=5 \qquad\qquad =5 \qquad\qquad =5$$

(२) यदि x व y के मूल्य समान नहीं हैं, तो सूत्र के अनुसार

$$a=\frac{x+y}{2} \qquad G=\sqrt{xy} \qquad H=\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \text{ या } \frac{2xy}{x+y}$$

यह निश्चित है कि $(\sqrt{x}-\sqrt{y}) > 0$

$$\text{अथवा } (x-2\sqrt{x}\sqrt{y}+y) > 0$$

$$\text{अथवा } x+y-2\sqrt{xy} > 0$$

$$\text{अथवा } x+y > 2\sqrt{xy}$$

यदि हम दोनों पक्षों को 2 से भाग दें, तो

$$\frac{x+y}{2} > \sqrt{xy} \text{ अर्थात् } a > G$$

अब हमें यह सिद्ध करना है कि G का मूल्य H से बड़ा होता है। अतः यदि हम उपर्युक्त परिणाम के दोनो पक्षों को $\frac{2\sqrt{xy}}{x+y}$ से गुणा करें तो

$$\left\{\frac{x+y}{2} \times \frac{2\sqrt{xy}}{x+y}\right\} > \left\{\sqrt{xy} \times \frac{2\sqrt{xy}}{x+y}\right\}$$

$$\text{अतः } \sqrt{xy} > \frac{2xy}{x+y} \quad \text{अर्थात्} \quad G > H$$

पुनः यदि आवृत्ति-वितरण में पूर्ण संमितता (Perfect Symmetry) हैं, अर्थात् आवृत्तियों के उतार-चढ़ाव में समानता है, तो भूयिष्ठक, मध्यका व मध्यक के मूल्य बराबर होंगे :—

$$Z=M=a$$

परन्तु साधारण असंमित (Moderately Asymmetrical) वितरण में माध्यों का निम्न सम्बन्ध पाया जाता है :—

$$(M-Z)=\tfrac{2}{3}(a-Z)$$

अर्थात् मध्यका और भूयिष्ठक के मध्य का अन्तर मध्यक व भूयिष्ठक के अन्तर के $\frac{2}{3}$ के बराबर होता है। इसका विन्दुरेखीय प्रदर्शन पृष्ठ ३०४ पर देखिये।

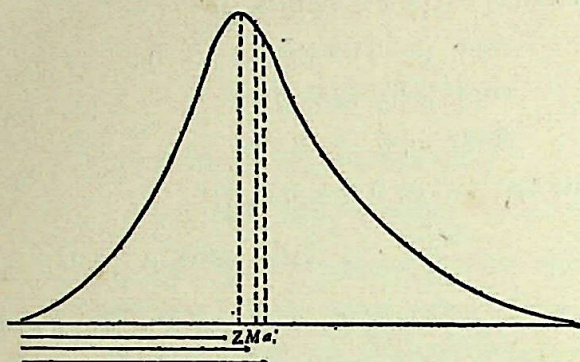
चित्र में भूयिष्ठक, मध्यका व मध्यक का स्थान-निरूपण किया गया है। Z व M के बीच जितना स्थान है, M व a के बीच उसका आधा है। चित्र में दिखलाया गया वक्र धनात्मक (+) विषमता का संकेत कर रहा है। जब विषमता ऋणात्मक (—) होती है, तो इन तीनों माध्यों के स्थान इसके विपरीत हो जाते हैं, अर्थात् मध्यक का मूल्य सबसे कम, मध्यका का उससे अधिक और भूयिष्ठक का सबसे अधिक रहता है।

तीनों माध्यों का सम्बन्ध प्रदर्शित करने वाला यह समीकरण (Equation) बड़ा ही महत्वपूर्ण है। यदि दो माध्यों के मूल्य ज्ञात हों तो इसकी सहायता से तीसरे माध्य का मूल्य बड़ी सरलता से ज्ञात किया जा सकता है।

Illustration 44 :—

In a moderately asymmetrical distribution, determine the value of the following :—

(i) Mode, if Median=27.5 and Mean=30.5

(ii) Median, if Mode=15.4 and Mean=18.6

(iii) Mean, if Mode=50.2 and Median=40.0

Solution :—

समीकरण : $(M-Z)=\frac{2}{3}(a-Z)$

(i) $(27.5-Z)=\frac{2}{3}(30.5-Z)$

अथवा $(27.5-Z)=\frac{61}{3}-\frac{2Z}{3}$

अथवा $82.5-3Z=61-2Z$

$\therefore$ $Z=21.5$ units

(ii) $(M-15.4)=\frac{2}{3}(18.6-15.4)$

अथवा $(M-15.4)=\frac{37.2}{3}-\frac{30.8}{3}$

अथवा $3M-46.2=37.2-30.8$

अथवा $3M=37.2-30.8+46.2$

$\therefore$ $M=17.5$ units

(iii) $(40.0-50.2) = \frac{2}{3}(a-50.2)$

अथवा $40.0-50.2 = \frac{2a}{3} - \frac{100.4}{3}$

अथवा $120.0-150.6 = 2a-100.4$

अथवा $2a = 120.0-150.6+100.4$

$\therefore$ $a = 34.9$ units

विभिन्न माध्यों के प्रयोग

(Uses of the different Averages)

विभिन्न माध्यों की प्रकृति व उनको ज्ञात करने की रीतियों का अध्ययन करने के उपरान्त अब विचारणीय विषय यह है कि किस स्थिति में किस माध्य का प्रयोग करना उचित होगा। अकेला एक माध्य सभी समंक मालाओं की केन्द्रीय-प्रवृत्ति की विशेषताओं का पूर्णरूप से अध्ययन नहीं कर सकता। अतः प्रत्येक परिस्थिति में किसी माध्य को ज्ञात करने के पूर्व उसके गुण-दोष, समंक माला के मूल्यों की प्रकृति, उसकी बनावट, आवृत्तियों का वितरण, आदि बातों का ध्यान रखना आवश्यक होता है। इस अध्याय के प्रारम्भ में यह बतलाया जा चुका है कि एक सन्तोषजनक माध्य में किन गुणों का होना आवश्यक है। माध्यों का प्रयोग करते समय उन गुणों का ध्यान रखना भी आवश्यक होता है।

सभी माध्यों में साधारण मध्यक श्रेष्ठ समझा जाता है, क्योंकि वह समंक माला की सभी आकृतियों पर आधारित रहता है, इसकी गणन-क्रिया बड़ी सरल है, यह एक स्पष्ट माध्य है, इसका प्रयोग उच्चतर गणितीय विषयों में किया जा सकता है तथा इस माध्य पर निदर्शन के उच्चावचनों का न्यूनतम प्रभाव पड़ता है। ये सब गुण हम अन्य माध्यों में नहीं पाते। भूयिष्ठक व मध्यका सम्पूर्ण समंक माला की आकृतियों का अध्ययन नहीं करते और न इनका प्रयोग उच्चतर विषयों के अध्ययन में किया जा सकता है। गुणोत्तर व हरात्मक मध्यकों की गणन-क्रिया बड़ी कठिन है। इन बातों का ध्यान रखते हुये विभिन्न माध्यों का प्रयोग इस प्रकार करना चाहिये :—

(१) **मध्यक (Arithmetic Average)**—साधारणतः मध्यक का प्रयोग किसी भी सामाजिक, आर्थिक व व्यावसायिक समस्या के अध्ययन के लिये

किया जा सकता है, जैसे, उत्पादन, आय, मूल्य, आयात, निर्यात, आदि की केन्द्रीय-प्रवृत्ति का अध्ययन करने के लिये मध्यक का उपयोग किया जा सकता है। जब हम 'मध्यक आय', 'मध्यक उत्पादन', 'मध्यक मूल्य', आदि कहते हैं तो हमारा तात्पर्य साधारण मध्यक से है। अतः उन स्थितियों को छोड़ कर जहाँ किसी विशेष माध्य के प्रयोग का संकेत हो, अन्य सभी स्थानों पर मध्यक का प्रयोग किया जा सकता है।

(२) **भारांकित मध्यक (Weighted Arithmetic Average)**—यदि समंक माला के विभिन्न मूल्यों को सापेक्षिक भार देने की आवश्यकता हो तो भारांकित मध्यक का प्रयोग करना चाहिये, जैसे यदि किसी परिवार का मध्यक उपभोग (*Per capita* consumption) निकालना हो तो हमें यह देखना पड़ेगा कि पुरुषों, स्त्रियों व बच्चों के उपभोग की मात्रा किस ढंग की व किस परिमाण में है। निर्देशांकों की रचना करते समय भी भारांकित मध्यक का उपयोग विशेष लाभदायक समझा जाता है। इसी प्रकार यदि किसी शिक्षण-संस्था में काम करने वाले व्यक्तियों की मध्यक आय ज्ञात करनी हो तो विभिन्न कर्मचारियों की आय को भारांकित करने की आवश्यकता पड़ेगी, अन्यथा उच्च कर्मचारियों के वेतन साधारण कर्मचारियों की आय को बहुत प्रभावित कर देंगे।

(३) **गुणोत्तर मध्यक (Geometric Mean)**—गुणोत्तर मध्यक समंक माला के विशाल मूल्यों को कम व छोटे मूल्यों को अधिक भार देता है। अतः जहाँ माला के मूल्यों में अत्यधिक विषमता हो वहाँ इस मध्यक का उपयोग भारांकित मध्यक की अपेक्षा अधिक उपयुक्त समझा जाता है। जहाँ समंकों के सापेक्ष मूल्य अनुपात (Ratios) अथवा प्रतिशत (Percentages) में दिये हुये हों, वहाँ गुणोत्तर मध्यक का प्रयोग विशेष लाभदायक होता है। इसीलिये जनसंख्या की वृद्धि ज्ञात करने के लिये गुणोत्तर मध्यक को ही चुना जाता है। निर्देशांकों की रचना में मूल्य के प्रतिशतों का प्रयोग होने के कारण यही माध्य विशेष उपयुक्त समझा जाता है।

(४) **हरात्मक मध्यक (Harmonic Mean)**—हरात्मक मध्यक का उपयोग यद्यपि सीमित है, किन्तु जब बड़े मूल्यों को अत्यधिक कम व छोटे मूल्यों को अत्यधिक ज्यादा भार देने की आवश्यकता हो, तो गुणोत्तर मध्यक की अपेक्षा इसका प्रयोग अधिक लाभदायक माना जाता है। गति, रफ्तार,

चलन-वेग, आदि के मध्यक निकालते समय हरात्मक मध्यक का ही उपयोग करना चाहिये।

(५) भूयिष्ठक (Mode)—व्यवहारिक जीवन में जिस मध्यक का हम अधिकतर प्रयोग करते हैं, वह भूयिष्ठक है। भूयिष्ठक किसी समंक माला का वह मूल्य है जिसकी आवृत्ति सबसे अधिक बार हुई है। अतः जब हम 'कमीज के कॉलर का मध्यक आकार', 'डाक में डाले गये पत्रों की मध्यक संख्या', 'किसी विश्वविद्यालय के विद्यार्थियों का मध्यक व्यय', आदि की बातचीत करते हैं तो हमारा तात्पर्य भूयिष्ठक से है। उत्पादन सम्बन्धी समस्याओं में भी भूयिष्ठक का ही प्रयोग किया जाता है, जैसे, 'प्रति व्यक्ति अथवा प्रति मशीन उत्पादन'।

(६) मध्यका (Median)—मध्यका की गणन-क्रिया सब माध्यों की अपेक्षा सरल है। अतः इसका उपयोग सभी समस्याओं के अध्ययन के लिये किया जा सकता है। मध्यका विशेषरूप से गुणात्मक समंकों की केन्द्रीय-प्रवृत्ति के अध्ययनार्थ प्रयोग में लायी जाती है, जैसे, 'मध्यक सामान्य-बुद्धि', 'मध्यक योग्यता', 'मध्यक सम्पत्ति का वितरण', आदि। मध्यका का उपयोग आर्थिक व व्यावसायिक समंकों में कम करना चाहिये क्योंकि उनके मूल्यों में स्थिरता का अभाव रहता है।

Illustration 45 :—

How will you find (*a*) the average marks of a class of students to show the level of intelligence, (*b*) the average cost of goods purchased in different lots, to determine the selling price, (*c*) the average size of groups of items for the purpose of classification, and (*d*) the average rate of increase in prices when the prices increase at different rates during successive periods ? Explain why you should adopt a particular method in each case.

(बी० कॉम०, आगरा, १९४८)

Solution :—

(*a*) मध्यका, (*b*) भारांकित मध्यक, (*c*) भूयिष्ठक, तथा (*d*) गुणोत्तर मध्यक।

(कारण के लिये कृपया 'विभिन्न माध्यों के प्रयोग' शीर्षक को देखिये)।

मध्यक की सीमायें (Limitations of Averages)

माध्य वस्तुतः समंक माला का पूर्ण अध्ययन नहीं करता। वह तो केवल उसकी केन्द्रीय-प्रवृत्ति पर प्रकाश डालता है; उसकी बनावट व विषमता को स्पष्ट करने में असमर्थ होता है। फिर प्रत्येक माध्य के अपने निजी गुण-दोष हैं। अतः माध्यों का उपयोग करते समय निम्न बातों का ध्यान रखना चाहिये :—

(क) माध्य को ज्ञात करने का उद्देश्य,

(ख) उस माध्य के गुण-दोष,

(ग) समंकों की विशेषतायें,

(घ) समंकों में सहजातीयता व एकरूपता का अस्तित्व,

(ङ) आवृत्ति-वितरण की रचना

(च) जिस विषय से समंकों का सम्बन्ध है उसका पूर्ण ज्ञान।

प्रश्न

1. What is meant by '*Central Tendency*'? Describe the measures of measuring central tendency. Point out the usefulness and limitations of each method.

'केन्द्रीय प्रवृत्ति' से क्या अभिप्राय है? केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों का वर्णन कीजिये। प्रत्येक रीति की उपयोगिता व सीमाओं पर प्रकाश डालिये।

(बी० कॉम०, बम्बई, १९४९)

2. Write a note on the relative merits and uses of the following averages :—

निम्नांकित माध्यों के पारस्परिक गुणों व उपयोगिताओं पर एक टिप्पणी लिखिये :—

(*a*) Arithmetic Average (मध्यक);

(*b*) Median; (मध्यका);

(*c*) Mode (भूयिष्ठक);

(*d*) Geometric Mean (गुणोत्तर मध्यक);

(*e*) Harmonic Mean (हरात्मक मध्यक);

(बी० कॉम०, आगरा, १९५७)

3. What is the purpose served by an average? Discuss the special advantages attached to the different averages, and illustrate their uses.

सांख्यिकीय माध्य का क्या उद्देश्य है ? विभिन्न माध्यों के विशेष लाभों का वर्णन करते हुये उनकी उपादेयता का प्रदर्शन कीजिये।

(बी० कॉम०, आगरा, १९४२)

4. Explain the uses of the different types of averages, with illustrations.

विभिन्न प्रकार के माध्यों के उपयोग उदाहरण दे कर समझाइये।

(बी० कॉम०, लखनऊ, १९५०)

5. What is an average? Under what circumstances would you use the following?

मध्यक क्या है ? किन परिस्थितियों में आप निम्नलिखित का प्रयोग करेंगे ?

(a) The mode instead of the arithmetic average (मध्यक के वजाय भूयिष्ठक),

(b) The geometric average instead of the arithmetic average, (मध्यक के वजाय गुणोत्तर मध्यक),

(c) The arithmetic average instead of the dian me(मध्यका के वजाय मध्यक),

(बी० कॉम०, बनारस, १९५२)

6. Discuss, giving examples, the merits and defects of the averages generally employed in business statistics.

व्यावसायिक सांख्यिकी में साधारणतः व्यवहृत होने वाले माध्यों के गुण-दोषों का सोदाहरण विवेचन कीजिये।

(बी० कॉम०, लखनऊ, १९५३)

7. Define arithmetic average, geometric mean, median and mode. Which of these is most representative and why?

मध्यक, गुणोत्तर मध्यक, सध्यका व भूयिष्ठक की परिभाषा दीजिये। इनमें से कौन सा माध्य विशेष प्रतिनिधि समझा जाता है और क्यों ?

(एम० कॉम०, आगरा, १९४५)

8. Which of the averages will be most useful in the following problems? Give reasons—

निम्न समस्याओं में कौन सा माध्य अधिक लाभदायक होगा? कारण बतलाइये—

(a) *Per Capita* consumption of food in a family consisting of children, women and men (एक परिवार में प्रति व्यक्ति भोजन का उपभोग जिसमें बच्चे, स्त्री व पुरुष तीनों हैं),

(b) average earnings of a pleader (एक वकील की मध्यक आय),

(c) normal size of a hat for hat manufacturers (हैट निर्माताओं के लिये हैट का प्रसामान्य आकार);

(d) average size of oranges on a tree (एक वृक्ष में लगे हुये संतरों का मध्यक आकार)।

(बी० कॉम०, बनारस, १९५५)

9. Compare the merits and demerits of the Median and the Mode. In which of the following problems would they be most useful?

मध्यका तथा भूयिष्ठक के गुण-दोषों की तुलना कीजिये। निम्न समस्याओं में से किन में इनका प्रयोग अधिक लाभदायक होगा?

(a) Skull measurement (खोपड़ी की माप);

(b) Size of holdings (खेतों का आकार);

(c) Comparison of intelligence (बुद्धि की तुलना);

(d) Marks obtained in an examination (किसी परीक्षा में प्राप्तांक)।

(एम० ए०, आगरा, १९४३)

10.(a) In what circumstances would you consider the Arithmetic Mean, the Geometric Mean, the Harmonic Mean, respectively, the most suitable statistic to describe the central tendency of a distribution?

किसी आवृत्ति वितरण की केन्द्रीय प्रवृत्ति का वर्णन करने के लिये किन परिस्थितियों में आप मध्यक, गुणोत्तर मध्यक, हरात्मक मध्यक को क्रमशः सबसे उपयुक्त माप मानते हैं?

(*b*) Determine Mode and the Median from the following figures :—

25, 15, 23, 40, 27, 25, 23, 25, and 20.

(बी० कॉम०, आगरा, १९५४)

(*Z=25 and M=25*)

11. Name the different averages used in Statistics and explain how they conform to the requisites of a good average. Also mention the situations in which each of them would be appropriate.

सांख्यिकी में जिन विभिन्न मध्यों का प्रयोग होता है उनके नाम बतलाइये, तथा यह भी बतलाइये कि उनमें एक अच्छे माध्य के गुण कहाँ तक पाये जाते हैं। उन परिस्थितियों का उल्लेख कीजिये जहाँ इनमें से प्रत्येक का प्रयोग उपयुक्त समझा जाता है।

Obtain the Mean, Median, and the Mode of the following distribution :—

Marks		Frequency
10—25	...	6
25—40	...	20
40—55	...	44
55—70	...	26
70—85	...	3
85—100	...	1

(*a=47.95 marks, M=48.35 marks and Z=48.57 marks*)

(एम० ए०, आगरा, १९५७)

12. The following are the monthly salaries, in rupees, of the employees in a branch bank. Calculate the *Arithmetic Mean*, the *Geometric Mean*, and the *Harmonic Mean* of the salaries. Which one of them represents the salaries best, and why ?

10, 17, 29, 95, 95, 100, 100, 175, 250, and 750

(बी० कॉम०, बनारस, १९४५)

(*a*=*Rs. 162.1, G = Rs. 82.41 and H =Rs. 40.82*)

13. Calculate (*a*) the Arithmetic Mean, (*b*) the Geometric Mean, and (*c*) the Harmonic Mean of the following incomes :—

5, 10, 22, 25, 50, 100, 150, 220, 248, 2,000, 2,200 and 3,000

(बी० कॉम०, बनारस, १९४८)

(*a*=*669.17 units, G*=*125.3 units and H =27.8 units*)

14. The annual incomes of 15 families are given below, in rupees :—

80, 2,500, 90, 1,200, 1,450, 7,200, 120, 1,060, 150, 480, 360, 96, 200, 520 and 60

Calculate the Arithmetic Average, Geometric Mean and the Harmonic Mean.

(*a*=*Rs. 1037.7, G*=*Rs. 377.6 and H*=*Rs. 186.7*)

15.(*a*) In chemistry a student was graded 85 in class-work, 80 in laboratory and 65 in final examination. If these were weighted 1, 2 and 3 respectively, what was the student's average grade ?

(*b*) The mean grade of one class of 20 students is 66% and that of another class of 15 students is 70%. Find the mean grade of the two classes taken together.

(*J. F. Kenny and E. S. Keeping*)

(*73.3% and 67.7%, respectively*)

16. Find the average of the items—71.9, 83.7, 52.6, 97.3, 39.9, 72.0 when weighted with weights proportional to 2, 5, 1.5, 7, 4, 3.

What would be the approximate effect on the result if all the weights were increased by 0.5 ?

(*wa*=*75.5 units. No effect.*)

17. Explain what is meant by weighted average.

Calculate (i) the unweighted mean of the prices in column III and (ii) the mean obtained by weighting each price by the quantity consumed.

I Articles of Food		II Quantity consumed	III Price in Rupees per maund
Flour	...	11. 5 mds.	5.8
Ghee	...	5. 6 mds	58.4
Sugar	...	0.28 mds.	8.2
Potato	...	0.16 mds.	2.5
Oil	...	0.35 mds.	20.0

(*a*=*Rs. 18.98 and wa*=*Rs. 22.55*)

(एम० ए०, कलकत्ता, १९३७)

18.(*a*) What is a weighted average?

(*b*) From the following data relating to paper consumed by a press, find the difference in the weighted average cost of paper for the two years :—

Description of paper	Rate per lb. 1942-43 Rs. a. p.	Qty. consumed Tons	Rate per lb. 1943-44 Rs. a. p.	Qty. consumed Tons
White	0 7 2	17	0 8 6	$11\frac{1}{2}$
Brown	0 6 6	6	0 7 6	$8\frac{1}{2}$
Other	0 13 0	14	0 15 0	10
		37		30

(बी० कॉम०, बनारस, १९५०)

(*1942—43 :* wa_1=*Re. -/9/3, 1943—44 :* wa_2=*Re. -/10/5 and Difference : Re. -/1/2*)

19. From the results of the two colleges, A and B, given below, state which of them is better, and why?

Name of Exam.	College A		College B	
	Appeared	Passed	Appeared	Passed
M.A.	30	25	100	80
M.Com.	50	45	120	95
B.A.	200	150	100	70
B.Com.	120	75	80	50
Total	400	295	400	295

(बी० कॉम०, लखनऊ, १९४९)

(Find out the percentage of passes in each examination, and then compute the weighted averages. $wa_1=73.75\%$ *and* $wa_2=73.7\%$*. Hence, College A is better)*

20. Find out the average of (*a*) motion in case of a person who rides the first mile @ 10 miles an hour, the next mile @ 8 miles an hour, and the third mile @ 6 miles an hour; (*b*) increase in population which in the first decade has increased 20%, in the next 25% and in the third 44%.

$$(H=7\frac{31}{47} \text{ m. p. h. and } G=29.3\%)$$

21. The number of bacteria in a certain culture was found to be 4×10^6 at noon on one day. At noon the next day the number was found to be 9×10^6. If the number increased at a constant rate per hour, how many becteria were there at mid-night?

(J. F. Kenney and E. S. Keeping)

$$(G=\sqrt{(4\times10^6)\times(9\times10^6)}=6\times10^6)$$

22. According to the census of 1941, the following are the population figures, in thousands, of the first 36 cities of India :—

2,488	391	203	178	360	176
1,490	131	777	258	213	147
733	437	176	143	522	284
193	181	672	302	160	153
591	263	213	142	407	260
169	92	387	239	204	151

Find the median and the quartiles.

(एम० कॉम०, आगरा, १९४८)

(M=226 thousands, Q_1=170.75 thousands and Q_3=403 thousands, after arranging the population figures in ascending order).

23. Below are given the marks obtained by a batch of 20 students in a certain class-test in English and Hindi :—

Roll Number	Marks in English	Marks in Hindi	Roll Number	Marks in English	Marks in Hindi
1 ...	53	58	11 ...	25	10
2 ...	54	55	12 ...	42	42
3 ...	52	25	13 ...	33	15
4 ...	32	32	14 ...	48	46
5 ...	30	26	15 ...	72	50
6 ...	60	85	16 ...	51	64
7 ...	47	44	17 ...	45	39
8 ...	46	80	18 ...	33	38
9 ...	35	33	19 ...	65	30
10 ...	28	72	20 ...	29	36

In which subject is the level of knowledge of the students higher ?

(एम० ए०, पंजाब, १९५१)

(M_1=45.5 marks and M_2=40.5 marks, after arranging the marks in English and Hindi, respectively, in ascending order. Hence, level of knowledge is higher in English).

24. The following marks have been obtained in three papers of Statistics in an examination by 12 students. In which paper is the general level of the knowledge of the students highest ? Give reasons.

A—36, 56, 41, 46, 54, 59, 55, 51, 52, 44, 37, 59
B—58, 54, 21, 51, 59, 46, 65, 31, 68, 41, 70, 36
C—65, 55, 26, 40, 30, 74, 45, 29, 85, 32, 80, 39

(एम० ए०, पंजाब, १९५३)

(*M_1=51.5 marks, M_2=52.5 and M_3=42.5 marks. Hence, the general level of knowledge is the highest in Paper B*).

25. Find the *Mode*, the *Median*, and the *Quartiles* of the following series :—

Size		Frequency	Size		Frequency
4	...	40	12	...	50
5	...	48	13	...	52
6	...	52	14	...	41
7	...	56	15	...	57
8	...	60	16	...	63
9	...	63	17	...	52
10	...	57	18	...	48
11	...	55	19	...	40

(बी० कॉम०, बनारस, १९४५)

(*Z=9 units, M=11 units, Q_1=8 units and Q_3=15 units*).

26. The numbers of fully formed tomatoes on 100 plants were counted, with the following results :—

2	plants	had	0	tomatoes
5	,,	,,	1	,,
7	,,	,,	2	,,
11	,,	,,	3	,,
18	,,	,,	4	,,
24	,,	,,	5	,,

12	plants	had	6	tomatoes
8	"	"	7	"
6	"	"	8	"
4	"	"	9	"
3	"	"	10	"

(i) How many tomatoes were there in all ?
(ii) What was the average number of tomatoes per plant ?
(iii) What was the mode or modal number of tomatoes ?
(iv) Draw the corresponding Histogram.

(*Hyman Levy and E. E. Preidel*)

(*Number=486, a=4.86 tomatoes and Z=5 tomatoes*)

27. The marks (out of a maximum of 100) obtained by candidates in an examination are shown in the following frequency table. Calculate the Arithmetic Average and the Mode :

Marks		Number of candidates
17.5—22.5	...	2
22.5—27.5	...	8
27.5—32.5	...	33
32.5—37.5	...	80
37.5—42.5	...	170
42.5—47.5	...	243
47.5—52.5	...	213
52.5—57.5	...	145
57.5—62.5	...	67
62.5—67.5	...	35
67.5—72.5	...	4

(बी० कॉम०, आगरा, १९५४)

(*a=46.965 marks and Z=46.04 marks*).

28. From the figures given below find the mode, median and quartiles ? What information could you deduce from them ?

Age		*No. of persons*	*Age*		*No. of persons*
20—25	...	50	40—45	...	150
25—30	...	70	45—50	...	120
30—35	...	100	50—55	...	70
35—40	...	180	55—60	...	59

(बी० कॉम०, आगरा, १९५४)

(*Z*=*38.6 years*, *M*=*40.0 years*, Q_1=*34 years and* Q_3=*47.1* years)

29. Calculate the arithmetic mean of the following distribution :—

Profit per shop		No. of shops
0—10	...	12
10—20	...	18
20—30	...	27
30—40	...	20
40—50	...	17
50—60	...	6

Find also graphically the value of median.

(बी० कॉम०, बम्बई, १९४८)

(*a*=*Rs. 28.0 and M*=*Rs. 27.6*)

30. Calculate the arithmetic average and the median from the following data :—

Age		No. of people
55—60	...	7
50—55	...	13
45—50	...	15
40—45	...	20
35—40	...	30
30—35	...	33
25—30	...	28
20—25	...	14
Total ...		160

(बी० कॉम०, लखनऊ, १९५१)

(*a*=*37.06 and M*=*35.92 years, after reversing the Series*)

31. Under what assumptions is mode located in a frequency distribution ? Compute the mode of the following distribution

Size of item		Frequency
4—8	...	10
8—12	...	12
12—16	...	16
16—20	...	14
20—24	...	10
24—28	...	8
28—32	...	17
32—36	...	5
36—40	...	4

(बी० कॉम०, इलाहाबाद, १९४७)

(Z=*14.67 units*)

32. Find the modal wage from the following data :—

Weekly wage		No. of Earners
Sh. d. Sh. d.		
12 6 to 17 6	...	4
17 6 to 22 6	...	44
22 6 to 27 6	...	38
27 6 to 32 6	...	28
32 6 to 37 6	...	6
37 6 to 42 6	...	8
42 6 to 47 6	...	12
47 6 to 52 6	...	2
52 6 to 57 6	...	2

(बी० कॉम०, राजपूताना, १९४९)

(Z=*25.1 shillings, after amending the class-intrvals as 12.5—22.5 and so on, othrwise ill-defined*)

33. Find the Median, Lower Quartile, 7th Decile and 85th Percentile of the frequency distribution given below :—

MARKS IN STATISTICS

Marks-group		No. of Students
Under 10	...	8
10—20	...	12
20—30	...	20
30—40	...	32
40—50	...	30
50—60	...	28
60—70	...	12
70 and above	...	4

(बी० कॉम०, इलाहाबाद, १९४९)

(M=40.5 marks, Q_1=28.375 marks, D_7=50.32 marks P_{85}=58.2 marks)

34. Make a frequency table having grades of wages with class-intervals of *two annas* each from the following data of daily wages received by 30 labourers in a certain factory, and then compute the average daily wages paid to a labourer :—

DAILY WAGES IN ANNAS

14, 16, 16, 14, 22, 13, 15, 24, 12, 23,
14, 20, 17, 21, 18, 18, 19, 20, 17, 16,
15, 11, 12, 21, 20, 17, 18, 19, 22, 23,

(बी० ए०, पंजाब, १९४५)

(Take the first class interval as (11-13). a=Re. 1/2/-)

35. The frequency distribution below gives the cost of production of sugarcane in different holdings. Obtain the Arithmetic Mean.

Cost		Frequency	Cost		Frequency
2—6	...	1	18—	...	52
6—	...	9	22—	...	36
10—	...	21	26—	...	19
14—	...	47	30—34	...	3

(a=19.21 units).

36. Draw a cumulative frequency graph of the following distribution showing the monthly wages of a group of workmen, and hence or otherwise, calculate the values of (*a*) the mode, (*b*) the median, and (*c*) the two quartiles :—

Wages in Rs.	20—	21—	22—	23—	24—	25—	26—	27—	28—29
Workmen	8	10	11	16	20	25	15	9	6

(एम० ए०, राजपूताना, १९५०)

(*Z=Rs. 25.3, M=Rs. 24.775,* Q_1*=Rs. 23.08 and* Q_3*= Rs.26.05*)

37. The following is the age distribution of candidates appearing at the Matriculation and Intermediate Arts Examinations of the Patna University in 1937 :—

Age in years	12–	13—	14—	15—	16—	17—	18—	19—	20—	21—	22–	Total
Matri-culation	5	48	189	303	522	980	981	794	515	474	—	4811
Inter-mediate	—	—	—	5	45	87	127	150	155	127	175	871

Compare the median and modal ages of the candidates.

(एम० ए०, पटना, १९४०)

(MATRICULATION : *M=18.37 years and Z=18.01 years,*
INTERMEDIATE : *M=20.14 years and Z=20.15 years*)

38. Calculate the mode and the arithmetic average from the following series, and account for the difference, if any :—

Size of the item		Frequency
6—10	...	20
11—15	...	30
16—20	...	50

21—25	...	40
26—30	...	10

(बी० कॉम०, बनारस, १९५८)

(Z=18.8 units and a=17.67 units, after amending the class-intervals as (5.5—10.5) and so on)

39. From the table given below, find the mean and the median :—

Marks		No. of candidates
1—5	...	7
6—10	...	10
11—15	...	16
16—20	...	32
21—25	...	24
26—30	...	18
31—35	...	10
36—40	...	5
41—45	...	1

(बी० कॉम०, आगरा, १९५१)

(a=20.36 marks and Z=18.8 marks, after amending the class-intervals as (0.5—5.5) and so on)

40. Find the arithmetic average, median and the quartiles from the following distribution of 100 persons by age :—

Age last birth-day		Number
15—19	...	4
20—24	...	20
25—29	...	38
30—34	...	24
35—39	...	10
40—44	...	4

(एम० ए०, इलाहाबाद, १९५४)

(a=28.4 years, M=27.9 years, Q_1=24.66 years and Q_3=32.52 years)

41. The following table gives the number of persons with different incomes in the U. S. A. during the year 1929 :—

Income in thousands of $		No. of persons in Lakhs
Under 1	...	13
1—2	...	90
2—3	...	81
3—5	...	117
5—10	...	66
10—25	...	27
25—50	...	6
50—100	...	2
100—1000	...	2

Calculate the average income per head.

(बी० कॉम०, लखनऊ, १९३९)

(a=8.06 thousands of $)

42. Find the median, quartiles, 8th Decile and 56th Percentile for the following distribution :—

Class Intervals		*Frequencies*	*Class Intervals*		*Frequencies*
1—2.99	...	6	9—10.99	...	21
3—4.99	...	53	11—12.99	...	16
5—6.99	...	85	13—14.99	...	4
7—8.99	...	56	15—16.99	...	4

(*M=6.501, Q_1=5.055, Q_3=8.4, D_8=8.895 and P_{56}=6.8, taking the first clss-interval as 0.995—2.995*)

43. Define the Mean, the Median and the Mode. Find their values in the case of the heights of trees in a garden whose frequency distribution is given in the following table :—

Heights		Frequencies
Under 7 feet	...	26
„ 14 „	...	57
„ 21 „	...	92
„ 28 „	...	134
„ 35 „	...	216
„ 42 „	...	287
„ 49 „	...	341
„ 56 „	...	360

(एम० ए०, आगरा, १९४७)

(a=30 feet 1 inch, Z=33 feet 6 inches, M=31 feet 11 inches. It is a 'Below Table')

44. Find the average marks of a student from the following table :—

Marks		Number of students
Below 80	...	240
„ 70	...	190
„ 60	...	125
„ 50	...	95
„ 40	...	75
„ 30	...	60
„ 20	...	40
„ 10	...	25

(बी० कॉम०, बनारस, १९५४)

(The series will be reversed. a=49.58 marks)

45. Find out the Median and the Mode from the following table :—

No. of days absent		Numbers
Less than 5	...	29
„ „ 10	...	224
„ „ 15	...	465
„ „ 20	...	582

Less than 25	...	634
„ „ 30	...	644
„ „ 35	...	650
„ „ 40	...	653
„ „ 45	...	655

(बी० कॉम०, लखनऊ, १९५७)

(*M=12.2 days and Z= 11.35 days*)

46. The following table gives the marks obtained by 56 students in Statistics in a certain examination :—

EXAMINATION MARKS		NO. OF STUDENTS
More than 70%	...	7
„ „ 60%	...	18
„ „ 50%	...	40
„ „ 40%	...	40
„ „ 30%	...	63
„ „ 20%	...	65

Calculate the median of the above series.

(*M=53.6% marks*)

47. Recast the following cumulative table into the form of an ordinary frequency distribution and determine the value of mode by using the formula : Mean—Mode=3(Mean—Median)

No. of days absent		No. of students
Less than 5	...	29
„ 10	...	224
„ 15	...	465
„ 20	...	582
„ 25	...	634
„ 30	...	644
„ 35	...	650
„ 40	...	653
„ 45	...	655

(बी० कॉम०, बम्बई, १९४६)

(In order to employ this formula, find out the values of 'a' and 'M' which are 12.9 days and 12.2 days, respectively. Hence, Z=10.8 days. By usual formula Z=11.35 days)

48. From the following table calculate mean and median. By graph verify the median.

CROP-CUTTING EXPERIMENT DATA ON PLOT YIELDS OF WHEAT

Yields in lb.		No. of Plots	Yields in lb.		No. of Plots
Over 0	...	216	Over 300	...	31
„ 60	...	210	„ 360	...	13
„ 120	...	156	„ 420	...	7
„ 180	...	98			
„ 240	...	57			

(बी० कॉम०, सागर, १९५८)

(a=188.9 lb. and M=170.2 lb.)

49. Compute the average wage for the following frequency distribution of wages :—

Central wage ...	Rs. 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55
Wage-earners	Rs. 2, 22, 19, 14, 3, 4, 6, 1, 1

(Classify the wages as (12.5—17.5), (17.5—22.5)......, and then apply the formula. a=Rs. 27.85)

50. Frequency distribution of marks, obtained by a class of students, shows the following :—

Marks		Number of students
0—30	...	10
30—40	...	15
40—50	...	30
50—60	...	32
60—70	...	8
70—100	...	5

(a) Find the median by drawing the Ogive Curve.

(*b*) Check up the value of the median so found by using the standard formula for finding the median.

(बी० कॉम०, बनारस, १९४७)

(M=*48·5 marks*)

51. The following distribution gives the egg-production during a year at a poultry farm :—

No. of eggs		No. of hens
0—29	...	3
30—59	...	4
60—89	...	12
90—119	...	33
120—149	...	69
150—179	...	92
180—209	...	50
210—239	...	25
240—269	...	11
270—299	...	1

Prepare from the above a cumulative frequency distribution.

From the graph find the value of the first quartile and 82nd percentile.

(Q_1=*129·6 or 130 eggs and* P_{82}=*199·79 or 200 eggs*)

52. Define the 'Ogive' of a frequency distribution.

Draw the Ogive of the following data giving the percentage of persons of different ages employed in a factory :—

Age	Percentage	Age	Percentage
16—20	3·6	41—45	10·7
21—25	9·8	46—50	9·1
26—30	27·4	51—55	5·1
31—35	20·4	56—60	0·6
36—40	13·3		

Read from the diagram, the median age and the two quartile ages. Verify by calculation.

($M=32\cdot88$, $Q_1=27\cdot66$ *and* $Q_3=41\cdot1$ *years*)

53. The frequency distribution of cost of production of Gur in rupees per maund for different holdings in two districts is given below. Find the average cost in each district, and test whether there is any difference.

Cost in rupees per maund		District A	District B
2—3	...	9	1
3—4	...	32	10
4—5	...	37	34
5—6	...	21	23
6—7	...	13	21
7—8	...	7	14
8—9	...	5	10
9—10	...	2	9
10—11	...	1	5
11—12	...	2	2
12—13	...	1	1
Total		130	130

(आई० सी० एस०, १९३९)

(a_1=*Rs.* $5\cdot08$ *and* a_2=*Rs.* $6\cdot28$. *Difference=Rs.* $1\cdot20$)

54. The following table gives the male population of Kanpur and Jaipur in 1931 :—

Age-group (Years)		Population of males in thousands: Kanpur	Jaipur
0—5	...	14	9
5—10	...	13	8
10—15	...	13	8
15—20	...	13	7

20—30	...	33	15
30—40	...	29	12
40—50	...	17	9
50—60	...	7	6
60—80	...	4	4

(बी० कॉम०, इलाहाबाद, १९५२)

Calculate the average age of males at Kanpur and Jaipur separately, and account for the difference, if any.

(a_1=26.5 years and a_2=27.1 years. Difference =0.6 years)

55. The following table gives the distribution of the male and female population of a certain area in India. By finding the median age, and the, upper and lower quartile ages, comment on the age distribution of the two sexes in the area :—

Age-group		Male	Female
0—9	...	2,756	2,787
10—19	...	2,124	2,032
20—29	...	1,677	1,724
30—39	...	1,481	1,485
40—49	...	1,021	1,022
50—59	...	610	579
60—69	...	245	269
70—79	...	67	78
80—89	...	16	20
90—99	...	3	4
	Total	10,000	10,000

(आई० सी० एस०, १९३८)

(MALES : *M=20.22 years, Q_1=8.62 years and Q_3= 35.87 years*

FEMALES : *M=20.55 years, Q_1=8.52 years and Q_3= 35.95 years)*

56. What is a Weighted Average? Why and how are weights given?

Determine which of the town *A* or *B* is more healthy?

	A		*B*		
Age	Population	Deaths	Age	Population	Deaths
0—15	15,000	360	0—15	20,000	500
15—50	20,000	400	15—50	52,000	1,040
Above 50	5,000	140	Above 50	8,000	240
	40,000	900		80,000	1,780

(बी० कॉम०, आगरा, १९४९)

(*General Death Rate of Town A=22.5, General Death Rate of Town B=22.25, Standardized Death Rate of Town B=23.125. A town is healthier than B*)

57. Define 'Standard Death Rate' and explain how it is calculated.

What conclusions do you draw from the following data relating to the age constitution and death rates at different ages of a population *A*, regarded as standard, and another population *B*.

Age—Years	0—5	5—15	16—65	65 & over	Total
Standard population A					
Age constitution	75	250	600	75	1000
Death rate per 1000	25	5	7	65	—
Population B					
Age constitution	50	260	630	60	1000
Death rate per 1000	30	6	8	70	—

(General Death Rate of Population A =12.2, General Death Rate of Population B =12.3; Standardized Death Rate of Population B=13.8. Hence, Population A is healtheir than B)

58. The mortality data for two towns *A* and *B* are given below. Which of them would you consider to be more healthy and why ?

Age	POPULATION A (Standard)		POPULATION B (Local)	
	Population	Deaths	Population	Deaths
0—5	8,000	185	2,500	65
5—40	25,000	125	13,000	78
40—75	60,000	420	31,500	252
Over 75	7,000	480	3,000	210
	1,00,000	1,210	50,000	605

(Crude Death Rates for both the populations=12.1. The Standardized Death Rate for the population B taking A as the standard=13.28. Therefore, population A is more healthy than B)

59. Fifty items sold in Department *A* of the Corner Store had a mean price of 30 cents. Seventy-five items sold in Department *H* had a mean price of 20 cents. The mean price of commodities sold in Departments *A* and *H* was 24 cents. Right ?

(W. A. Neiswanger)

(Yes. Find out Combined Mean)

60. If x_1 and x_2 are two positive values of a variate, prove that their geometric mean is equal to the geometric mean of their arithmetic and harmonic means.

(J. F. Kenney and E. S. Keeping)

अध्याय १०

अपकिरण और विषमता

(Dispersion and Skewness)

(द्विघातीय मध्यकों के उपयोग—अपकिरण—अपकिरण ज्ञात करने की रीतियाँ—सीमा रीति—विस्तार—विस्तार के लाभ—विस्तार के दोष—चतुर्थांशान्तर विस्तार—विचलन मध्यक रीति—चतुर्थांश विचलन—चतुर्थांश विचलन के लाभ—चतुर्थांश विचलन के दोष—मध्यक विचलन—मध्यक विचलन निकालने की ऋजु व लघु रीतियाँ—मध्यक विचलन के लाभ—मध्यक विचलन के दोष—प्रमाप विचलन—प्रमाप विचलन निकालने की ऋजु व लघु रीतियाँ—सामूहिक प्रमाप विचलन—प्रमाप विचलन पर आधारित अन्य माप—प्रमाप विचलन की विशेषतायें—अपकिरण की मापों का पारस्परिक सम्बन्ध—सामान्य वक्र—सामान्य वक्र का सांख्यिकी में महत्व—विषमता—विषमता निकालने की रीतियाँ—विषमता का महत्व—पृथु-शीर्षत्व—प्रश्न)

द्विघातीय मध्यकों के उपयोग

(Use of the Averages of the Second Order)

मध्यक, गुणोत्तर मध्यक, हरात्मक मध्यक, मध्यका और भूयिष्ठक, आदि, जिनका अध्ययन पिछले अध्याय में किया जा चुका है किसी समंक माला के वास्तविक मूल्यों पर ही आधारित रहते हैं। अतः उन्हें प्रथम घातीय मध्यक (Averages of the First Order) कहते हैं। ये मध्यक किसी समंक माला के मध्य विन्दु या उसकी केन्द्रीय प्रवृत्ति (Central Tendency) की ओर तो ध्यान दिलाते हैं, किन्तु उस माला या श्रेणी की बनावट पर कोई प्रकाश नहीं डालते। उनकी सहायता से यह बतलाना कठिन है कि समंकों के मूल्यों में कितनी अस्थिरता (Variability) है, तथा उनका मध्य-मूल्यों से कितना विचलन (Deviation) है। इन विशेष बातों की जानकारी प्राप्त करने के लिये उनके विचलनों के आधार पर पुनः मध्यकों की गणना की जाती है। इन्हीं मध्यकों को द्विघातीय मध्यक (Averages of the Second Order) कहते हैं। अपकिरण तथा विषमता, आदि के अध्ययन के लिये द्विघातीय मध्यकों की ही सहायता लेनी पड़ती है।

सभी आवृत्ति-वितरण (Frequency Distribution) समान होते हुये भी मुख्यत: दो बातों में भिन्न हो सकते हैं :—

(१) उनके मध्यक भिन्न हों फिर भी उनकी बनावट समान हो;

(२) उनके मध्यक समान हों किन्तु उनकी बनावट में अत्यधिक अन्तर हो।

इन दोनों स्थितियों के उदाहरण देखिये :—

Condition I

Year	Profit of *X* Co., Rs.	Profit of *Y* Co., Rs.
1950	15,000	9,000
1951	16,000	10,000
1952	17,000	11,000
1953	18,000	12,000
1954	19,000	13,000
$n=5$	85,000	55,000

Condition II

Year	Profit of *X* Co., Rs.	Profit of *Y* Co., Rs.
1950	12,000	20,000
1951	13,000	20,000
1952	14,000	10,000
1953	15,000	10,000
1954	16,000	10,000
$n=5$	70,000	70,000

Average Profits

Condition I

X Co.,	Rs. 17,000
Y Co.,	Rs. 11,000

Condition II

X Co.,	Rs. 14,000
Y Co.,	Rs. 14,000

पहली स्थिति में यद्यपि दोनों समंक मालाओं के मध्यक भिन्न-भिन्न हैं किन्तु संख्यात्मक आकृतियों की बनावट एक सी है। दूसरी स्थिति में मध्यक तो समान हैं किन्तु समंकमाला की आकृतियों में बहुत अन्तर है। यदि हम यह कहें कि प्रथम स्थिति में X Co., अधिक लाभ कर रही है अथवा दूसरी स्थिति में दोनों कंपनियाँ एक ही स्तर की हैं, तो यह कथन अत्यन्त भ्रांतिपूर्ण होगा। प्रथम स्थिति में X Co., का मध्यक Y Co., से अधिक तो अवश्य है, किन्तु दोनों कंपनियों में समान रूप से लाभ हो रहा है। यह कोई आवश्यक नहीं कि कोई विनियोग करने वाला X Co., में ही विनियोग करे। दूसरी स्थिति में दोनों कंपनियों के मध्यक समान हैं, किन्तु लाभ की प्रकृति ध्यान देने योग्य है। X Co., निरन्तर लाभ करती जा रही है, जब कि Y Co., के लाभ में स्थिरता आ गई है और लाभ बढ़ने की आशा अल्प है। Y Co., में ऐसी

स्थिति का अध्ययन कर के कोई विनियोग नहीं कर सकता। अतः यह स्पष्ट है कि केवल मध्यकों की सहायता से हम समंक मालाओं का पूरी तरह अध्ययन नहीं कर सकते। इसके लिये द्विघातीय मध्यकों को ज्ञात करना आवश्यक है।

अपकिरण (Dispersion)

किसी समंक माला की विभिन्न आकृतियों का उसके मध्यक से कितना विचलन है तथा वह मध्यक समंक माला का सच्चा प्रतिनिधि है अथवा नहीं, इसका अध्ययन करने वाला मूल्य सांख्यिकी में अपकिरण (Dispersion) कहलाता है। अपकिरण का प्रयोग मुख्यतः दो अर्थों में किया जाता है :—

(क) प्रथम अर्थ यह है कि समंक माला की विभिन्न अकृतियों की बनावट में अन्तर है।

(ख) द्वितीय अर्थ यह है कि समंक माला की विभिन्न आकृतियाँ उसके मध्यक से समान दूरी पर नहीं हैं, अर्थात् उनमें विचलन है।

अपकिरण ज्ञात करने की रीतियाँ
(Methods of calculating Dispersion)

इन्हीं दो अर्थों को स्पष्ट करने के लिये अपकिरण ज्ञात करने की दो रीतियाँ हैं :—

(१) सीमा-रीति (Method of Limits)

(२) विचलन-मध्यक रीति (Method of Averaging Deviations)

इन रीतियों के अन्तर्गत निम्नलिखित मापों का निरपेक्ष (Absolute) तथा सापेक्ष (Relative) रूप से अध्ययन किया जाता है :—

(१) सीमा-रीति (Method of Limits) :—

(अ) विस्तार (Range) जिसके लिये चिन्ह (*R*) का प्रयोग होता है।

(ब) चतुर्थांशान्तर विस्तार (Interquartile Range) जिसके लिये चिन्ह (*I.R*) का प्रयोग होता है।

(२) विचलन-मध्यक रीति (Method of Averaging Deviations)

(अ) चतुर्थांश विचलन (Quartile Deviation or Semi-Interquartile Range) जिसके लिये (*Q.D*) का प्रयोग होता है।

(व) मध्यक विचलन (Mean Deviation) जिसके लिये चिन्ह (δ)* का प्रयोग होता है।

(क) मध्यक से (from Average)—चिन्ह (δ)

(ख) मध्यका से (from Median)—चिन्ह (δm)

(ग) भूयिष्ठक से (from Mode)—चिन्ह (δz)

(स) प्रमाप विचलन (Standard Deviation) जिसके लिये चिन्ह (σ)† का प्रयोग होता है।

अपकिरण ज्ञात करने के लिये एक विन्दु-रेखीय (Graphical) रीति भी काम में लाई जाती है। इस रीति के अनुसार समंक माला की आकृतियों के आधार पर एक वक्र का निर्माण किया जाता है, जिसे लॉरेंज वक्र (Lorenz Curve) कहते हैं।

सीमा-रीति (Method of Limits)

विस्तार (Range)

किसी समंक माला के सबसे बड़े और सबसे छोटे चल-मूल्यों के अन्तर को विस्तार (Range) कहते हैं।

अतः विस्तार द्वारा समंक माला की आकृतियों की बनावट को मापने की रीति अत्यन्त सुगम है। विस्तार ज्ञात करने की रीति निम्नलिखित उदाहरण से स्पष्ट हो जायगी :—

$$R = (\text{Largest Value} - \text{Smallest Value})$$

Illustration 1 :—

Given the production of wheat in thousands of tons in a State :—

Year			Production of Wheat
1940	...	...	240
1944	...	...	260
1948	...	...	272
1952	...	...	365
1954	...	...	299

Find out the Range and its Coefficient.

*यह चिन्ह Small Greek Delta कहलाता है।

†यह चिन्ह Small Greek Sigma कहलाता है।

Solution :—

$$R = (\text{Largest Value} - \text{Smallest Value})$$
$$= (365 - 240)$$
$$= 125 \text{ thousands of tons}$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि उत्पादन के विभिन्न मूल्यों में अधिक से अधिक 125 हजार टन का विचलन है।

विस्तार-मूल्य जो अभी ज्ञात किया गया है, एक निरपेक्ष माप(Absolute Measure) है। किन्तु किसी समस्या का तुलनात्मक अध्ययन करने के लिये निरपेक्ष माप उपयोगी नहीं होता, जब तक उसे सापेक्ष माप (Relative Measure) में परिणित न कर लिया जाय। विस्तार-मूल्य को सापेक्षिक बनाने के लिये उसमें सबसे बड़े और सबसे छोटे मूल्यों के योग से भाग दे दिया जाता है। इस प्रकार जो परिणाम प्राप्त होता है उसे विस्तार-गुणक (Coefficient of Range) कहते हैं। चूँकि यह एक गुणक (Coefficient) है, अतः इसे अन्य मूल्यों की भाँति किसी इकाई (Units) में व्यक्त नहीं किया जाता है। यह हमेशा एक से कम होगा।

ऊपर दिये गये प्रश्न में विस्तार-गुणक इस प्रकार निकलेगा :—

$$\textit{Coefficient of Range} = \frac{\text{Largest Value} - \text{Smallest Value}}{\text{Largest Value} + \text{Smallest Value}}$$
$$= \frac{365 - 240}{365 + 240}$$
$$= 0.207$$

विस्तार के लाभ (Merits of Range)

विस्तार द्वारा किसी समंक माला की बनावट, अर्थात् समंकों के पारस्परिक विचलन पर बड़ी सुगमता पूर्वक प्रकाश डाला जा सकता है। इसको ज्ञात करने की रीति बड़ी सरल है। इसका प्रयोग उत्पादित वस्तुओं की गुण-नियंत्रण (Quality Control) सम्बन्धी समस्याओं में सफलतापूर्वक किया जाता है। आँकड़ों के उच्चावचन (Fluctuations) का अध्ययन करते समय भी इसका प्रयोग किया जाता है।

विस्तार के दोष (Demerits of Range)

यद्यपि विस्तार को ज्ञात करने की रीति अत्यन्त सुगम है, फिर भी इसके द्वारा विचलन का अध्ययन करने के अनेक दोष हैं। यह माप केवल समंक-माला के सबसे बड़े और सबसे छोटे मूल्यों पर आधारित है, अतः माला के अन्तर्गत आने वाले दूसरे अन्य मूल्यों का कोई महत्व नहीं रह जाता। इसके विपरीत सांख्यिकी में चरम-मूल्यों (Extreme Values) को साधारणतः कम महत्व दिया जाता है। इनके कारण विस्तार में तो बड़ा अन्तर हो सकता है किन्तु माला का महत्व वही रह सकता है। विस्तार का दूसरा दोष यह है कि यह सम्पूर्ण आवृत्ति-वितरण (Frequency Distribution) की विशेषताओं पर कोई प्रकाश नहीं डालता। ऐसा हो सकता है कि दो श्रेणियों का विस्तार एक ही हो, किन्तु उनके आवृत्ति वितरण भिन्न-भिन्न हों।

चतुर्थांशान्तर विस्तार (Interquartile Range)

चतुर्थांशान्तर विस्तार प्रथम चतुर्थांश (First Quartile) और तृतीय चतुर्थांश (Third Quartile) का अन्तर है। विस्तार (Range) की ही भाँति यह माप भी केवल दो मूल्यों का अन्तर है, किन्तु एक बात में यह विस्तार से श्रेष्ठ माप कहा जा सकता है। विस्तार किसी समंक माला के केवल सबसे बड़े और सबसे छोटे मूल्यों के आधार पर निकाला जाता है; चतुर्थांशान्तर विस्तार समंक माला के मध्य में आने वाले केवल 50% मूल्यों पर ही निर्भर रहता है, इसलिये चरम-मूल्यों (Extreme Values) की अनिश्चितताओं का इस पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता, जो विस्तार का सबसे बड़ा दोष है। फिर भी इसे विचलन का आदर्श माप नहीं कहा जा सकता क्योंकि यह केवल समंक माला के मध्य वाले 50% भाग का तो अध्ययन करता है, किन्तु चतुर्थांशों के ऊपर वाले 25% तथा नीचे वाले 25% भागों को छोड़ देता है। दूसरा दोष यह भी है कि इसके द्वारा आवृत्ति वितरण का कोई उच्चतर अध्ययन नहीं हो पाता।

विचलन मध्यक रीति (Methods of Averaging Deviations)

चतुर्थांश विचलन
(Quartile Deviation or Semi-Interquartile Range)

चतुर्थांश विचलन चतुर्थांशान्तर विस्तार का आधा होता है, अर्थात् प्रथम

चतुर्थांश और तृतीय चतुर्थांश के अन्तर को यदि दो से भाग दिया जाय, तो चतुर्थांश विचलन का मूल्य प्राप्त होगा। अतः इसका सूत्र है :—

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

Illustration 2 :—

Calculate the Quartile Deviation from the data given below :—

(x)	20	25	30	35	40	45	50
(f)	7	12	14	19	10	8	3

Solution :—

CALCULATION OF QUARTILE DEVIATION

(x)	(f)	(cf)
20	7	7
25	12	19
30	14	33
35	19	52
40	10	62
45	8	70
50	3	73

Q_1 = Size of $\left\{\frac{N+1}{4}\right\}$ th item, Q_3 = Size of $\left\{\frac{3(N+1)}{4}\right\}$ th item

= Size of $\left\{\frac{73+1}{4}\right\}$ th item = Size of $\left\{\frac{3(73+1)}{4}\right\}$ th item

= Size of 18.5th item = Size of 55.5th item

= 25 units = 40 units

अतः $Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$= \frac{40-25}{2}$

$= 7.5$ units

चतुर्थांश विचलन से हमारा क्या अभिप्राय है यह भी समझ लेना आवश्यक है। यदि समंक माला संमित (Symmetrical) है, तो प्रथम चतुर्थांश में चतुर्थांश विचलन जोड़ देने पर $(Q_1+Q.D.)$, अथवा तृतीय चतुर्थांश में से चतुर्थांश विचलन घटा देने पर $(Q_3-Q.D.)$, मध्यका (Median) निकल आनी चाहिये, अन्यथा अन्तर जितना ही अधिक होगा उतना ही अधिक विचलन समंक माला में होना निश्चित है। इस माप के अनुसार प्रश्न में दी गई समंक माला की मध्यका का मूल्य $(25+7.5)$ अथवा $(40-7.5)$ अर्थात् 32.5 units होना चाहिये। किन्तु मध्यका को ज्ञात करने वाले सूत्र के अनुसार—

$$M = \text{Size of } \left\{\frac{N+1}{2}\right\} \text{th item}$$

$$= \text{Size of } \left\{\frac{73+1}{2}\right\} \text{th item}$$

$$= \text{Size of 37th item}$$

$$= 35 \text{ units}$$

अतः यह स्पष्ट हो जाता है कि समंक माला के मूल्यों में थोड़ा विचलन है, वह पूर्णतया संमित (Symmetrical) नहीं है।

चतुर्थांश विचलन भी विस्तार की ही भांति एक निरपेक्ष (Absolute) माप है। अतः तुलनात्मक अध्ययन के उद्देश्य से इसका सापेक्ष माप निकालने के लिये चतुर्थांश विचलन गुणक (Coefficient of Quartile Deviation or Coefficient of Semi-Interquartile Range) निकालना पड़ता है। इसको निकालने के लिये उसमें दोनों चतुर्थांशों के मध्यक $\left\{\frac{Q_3+Q_1}{2}\right\}$ से भाग देना पड़ता है। अतः इसका सूत्र है :—

$$\textit{Coefficient of Quartile Deviation} = \frac{Q_3-Q_1}{2} \div \frac{Q_3+Q_1}{2}$$

$$= \frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1}$$

ऊपर के उदाहरण में दिये गये प्रश्न का चतुर्थांश विचलन गुणक इस प्रकार निकाला जायगा—

$$\text{Coefficient of Quartile Deviation} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

$$= \frac{40-25}{40+25}$$

$$= 0.23$$

चतुर्थांश विचलन के लाभ (Merits of Quartile Deviation)

चतुर्थांश विचलन का सबसे बड़ा लाभ यह है कि इसकी गणना बड़ी आसानी से की जा सकती है तथा इसका प्रयोग सर्वसाधारण की समझ में आ सकता है। यदि किसी समंक माला के मध्य भाग का ही केवल अध्ययन करना है, तो इसका प्रयोग लाभप्रद है।

चतुर्थांश विचलन के दोष (Demerits of Quartile Deviation)

चतुर्थांश विचलन का सबसे पहला दोष यह है कि उसके द्वारा समंक माला के चरम मूल्यों पर कोई प्रकाश नहीं पड़ता। कुछ ऐसी स्थितियाँ भी हो सकती हैं जब चतुर्थांशों के मूल्य समान हों, और जिसके कारण उनके चतुर्थांश विचलन भी समान हों किन्तु समंक माला के मध्य की बनावट में अन्तर हो। इस माप के द्वारा न्यादर्श के उच्चावचन (Fluctuations of Sampling) पर कोई प्रकाश नहीं डाला जा सकता। चतुर्थांश विचलन का बीज-गणित में भी सफल प्रयोग नहीं हो सकता। अतः इस माप का प्रयोग संकुचित है और केवल समंक मालाओं के साधारण अध्ययन मात्र के लिये ही किया जा सकता है।

मध्यक विचलन (Mean or Average Deviation)

मध्यक विचलन धन (+) और ऋण (—) को विस्मृत (Ignoring) करते हुये किसी मध्यक (साधारण मध्यक, मध्यका या भूयिष्ठक) से समंक माला के विभिन्न चल-मूल्यों के विचलनों का साधारण मध्यक है। यदि किसी समंक माला का कोई मध्यक निकाल लिया जाय, और फिर उस मध्यक से माला की विभिन्न आकृतियों के विचलनों का योग करके उसमें आकृतियों की संख्या से भाग दे दिया जाय, तो जो फल प्राप्त होगा वह मध्यक विचलन होगा। किन्तु जैसा ऊपर कहा गया है विचलनों को निकालते समय धन (+) और ऋण (—) के चिन्हों को छोड़ देना अनिवार्य है। यदि ऐसा

न किया जाय तो संमित (Symmetrical) श्रेणियों में विचलनों का योग शून्य होने के कारण मध्यक विचलन निकालना असम्भव हो जाता है। मध्यक विचलन को प्रथम घात का अपकिरण (First Moment of Dispersion) भी कहते हैं। समंक माला जितनी ही अधिक असंमित (Asymmetrical) होगी मध्यक विचलन उतना ही अधिक होगा, और इसके विपरीत माला जितनी ही अधिक संमित (Symmetrical) होगी, मध्यक विचलन उतना ही कम होगा।

मध्यक विचलन निकालने की रीति
(Method of calculating the Mean Deviation)

मध्यक विचलन मध्यक, मध्यका तथा भूयिष्ठक में से किसी भी माध्य से निकाला जा सकता है, किन्तु मध्यका से निकालना सबसे उचित समझा जाता है क्योंकि मध्यका से निकाले हुये विचलनों का योग सबसे कम होता है, इसलिये मध्यक विचलन भी सबसे कम होगा। नीचे दिये गये उदाहरणों द्वारा मध्यक-विचलन तथा इसके गुणक (Coefficient) को निकालने की रीतिं स्पष्ट हो जायगी :—

साधारण श्रेणी (Individual Series)

साधारण श्रेणी में मध्यक विचलन निकालने के ये सूत्र हैं :—

ऋजु रीति (Direct Method)

(अ) यदि मध्यक विचलन मध्यक से निकालना है, तो

$$\delta = \frac{\Sigma dx}{n}$$

(ब) यदि मध्यक विचलन मध्यका से निकालना है, तो

$$\delta m = \frac{\Sigma dm}{n}$$

(स) यदि मध्यक विचलन भूयिष्ठक से निकालना है, तो

$$\delta z = \frac{\Sigma dz}{n}$$

मध्यक विचलन भी एक निरपेक्ष (Absolute) माप है। इसको सापेक्ष (Relative) माप बनाने के लिये उसमें उस मध्यक से भाग दे दिया जाता है जिससे विचलन निकाले गये हैं। अतः मध्यक विचलन गुणक (Coefficient of Mean Deviation) के सूत्र क्रमशः ये होंगे।

$$(\text{अ})\ \frac{\delta}{a};\quad (\text{ब})\ \frac{\delta m}{M};\quad (\text{स})\ \frac{\delta z}{Z}$$

Illustration 3 :—

Summary of Receipts and Passengers of a certain Motor Bus Co., is given below. Find out the Mean Deviation of Receipts and Passengers, and also calculate their Coefficiants :—

Year		Receipt Rs.	Passengers
1925	...	2,354	50,010
1926	...	2,780	61,060
1927	...	3,011	70,005
1928	...	3,020	70,110
1929	...	3,541	83,001
1930	...	4,150	91,100
1931	...	5,000	1,00,000

Solution :—

COMPUTATION OF THE MEAN DEVIATION OF RECEIPTS AND PASSENGERS

Year	RECEIPTS		PASSENGERS	
	Amount (x_1)	Deviations from Median 3,020* (+ and— signs ignored)(dm_1)	Number (x_2)	Deviations from Median 70,110* (+ and — signs ignored (dm_2)
1925	2,354	666	50,010	20,100
1926	2,780	240	61,060	9,050
1927	3,011	9	70,005	105
1928	3,020	0	70,110	0
1929	3,541	521	83,001	12,891
1930	4,150	1,130	91,100	20,990
1931	5,000	1,980	1,00,000	29,890
$n=7$		$\Sigma dm_1=4,546$		$\Sigma dm_2=93,026$

* चूंकि ये साधारण समंक मालायें हैं, इसलिये इनकी मध्यका निकालने के लिये इन्हें आरोही या अवरोही क्रम में रखना आवश्यक है।

Receipts	Passengers
$\delta m_1 = \frac{\Sigma dm_1}{n}$	$\delta m_2 = \frac{\Sigma dm_2}{n}$
$= \frac{4{,}546}{7}$	$= \frac{93{,}026}{7}$
= Rs. 649	= 13,289 Passengers

इन मध्यक विचलनों के गुणक इस प्रकार निकाले जायेंगे :—

$$C.\ of\ \delta m_1 = \frac{\delta m_1}{M_1} = \frac{649}{3{,}020} = 0.215 \qquad C.\ of\ \delta m_2 = \frac{\delta m_2}{M_2} = \frac{13{,}289}{70{,}110} = 0.189$$

लघु रीति (Short-cut Method)

मध्यक विचलन निकालने की लघ रीति भी है। इसके अनुसार मध्यका से बड़े चल मूल्यों को जोड़ कर उसमें से मध्यका से छोटे चल मूल्यों का योग घटा दिया जाता है, और अन्तर का मध्यक निकाल लिया जाता है। यही फल मध्यक विचलन होता है। अतः इसका सूत्र यह हुआ—

$$\delta m = \frac{(\text{Sum of items} > M - \text{Sum of items} < M\ )}{n}$$

इस रीति से ऊपर के उदाहरण में मध्यक विचलन इस प्रकार निकाले जायेंगे :—

Mean Deviation of Receipts

$$\delta m_1 = \left\{ \frac{(3{,}541+4{,}150+5{,}000) - (2{,}354+2{,}780+3{,}011}{7} \right\}$$

$$= \frac{4{,}546}{7}$$

$$= \text{Rs. } 649$$

Mean Deviation of Passengers

$$\delta m_2 = \left\{ \frac{(83{,}001+91{,}100+1{,}00{,}000)-(50{,}010+61{,}060+70{,}005)}{7} \right\}$$

$$= \frac{93{,}026}{7}$$

$$= 13{,}289 \text{ Passengers}$$

मध्यक विचलन ज्ञात करने की एक और लघु रीति है, जिसका सूत्र निम्नलिखित है :—

$$\delta m = \frac{\Sigma dm + c\,(n_x - n_y)}{n}$$

जिसमें c एक साधारण मध्यक है जो धन (+) और ऋण (−) का ध्यान रखते हुये लिये गये विचलनों के योग को समंकों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है;

n_x मध्यका के मूल्य से छोटे मूल्यों की संख्या है; तथा

n_y मध्यका के मूल्य से बड़े मूल्यों की संख्या है।

ऊपर दिये गये प्रश्न में इस रीति का प्रयोग करते समय यह ध्यान रखना आवश्यक है कि कॉलम (3) और (5) में जो विचलन निकाले गये हैं उनमें (+) और (−) के चिन्हों को छोड़ दिया गया है। प्रस्तुत सूत्र का प्रयोग करते समय (c) का मूल्य निकालने के लिये इन बीजगणितीय चिन्हों का ध्यान रखना आवश्यक होगा। यदि ध्यान पूर्वक देखा जाय तो दोनों मालाओं में 1927 से पहले वाले तीनों विचलन ऋणात्मक तथा उसके बाद वाले तीनों विचलन धनात्मक हैं। अतः (c) का मूल्य इस प्रकार निकाला जायगा :—

$$c_1 = \frac{(-666 - 240 - 9 + 521 + 1{,}130 + 1{,}980)}{7}$$

$$= \frac{+2{,}716}{7}$$

$$= \text{Rs. } 388$$

$$c_2 = \frac{(-20{,}100 - 9{,}050 - 105 + 12{,}891 + 20{,}990 + 29{,}890)}{7}$$

$$= \text{Rs. } 4{,}931$$

दोनों श्रेणियों में पहली तीन आकृतियाँ मध्यका से छोटी और पिछली तीन आकृतियाँ बड़ी हैं। अतः दोनों श्रेणियों में n_x और n_y तीन (3) हैं। अब सूत्र के अनुसार—

Receipts	Passengers
$\delta m_1 = \frac{\Sigma dm_1 + c_1 (n_x - n_y)}{n}$	$\delta m_2 = \frac{\Sigma dm_2 + c_2 (n_x - n_y)}{n}$

$$= \frac{4,546+388(3-3)}{7} \qquad = \frac{93,026+4,931(3-3)}{7}$$

$$= \frac{4,546+0}{7} \qquad = \frac{93,026+0}{7}$$

$= \text{Rs. } 649$ $\qquad$ $= 13,289$ Passengers

विच्छिन्न माला (Discrete Series)

विच्छिन्न माला में मध्यक विचलन निकालने के लिये उपर्युक्त सूत्र में आवश्यक संशोधन करना पड़ता है। यहाँ प्रत्येक विचलन में उसकी सम्बन्धित आवृत्तियों का गुणा करके योगफल में n से भाग देने के बजाय Σf से भाग देना पड़ता है। अतः सूत्र का यह स्वरूप हो जाता है :—

$$\delta m = \frac{\Sigma fdm}{\Sigma f}$$

मध्यक विचलन के गुणक (Coefficient of Mean Deviation) वाले सूत्र में कोई परिवर्तन करने की आवश्यकता नहीं पड़ती।

Illustration 4 :—

Compile a table, showing the frequencies with which words of different number of letters occur in the extract reproduced below (omitting punctuation marks) treating as the variable the number of letters in each word, and obtain the Mean Deviation from Mean and the Median and also their Coefficients.

"*Success in the examination confers no absolute right to appointment, unless Government is satisfied, after such enquiry as may be considered necessary, that the condidate is suitable in all respects for appointment to the public service.*"

Solution :—

इस प्रश्न को हल करने के लिये सर्वप्रथम आवृत्ति तालिका का निर्माण करना पड़ेगा। अतः यह देखना पड़ेगा कि विभिन्न अक्षर वाले कितने शब्द इस पैराग्राफ में दिये गये हैं। विभिन्न अक्षर वाले शब्दों को (x) तथा उनकी संख्या या आवृत्ति को (f) माना जायगा।

Calculation of Mean Deviation from Mean and the Median

Size (x)	Frequency (f)	Cum. Freq. (cf)	Deviations from Median 5 (+ and—signs ignored) (dm)	Product of Col. (2)×(4) (fdm)	Product of Col. (1)×(2) (fx)	Deviations from Mean 5.5 (+ and—signs ignored) (dx)	Product of Col. (2)×(1) (fdx)
2	9	9	3	27	18	3.5	31.5
3	6	15	2	12	18	2.5	15.0
4	2	17	1	2	8	1.5	3.0
5	2	19	0	0	10	0.5	1.0
6	2	21	1	2	12	0.5	1.0
7	4	25	2	8	28	1.5	6.0
8	3	28	3	9	24	2.5	7.5
9	3	31	4	12	27	3.5	10.5
10	2	33	5	10	20	4.5	9.0
11	3	36	6	18	33	5.5	16.5
	$\Sigma f=36$			$\Sigma fdm=100$	$\Sigma fx=198$		$\Sigma fdx=101.0$

$$\textit{Median} = \text{Size of } \left\{\frac{N+1}{2}\right\} \text{th item}$$

$$= \text{Size of } \left\{\frac{36+1}{2}\right\} \text{th item}$$

$$= 5 \text{ Letters}$$

$$\textit{Mean} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{198}{36} = 5.5 \text{ Letters}$$

From Median

$$\delta m = \frac{\Sigma fdm}{\Sigma f} = \frac{100}{36} = 2.78 \text{ Letters}$$

From Mean

$$\delta = \frac{\Sigma fdx}{\Sigma f} = \frac{101}{36} = 2.81 \text{ Letters}$$

$$\textit{Coefficient of } \delta m = \frac{\delta m}{M} = \frac{2.78}{5} = 0.556$$

$$\textit{Coefficient of } \delta = \frac{\delta}{a} = \frac{2.81}{5.5} = 0.511$$

ऊपर बतलाया गया था कि मध्यका से निकाला जाने वाला मध्यक विचलन हमेशा कम होता है। यह इस प्रश्न के हल से स्पष्ट हो जाता है।

Illustration 5 :—

From the following data find out the Mean Deviation by the direct and short-cut methods. Also calculate the Coefficient of Mean Deviation.

No. of Runs	Frequency	No. of Runs	Frequency
61	30	66	70
62	45	67	60
63	65	68	55
64	90	69	45
65	80	70	30

Solution :—

CALCULATION OF MEAN DEVIATION
BY THE SHORT-CUT METHOD

No. of Runs (x)	Frequency (f)	Cumulative Frequency (cf)	Deviation from Median 65, ($\pm$signs ignored) (dm)	Product of *Col.* (2) & (4) (fdm)
61	30	30	4	120
62	45	75	3	135
63	65	140	2	130
64	90	230	1	90
65	80	310	0	0
66	70	380	1	70
67	60	440	2	120
68	55	495	3	165
69	45	540	4	180
70	30	570	5	150
	$\Sigma f=570$			Σfdm $=1,160$

$$\textit{Median} = \text{Size of} \left\{ \frac{N+1}{2} \right\} \text{th item}$$

$$= \text{Size of} \left\{ \frac{570+1}{2} \right\} \text{th item}$$

$$= \text{Size of } 285.5\text{th item}$$

$$= 65 \text{ runs}$$

$$\delta m = \frac{\Sigma fdm}{\Sigma f} = \frac{1{,}160}{570} = 2.04 \text{ runs}$$

$$\text{Coefficient of } \delta m = \frac{\delta m}{M} = \frac{2.04}{65} = .031$$

$$\delta m = \frac{(\textit{Sum of the items} > M - \textit{Sum of the items} < M)}{\Sigma f}$$

$$= \frac{(65 \times 25^* + 66 \times 70 \ldots 70 \times 30) - (65 \times 55^* + 64 \times 90 \ldots + 61 \times 30)}{750}$$

$$= \frac{19{,}210 - 18{,}050}{570}$$

$$= \frac{1{,}160}{570}$$

$$= 2.04$$

अविच्छिन्न माला (Continuonus Series)

अविच्छिन्न माला में मध्यक विचलन निकालने के लिये उन्हीं सूत्रों का प्रयोग किया जाता है जिनका प्रयोग हम अविच्छिन्न माला में कर चुके हैं। अन्तर केवल यही है कि चल मूल्यों के वजाय वर्गों के मध्य विन्दुओं से

---

*मध्यका से बड़े तथा उससे छोटे मूल्यों ($x \times f$) का योग निकालते समय मध्यका संख्या की स्थिति को ध्यानपूर्वक देखना चाहिये। इस उदाहरण में मध्यका संख्या 285.5 है जो 65 मूल्य वाले पद के समक्ष है। संचयी आवृत्ति वाले कॉलम को देखने से विदित होगा कि चौथे पद की आवृत्ति 230 है, अतः इस आवृत्ति के 55 आवृत्ति पश्चात् मध्यका संख्या होगी। पाँचवें पद की कुल आवृत्ति 80 है। इसमें से यदि 55 घटा दिया जाय तो शेष (80—55) अर्थात् 25 आवृत्तियाँ मध्यका संख्या के वाद की हैं।

विचलन निकाल कर तब उनमें आवृत्तियों से गुणा किया जाता है। लघु रीति से मध्यक विचलन निकालने के लिये भी उदाहरण ५ के समान ही क्रिया की जायगी।

मध्यक विचलन के लाभ (Merits of Mean Deviation)

मध्यक विचलन समंक माला के समस्त मूल्यों पर आधारित होने के कारण उसकी बनावट पर पर्याप्त प्रकाश डालता है। यह सभी मूल्यों को उनकी सापेक्ष महत्ता प्रदान करता है। माला के चरम-मूल्यों का इस पर प्रमाप विचलन की अपेक्षा कम प्रभाव पड़ता है। जैसा ऊपर बतलाया गया है, मध्यक विचलन भूयिष्ठक, मध्यक, मध्यका आदि किसी भी माध्य से निकाला जा सकता है किन्तु मध्यका से निकाला गया मध्यक विचलन न्यूनतम होता है। इसकी गणन-क्रिया सरल है।

मध्यक विचलन के दोष (Demerits of Mean Deviation)

मध्यक विचलन का सबसे बड़ा दोष यह है कि यह विचलनों के धन व ऋण चिन्हों का परित्याग करता है। ऐसा इसलिये करना पड़ता है कि संमित मालाओं में मध्यक से लिये गये विचलनों का योग शून्य होता है। गणितीय दृष्टि से इन चिन्हों को छोड़ना अवांछनीय समझा जाता है। अतः इसका प्रयोग बीजगणित में नहीं किया जा सकता।

प्रमाप विचलन (Standard Deviation)

मध्यक विचलन की सबसे बड़ी त्रुटि यह है कि उसमें विचलनों को निकालने के समय धन (+) और ऋण (−) के चिन्हों का परित्याग कर दिया जाता है। यह इसलिये किया जाता है कि विचलनों का योग शून्य न हो जाय। यदि विचलन मध्यक से निकाले जाते हैं, तो ऐसा होना निश्चित है परन्तु जैसा ऊपर बतलाया गया है, बीजगणितीय चिन्हों को छोड़ कर किसी माप की गणना करना अनुचित है।

प्रमाप विचलन मध्यक विचलन से श्रेष्ठ अपकिरण-माप है क्योंकि इसमें (+) और (−) के चिन्हों को छोड़ा नहीं जाता बल्कि गणितीय रीति से वे स्वयं ही समाप्त हो जाते हैं। प्रमाप विचलन किसी समंक माला के मध्यक से उसके विभिन्न चल मूल्यों से लिये गये विचलनों के वर्ग के साधारण मध्यक का वर्गमूल है (The Standard Deviation is the square

root of the arithmetic average of the squared deviations measured from the various values of a Statistical Series)। जब विचलनों का वर्ग कर दिया जाता है, तो ऋण (—) के सभी चिन्ह समाप्त हो जाते हैं और सभी विचलन धन-राशि (+) हो जाते हैं, जिससे उनके योग का शून्य होना असम्भव हो जाता है। किन्तु विचलनों का वर्ग करके फिर उनका साधारण मध्यक निकालने से परिणाम वर्ग इकाई (Squared Units) में आ जाता है। इस कठिनाई को दूर करने के लिये ही इस साधारण मध्यक का वर्गमूल (Square Root) निकाल लिया जाता है।

प्रमाप विचलन निकालने की रीति को ज्ञात करने का श्रेय कार्ल पियर्सन (Karl Pearson) नामक सांख्यिक को दिया जाता है। प्रमाप विचलन द्वितीय घात का अपकिरण (Second Moment of Dispersion) है क्योंकि यह विचलनों के वर्ग पर आधारित है। इसे मध्यक विभ्रम (Mean Error), मध्यक वर्ग विभ्रम (Mean Square Error or Error of Mean Square) अथवा विचलन वर्ग-मध्यक मूल (Root Mean Square Deviation), आदि अन्य संज्ञायें भी दी जाती हैं। वस्तुतः प्रमाप विचलन, विचलन-वर्ग मध्यक-मूल का एक विशेष माप (Standardised Measure of Root Mean Square Deviation) है। विचलन-वर्ग मध्यक-मूल को निकालने की रीति भी वही है किन्तु यह किसी काल्पनिक मूल्य अथवा मध्यका, भूयिष्ठक, मध्यक आदि किसी भी मूल्य से निकाला जा सकता है, जब कि प्रमाप विचलन सर्वदा मध्यक से ही निकाला जाने वाला माप है। मध्यक से विचलन निकाल कर यदि विचलन वर्ग मध्यक मूल (Root Mean Square Deviation) ज्ञात किया जाय तो वह प्रमाप विचलन (Standard Deviation) ही होगा। सांख्यिकों ने इसे प्रमाप (Standard) शब्द की संज्ञा इसलिये दी है कि यह माप सांख्यिकी की अनेक उच्चतर रीतियों में प्रयोग किया जाता है।

प्रमाप विचलन के लिये साधारणतः (σ) चिन्ह का प्रयोग किया जाता है। कुछ बड़ी पुस्तकों में समग्र (Universe) तथा न्यादर्श (Sample) का अध्ययन करते समय यह चिन्ह समग्र के प्रमाप विचलन के लिये, तथा (s) न्यादर्श के प्रमाप विचलन के लिये प्रयुक्त किया गया है। यहाँ हमलोग σ का ही प्रयोग करेंगे।

प्रमाप विचलन निकालने की रीति

(Calculation of Standard Deviation)

साधारण श्रेणी (Individual Series)

साधारण श्रेणी में प्रमाप विचलन निकालने की दो रीतियाँ हैं :—

(अ) ऋजु रीति (Direct Method)

(ब) लघु रीति (Short-cut Method)

ऋजु रीति (Direct Method)

इस रीति से प्रमाप विचलन निकालने के लिये समंक माला के मूल्यों का मध्यक निकाल कर उससे विभिन्न मूल्यों के विचलन निकाल लिये जाते हैं। फिर इन विचलनों के वर्ग निकाल कर उनका योग कर लिया जाता है, और उसमें कुल मूल्यों की संख्या से भाग देकर पुनः मध्यक निकाल लिया जाता है। इस मध्यक का वर्गमूल ही प्रमाप विचलन है। अतः इसका सूत्र होगा :—

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{n}}$$

चतुर्थांश विचलन एवं मध्यक विचलन की ही भाँति प्रमाप विचलन भी अपकिरण की एक निरपेक्ष (Absolute) माप है। इसको सापेक्ष बनाने के लिये इसका भी गुणक (Coefficient) निकाला जाता है। प्रमाप विचलन के गुणक को ज्ञात करने के लिये प्रमाप विचलन में मध्यक का भाग देना पड़ता है। अतः,

$$\text{Coefficient of } \sigma = \frac{\sigma}{a}$$

Illustration 6 :—

Find the Standard Deviation of the heights of 10 University students given as follows :—

Student	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*
Height	64	65	73	70	70	70	69	68	66	75

Also calculate the Coefficient of Standard Deviation.

Solution :—

CALCULATION OF THE STANDARD DEVIATION OF THE HEIGHT OF 10 UNIVERSITY STUDENTS

Student	Height in inches (x)	Deviations from Mean 69 (dx)	Square of Deviations (dx^2)
A	64	−5	25
B	65	−4	16
C	73	+4	16
D	70	+1	1
E	70	+1	1
F	70	+1	1
G	69	0	0
H	68	−1	1
I	66	−3	9
J	75	+6	36
$n=10$	$\Sigma x=690$		$\Sigma dx^2=106$

Arithmetic Average

$$a=\frac{\Sigma x}{n}$$

$$=\frac{690}{10}$$

$$= 69 \text{ inches}$$

Standard Deviation

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{n}}$$

$$=\sqrt{\frac{106}{10}}$$

$$= 3.26 \text{ inches}$$

Coefficient of Standard Deviation $=\dfrac{\sigma}{a}$

$$=\frac{3.26}{69}$$

$$= 0.047$$

Illustration 7 :—

The index numbers of prices of cotton and coal shares in 1942 were as under :—

Month		Cotton Shares	Coal Shares
January	...	188	131
February	...	178	130
March	...	173	130
April	...	164	129
May	...	172	129
June	...	183	120
July	...	184	127
August	...	185	127
September	...	211	130
October	...	217	137
November	...	232	140
December	...	240	142

Find out the Standard Deviations separately.

Solution :—

CALCULATION OF STANDARD DEVIATION OF THE PRICES OF COTTON AND COAL SHARES

Month	Cotton Shares			Coal Shares		
	Index No. of prices (x_1)	Deviation form Mean 194 (dx_1)	Square of Deviation (dx_1^2)	Index No. of prices (x_2)	Deviation from Mean 131 (dx_2)	Square of Deviations (dx_2^2)
January	188	−6	36	131	0	0
February	178	−16	256	130	−1	1
March	173	−21	441	130	−1	1
April	164	−30	900	129	−2	4
May	172	−22	484	129	−2	4
June	183	−11	121	120	−11	121
July	184	−10	100	127	−4	16
August	185	−9	81	127	−4	16
September	211	+17	289	130	−1	1
October	217	+23	529	137	+6	36
November	232	+38	1,444	140	+9	81
December	240	+46	2,116	142	+11	121
$n=12$	$\Sigma x_1 = 2,327$		$\Sigma dx_1^2 = 6,797$	$\Sigma x_2 = 1,572$		$\Sigma dx_2^2 = 402$

COTTON SHARES	COAL SHARES

ARITHMETIC MEAN

$a_1 = \frac{\Sigma x_1}{n}$	$a_2 = \frac{\Sigma x_2}{n}$
$= \frac{2{,}327}{12}$	$= \frac{1{,}572}{12}$
$= 194$ units	$= 131$ units

STANDARD DEVIATION

$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\Sigma dx_1^2}{n}}$	$\sigma_2 = \sqrt{\frac{\Sigma dx_2^2}{n}}$
$= \sqrt{\frac{6{,}797}{12}}$	$= \sqrt{\frac{402}{12}}$
$= 23.8$ units	$= 5.79$ units

लघु रीति (Short-cut Method)

लघु रीति से प्रमाप विचलन निकालने के कई सूत्र हैं जिनका वर्णन यहाँ किया जा रहा है :—

(क) नीचे दिये गये सूत्र के अनुसार प्रमाप विचलन निकालने की सबसे सरल विधि यह है कि बजाय विचलनों का वर्ग करने के चल-मूल्यों का ही वर्ग निकाल लिया जाय, और उनके योग को उनकी संख्या से भाग दे कर भागफल में से चल-मूल्यों के मध्यक के वर्ग को घटा कर शेष का वर्गमूल निकाल लिया जाय :—

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - (a)^2}$$

Illustration 8 :—

Ten students of the B.Com. class have obtained the following marks in Statistics out of 100 marks. Calculate the Standard Deviation by the Direct and the Short-cut methods.

Roll No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Marks	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Solution :—

CALCULATION OF THE STANDARD DEVIATION OF MARKS OBTAINED BY 10 STUDENTS IN STATISTICS BY THE DIRECT AND THE SHORT-CUT METHODS

Roll No.	Marks (x)	Deviations from ass. average 55 (dx)	Square of Deviations (dx^2)	Square of Marks (x^2)
1	10	−45	2,025	100
2	20	−35	1,225	400
3	30	−25	625	900
4	40	−15	225	1,600
5	50	− 5	25	2,500
6	60	+ 5	25	3,600
7	70	+15	225	4,900
8	80	+25	625	6,400
9	90	+35	1,225	8,100
10	100	+45	2,025	10,000
$n=10$	$\Sigma x=550$		$\Sigma dx^2=8,250$	$\Sigma x^2=38,500$

$$a_1 = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{550}{10} = 55 \text{ marks}$$

Direct Method

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{n}} = \sqrt{\frac{8250}{10}} = 28.7 \text{ marks}$$

Short-cut Method

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - (a)^2} = \sqrt{\frac{38500}{10} - (55)^2} = 28.7 \text{ marks}$$

(ख) लघु रीति से प्रमाप विचलन निकालने की दूसरी रीति यह है कि बजाय वास्तविक मध्यक (a) के किसी काल्पनिक मध्यक (a') से विचलन निकाले जायें और उनके योग में से वास्तविक और काल्पनिक मध्यक के अन्तर के वर्ग को संख्या से गुणा करके घटा दिया जाय। जो शेष आये उसमें संख्या का भाग देकर भागफल का वर्गमूल निकाल लिया जाय :—

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma dx^2 - n\,(a - a')^2}{n}} \text{ अथवा } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{n} - (a - a')^2}$$

Illustration 9 :—

Find out the Standard Deviation from the data given in Illustration No. 8, by using the above Short-cut Formula.

Solution :—

CALCULATION OF THE STANDARD DEVIATION BY THE ABOVE SHORT-CUT METHOD

Roll No.	Marks (x)	Deviation from ass. av. 50 (dx)	Square of Deviations (dx^2)
1	10	−40	1,600
2	20	−30	900
3	30	−20	400
4	40	−10	100
5	50	0	0
6	60	+10	100
7	70	+20	400
8	80	+30	900
9	90	+40	1,600
10	100	+50	2,500
$n=10$	$\Sigma x=550$		$\Sigma dx^2=8,500$

$$a = \frac{\Sigma x}{n}$$

$$= \frac{550}{10}$$

$$= 55 \text{ marks}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma dx^2 - n\,(a-a')^2}{n}} \quad \text{अथवा} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{n} - (a-a')^2}$$

$$= \sqrt{\frac{8{,}500 - 10(55-50)^2}{10}} \qquad = \sqrt{\frac{8{,}500}{10} - (55-50)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{8{,}250}{10}} \qquad = \sqrt{\frac{8{,}250}{10}}$$

$= 28.7$ marks $\qquad = 28.7$ marks

(ग) लघु रीति से प्रमाप विचलन निकालने की एक और रीति है जो पूर्व रीति से अच्छी है। इस के अनुसार किसी भी काल्पनिक मूल्य द्वारा विचलन निकाले जा सकते हैं। इसका सूत्र है—

$$\sigma = \sqrt{\left\{\frac{\Sigma dx^2}{n}\right\} - \left\{\frac{\Sigma dx}{n}\right\}^2}$$

Illustration 10 :—

Find out the Standard Deviation from the data given in Illustration No. 8, by using the above Short-cut Method.

Solution :—

CALCULATION OF THE STANDARD DEVIATION BY THE ABOVE SHORT-CUT METHOD

Roll No.	Marks (x)	Deviations from assumed value 60 (dx)	Square of the Deviations (dx^2)
1	10	—50	2,500
2	20	—40	1,600
3	30	—30	900
4	40	—20	400
5	50	—10	100
6	60	0	0
7	70	+10	100
8	80	+20	400
9	90	+30	900
10	100	+40	1,600
$n=10$		$\Sigma dx = -50$	$\Sigma dx^2 = 8{,}500$

$$\sigma = \sqrt{\left\{\frac{\Sigma dx^2}{n}\right\} - \left\{\frac{\Sigma dx}{n}\right\}^2}$$

$$= \sqrt{\left\{\frac{8,500}{10}\right\} - \left\{\frac{-50}{10}\right\}^2}$$

$$= \sqrt{850-25}$$

$$= \sqrt{825}$$

$$= 28.7 \text{ marks}$$

ऊपर के उदाहरण को देखने से स्पष्ट हो गया होगा कि काल्पनिक मूल्य द्वारा निकाले गये विचलनों के वर्गों के योग को पहले संख्या से भाग दे दिया गया है, और इस भागफल में से विचलनों (+और – का ध्यान रखते हुये) के योग में संख्या से भाग देने पर आये हुये भागफल के वर्ग को घटा दिया गया है। शेष का वर्गमूल प्रमाप विचलन है।

इस रीति द्वारा प्रमाप विचलन निकालने के लिये साधारण मध्यक निकालने की कोई आवश्यकता नहीं पड़ती क्योंकि उपर्युक्त सूत्र में इसका कहीं भी समावेश नहीं है। अतः मध्यक निकालने में जो समय लगाना पड़ता है उसकी बचत होती है। यदि मध्यक को निकालना आवश्यक हो तो इसे इस प्रकार निकाला जा सकता है :—

$$a = a' \pm \frac{\Sigma x}{n}$$

$$= 60 \pm \left\{\frac{-50}{10}\right\}$$

$$= 60-5$$

$$= 55 \text{ marks}$$

लघु रीति द्वारा प्रमाप विचलन निकालते समय सरलता के लिये विचलनों में से उभयनिष्ठ गुणक (Common Factor) निकाल लेना चाहिये। इससे गणना सुगम हो जाती है। किन्तु उत्तर लिखते समय प्राप्त फल में इस गुणक से गुणा कर देना आवश्यक होता है। ऊपर दिये गये उदाहरण नं० १०

के विचलनों में 10 उभयनिष्ठ गुणक है। इसे निकाल देने से आगे की क्रिया को और सरल किया जा सकता है। इस गुणक से उत्तर लिखते समय गुणा करना भूल न जाय, इसलिये सूत्र में ही सुधार कर लेना चाहिये। जैसे प्रमाप विचलन निकालने के लिये यह सूत्र प्रयोग में लाया जा रहा है—

$$\sigma = \sqrt{\left\{\frac{\Sigma dx^2}{n}\right\} - \left\{\frac{\Sigma dx}{n}\right\}^2}$$

किन्तु विचलन निकालते समय 10 उभयनिष्ठ गुणक लिया गया है, अतः इस सूत्र का यह स्वरूप हो जायगा—

$$\sigma = \sqrt{\left\{\frac{\Sigma dx^2}{n}\right\} - \left\{\frac{\Sigma dx}{n}\right\}^2} \times \text{Common Factor}$$

Illustration 11 :—

Find out the Standard Deviation of the following five values, using any Short-cut Method ;—

575, 625, 650, 700, 825

Solution :—

CALCULATION OF THE STANDARD DEVIATION BY THE SHORT-CUT METHOD

Size (x)	Deviations from ass. value 650 (dx)	Deviations after taking 25 common (dx')	Square of Deviations (dx'^2)
575	−75	−3	9
625	−25	−1	1
650	0	0	0
700	+50	+2	4
825	+175	+7	49
$n=5$		$\Sigma dx' = +5$	$\Sigma dx'^2 = 63$

$$\sigma = \sqrt{\left\{\frac{\Sigma dx^{12}}{n}\right\} - \left\{\frac{\Sigma dx^{1}}{n}\right\}^2} \times \text{Common Factor}$$

$$= \sqrt{\left\{\frac{63}{5}\right\} - \left\{\frac{+5}{5}\right\}^2} \times 25$$

$$= \sqrt{12.6 - 1} \times 25$$

$$= \sqrt{11.6} \times 25$$

$$= 3.4 \times 25$$

$$= 85 \text{ units}$$

विच्छिन्न माला (Discrete Series)

ऋजु रीति (Direct Method)

विच्छिन्न माला में ऋजु रीति से प्रमाप विचलन निकालने के लिये सूत्र में आवश्यक संशोधन करना पड़ेगा। चूँकि विच्छिन्न माला में आवृत्तियाँ दी रहती हैं, इसलिये मध्यक से निकाले गये विचलनों में उनकी सम्बन्धित आवृत्तियों से गुणा करना पड़ता है, और विचलनों के योग में चल मूल्यों की संख्या से भाग देने के स्थान पर कुल आवृत्तियों से भाग दिया जाता है। अतः

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fdx}{\Sigma f}}$$

प्रमाप विचलन गुणक (Coefficient of Standard Deviation) के सूत्र वही रहते हैं, अर्थात

$$\textit{Coefficient of Standard Deviation} = \frac{\sigma}{a}$$

Illustration 12 :—

Calculate the standard Deviation of the following data with regard to 2,298 families in the United Kingdom.

Persons	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Family	165	552	580	433	268	148	77	41	20	8	5	1

(एम० ए०, इलाहाबाद, १९४२)

Solution :—

CALCULATION OF THE STANDARD DEVIATION
BY THE DIRECT METHOD

No. of persos in the family (x)	No. of families (f)	Product of Col. (1)×(2) (fx)	Deviations from the average 3.6 (dx)	Square of Deviations (dx^2)	Product of Col. (2)×(5) (fdx^2)
1	165	165	—2.6	6.76	1,115.40
2	552	1,104	—1.6	2.56	1,413.12
3	580	1,740	—0.6	0.36	208.80
4	433	1,732	+0.4	0.16	69.28
5	268	1,340	+1.4	1.96	525.28
6	148	888	+2.4	5.76	852.48
7	77	539	+3.4	11.56	890.12
8	41	328	+4.4	19.36	793.76
9	20	180	+5.4	29.16	583.20
10	8	80	+6.4	40.96	327.68
11	5	55	+7.4	54.76	273.80
12	1	12	+8.4	70.56	70.56
	Σf=2,298	Σfx=8,163			Σfdx^2= 7,123.48

ARITHMETIC MEAN

$$a=\frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$$

$$=\frac{8,163}{2,298}$$

$$=3.6 \text{ persons}$$

STANDARD DEVIATION

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fdx^2}{\Sigma f}}$$

$$=\sqrt{\frac{7,123.48}{2,298}}$$

$$=\sqrt{3.1}$$

$$=1.76 \text{ persons}$$

लघु रीति (Short-cut Method)

जिस प्रकार के सँशोधन साधारण श्रेणी वाले सूत्र में किये गये हैं उसी

प्रकार के संशोधन विच्छिन्न माला में लघु रीति से प्रमाप विचलन निकालने वाले सूत्रों में भी करने पड़ते हैं। अतः इन सूत्रों के ये स्वरूप होंगे :—

सूत्र (क) $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{\Sigma f} - a^2}$

सूत्र (ख) $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fdx^2 - \Sigma f\,(a-a')^2}{\Sigma f}}$, अथवा

$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fdx^2}{\Sigma f} - (a-a')^2}$

सूत्र (ग) $\sigma = \sqrt{\left\{\frac{\Sigma fdx^2}{\Sigma f}\right\} - \left\{\frac{\Sigma fdx}{\Sigma f}\right\}^2}$

Illustration 11 :—

Calculate the Standard Deviation by Short-cut Methods :—

Size	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5
Frequency	3	7	22	60	85	32	8

Solution :—

CALCULATION OF STANDARD DEVIATION BY SHORT-CUT METHODS

Size (x)	Frequency (f)	Square of Size (x^2)	Product of Col. (2)×(3) (fx^2)	Deviations from ass. av. 6.5 (dx)	Product of Col. (2)×(5) (fdx)	Product of Col. (5)×(6) (fdx^2)
3.5	3	12.25	36.75	—3	—9	27
4.5	7	20.25	141.75	—2	—14	28
5.5	22	30.25	665.50	—1	—22	22
6.5	60	42.25	2,535.00	0	0	0
7.5	85	56.25	4,781.25	+1	+85	85
8.5	32	72.25	2,312.00	+2	+64	128
9.5	8	90.25	722.00	+3	+24	72
	$\Sigma f=$ 217		$\Sigma fx^2=$ 11,194.25		$\Sigma fdx=$ +128	$\Sigma fdx^2=$ 362

$$a = a' \pm \frac{\Sigma fdx}{\Sigma f}$$

$$= 6.5 + \left\{ \frac{+128}{217} \right\}$$

$$= 7.09 \text{ units}$$

सूत्र (क) के अनुसार

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{\Sigma f} - (a)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{11{,}194.25}{217} - (7.09)^2}$$

$$= \sqrt{1.32}$$

$$= 1.15 \text{ units}$$

सूत्र (ख) के अनुसार

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fdx^2 - \Sigma f(a-a')^2}{\Sigma f}}$$

$$= \sqrt{\frac{362 - 217(7.09-6.5)^2}{217}}$$

$$= \sqrt{\frac{362 - 75.5377}{217}}$$

$$= \sqrt{1.32}$$

$$= 1.15 \text{ units}$$

अथवा

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fdx^2}{\Sigma f} - (a-a')^2}$$

$$= \sqrt{\frac{362}{217} - (7.09-6.5)^2}$$

$$= \sqrt{1.668 - 0.3481}$$

$$= \sqrt{1.32}$$

$$= 1.15 \text{ units}$$

सूत्र (ग) के अनुसार

$$\sigma = \sqrt{\left\{ \frac{\Sigma fdx^2}{\Sigma f} \right\} - \left\{ \frac{\Sigma fdx}{\Sigma f} \right\}^2}$$

$$= \sqrt{\left\{ \frac{362}{217} \right\} - \left\{ \frac{+128}{217} \right\}^2}$$

$$= \sqrt{1.668 - 0.3481}$$

$$= \sqrt{1.32}$$

$$= 1.15 \text{ units}$$

उपर्युक्त हलों को देखने से ज्ञात हो गया होगा कि सूत्र (ग) सबसे सरल है। यदि उभयनिष्ठ गुणक निकाला गया हो, तो प्रत्येक सूत्र में उससे गुणा करने की भी आवश्यकता पड़ेगी।

अविच्छिन्न माला (Continuous Series)

अविच्छिन्न माला में प्रमाप विचलन निकालने के लिये भी विच्छिन्न माला वाले सूत्रों का ही प्रयोग किया जाता है। ऋजु व लघु दोनों रीतियों के सूत्रों में कोई अन्तर नहीं होगा सिवाय इसके कि विचलन मूल्यों से न निकाल कर वर्गों के मध्य-बिन्दुओं से निकाले जायेंगे :—

ऋजु रीति (Direct Method)

Illustration 14 :—

Calculate the Standard Deviation from the following data by Driect and Short cut methods :—

Marks Above	0	10	20	30	40	50	60	70	80
No. of students	150	140	100	80	80	70	30	14	4

(बी० कॉम०, इलाहाबाद, १९५३)

Solution :—

CALCULATION OF STANDARD DEVIATION BY DIRECT METHOD

Marks	Mid-points (x)	No. of students (f)	Deviations from 39.26* (dx)	Square of Deviations (dx^2)	Product of Col. (3)×(5) (fdx^2)
0—10	5	10	—34.26	1173.7476	11737.4760
10—20	15	40	—24.26	588.5476	23541.9040
20—30	25	20	—14.26	203.3476	4066.9520
30—40	35	0	—4.26	18.1476	...
40—50	45	10	+5.74	32.9476	329.4760
50—60	55	40	+15.74	247.7476	9909.9040
60—70	65	16	+25.74	662.5476	10600.7616
70—80	75	14	+35.74	1277.3476	17882.8664
		$\Sigma f=150$			$\Sigma fdx^2=$ 78069.3400

*इस उदाहरण में वास्तविक मध्यक (True Mean)=39.26 marks है।

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f dx^2}{\Sigma f}}$$

$$= \sqrt{\frac{78069.3400}{150}}$$

$$= 22.8 \text{ marks}$$

लघु रीति (Short-cut Method)

Solution :—

CALCULATION OF THE STANDARD DEVIATION BY USING THE FORMULA (*A*)

Marks	Mid-points (x)	No. of students (f)	Product of Col. (2)×(3) (fx)	Square of Mid-points (x^2)	Product of Col. (3)×(5) (fx^2)
0—10	5	10	50	25	250
10—20	15	40	600	225	9,000
20—30	25	20	500	625	12,500
30—40	35	0	0	1,225	0
40—50	45	10	450	2,025	20,250
50—60	55	40	2,200	3,025	1,21,000
60—70	65	16	1,040	4,225	67,600
70—80	75	14	1,050	5,625	78,750
		Σf=150	Σfx= 5,890		Σfx^2= 3,09,350

सूत्र (अ) के अनुसार

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{\Sigma f} - (a)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{3,09,350}{150} - (39.26)^2}$$

$$= 22.8 \text{ marks.}$$

CALCULATION OF THE STANDARD DEVIATION BY USING THE FORMULAE (B) AND (C)

Marks	Mid-points (x)	No. of students (f)	Deviations from ass. av. 35 (dx)	Deviations taking common 10 (dx')	Product of Col. (3)×(5) (fdx')	Product of Col. (5)×(6) (fdx'^2)
0—10	5	10	—30	—3	—30	90
10—20	15	40	—20	—2	—80	160
20—30	25	20	—10	—1	—20	20
30—40	35	0	0	0	0	0
40—50	45	10	+10	+1	+10	10
50—60	55	40	+20	+2	+80	160
60—70	65	16	+30	+3	+48	144
70—80	75	14	+40	+4	+56	224
		$\Sigma f=150$			$\Sigma fdx'=+64$	$\Sigma fdx'^2=808$

सूत्र (ब) के अनुसार

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fdx'^2-\Sigma f(a-a')^2}{\Sigma f}}$$

$$=\sqrt{\frac{80800-150(39.26-35)^2}{150}}$$

$$=22.8 \text{ marks}$$

सूत्र (स) के अनुसार

$$\sigma=\sqrt{\left\{\frac{\Sigma fdx'^2}{\Sigma f}\right\}-\left\{\frac{\Sigma fdx'}{\Sigma f}\right\}^2}\times \text{C.F.}$$

$$=\sqrt{\frac{808}{150}-\left\{\frac{64}{150}\right\}^2}\times 10$$

$$=22.8 \text{ marks}$$

सामूहिक प्रमाप विचलन (Combined Standard Deviation)

जिस प्रकार विभिन्न न्यादर्शों (Samples) के मध्यकों के आधार पर सामूहिक मध्यक (Combined Mean) निकाला जाता है, उसी पर उनके

प्रमाप विचलन के आधार पर सामूहिक प्रमाप विचलन (Combined Standard Deviation) भी ज्ञात किया जा सकता है। इसके लिये सूत्र है :—

COMBINED STANDARD DEVIATION

$$\sigma = \sqrt{\frac{f_1\sigma_1{}^2 + f_2\sigma_2{}^2 + f_2\sigma_3{}^2 \ldots\ldots + f_1 d_1{}^2 + f_2 d_2{}^2 + f_3 d_3{}^2 \ldots\ldots}{f_1 + f_2 + f_3 \ldots\ldots}}$$

जिसमें $f_1, f_2, \cdots$ इत्यादि विभिन्न न्यादर्शों के पदों की संख्या व $\sigma_1, \sigma_2, \cdots$ इत्यादि उनके प्रमाप विचलन हैं। $d_1, d_2, \cdots$ इत्यादि न्यादर्शों के मध्यक व सामूहिक मध्यक के क्रमशः अन्तर हैं।

Illustration 15 :—

Three distributions each of 100 members and standard deviation 4.5 units are located with their arithmetic means at 12.1, 17.1 and 22.1 units respectively. Find the standard deviation of the distribution obtained by combining the three.

(*Brookes and Dick*)

Solution :—

$$\textit{Combined Mean} = \frac{f_1 a_1 + f_2 a_2 + f_3 a_3}{f_1 + f_2 + f_3}$$

$$= \frac{(100 \times 12.1) + (100 \times 17.1) + (100 \times 22.1)}{(100 + 100 + 100)}$$

$$= 17.1 \text{ units}$$

$$\textit{Combined } \sigma = \sqrt{\frac{f_1\sigma_1{}^2 + f_2\sigma_2{}^2 + f_3\sigma_3{}^2 + f_1 d_1{}^2 + f_2 d_2{}^2 + f_3 d_3{}^2}{f_1 + f_2 + f_3}}$$

$d_1 = (12.1 - 17.1) = -5$; $d_2 = (17.1 - 17.1) = 0$ and $d_3 = (22.1 - 17.1) = +5$

$$= \sqrt{(100 \times 4.5^2) + (100 \times 4.5^2) + (100 \times 4.5^2) + (100 \times -5^2) + 0 + (100 - 5^2)/(100 + 100 + 100)}$$

$$= \sqrt{\frac{2{,}025 + 2{,}025 + 2{,}025 + 2{,}500 + 0 + 2{,}500}{300}}$$

$$= \sqrt{\frac{11,075}{300}}$$

$= 6.1$ units

प्रमाप विचलन पर आधारित अन्य माप
(Other Measures based on Standard Deviation)

प्रमाप विचलन पर ही आधारित अपकिरण के अन्य माप भी हैं, जैसे :—

(क) विचरण मापांक (Variance)—यह प्रमाप विचलन का वर्ग (σ^2) होता है, अथवा दूसरे शब्दों में यह द्वितीय घात का अपकिरण है। इस माप का प्रयोग उच्च सांख्यिकीय अध्ययन में किया जाता है।

(ख) घनक (Modulus)—यदि किसी समंक माला के विचलनों के वर्ग के योग का दुगुना करके उसमें पदों की संख्या से भाग दिया जाय और प्राप्त फल का वर्गमूल निकाला जाय, तो जो परिणाम प्राप्त होगा वह घनक है। अतः

$$Modulus\ (c) = \sqrt{\frac{2\, fdx^2}{n}}$$

(ग) सुतथ्यता (Precision)—यदि किसी समंक माला के घनक का व्युत्क्रम (Reciprocal) निकाला जाय, तो प्राप्तफल सुतथ्यता होगा। सूत्रानुसार

$$P = 1 \div \sqrt{\frac{\Sigma\, 2\, fdx^2}{n}}$$

(घ) संभाव्य विभ्रम (Probable Error)—प्रमाप विचलन का 0.6745 अर्थात् $\frac{2}{3}$ मूल्य संभाव्य विभ्रम कहलाता है।

प्रमाप विचलन की विशेषतायें
(Advantages of Standard Deviation)

(१) अपकिरण की विभिन्न रीतियों में प्रमाप विचलन सर्वश्रेष्ठ समझा जाता है क्योंकि इसका प्रयोग उच्चतर गणितीय अध्ययन में सुचारुरूप से किया जा सकता है।

(२) प्रमाप विचलन एक स्पष्ट माप है जो प्रत्येक स्थिति में ज्ञात किया जा सकता है।

(३) यह समंक माला के समस्त मूल्यों पर आधारित होता है।

(४) इस पर निदर्शन के उच्चावचनों का भी न्यूनतम प्रभाव पड़ता है।

(५) विभिन्न न्यादर्शों के मध्यकों द्वारा निर्मित माला का अध्ययन करने के लिये यही माप सर्वश्रेष्ठ समझा जाता है। उस स्थिति में यह मध्यक का प्रमाप विभ्रम (Standard Error of the Mean) कहलाता है। प्रमाप विभ्रम वस्तुतः अर्थपूर्णता की जाँच (Test of Significance) का आधार स्तम्भ है।

प्रमाप विचलन के दोष (Demerits of Standard Deviation)

(१) इसकी गणन-क्रिया बड़ी कठिन है।

(२) मध्यक के पास वाले मूल्यों की अपेक्षा यह माला के चरम-मूल्यों को अधिक महत्व प्रदान करता है।

सामान्य वक्र (Normal Curve)

पिछले अध्यायों में हम अनेक स्थानों पर संमित वितरण (Symmetrical Distribution) व उसके आधार पर बनने वाले घन्टी के आकार के वक्र (Bell-shaped Curve) का वर्णन कर चुके हैं। संमित वितरण की प्रमुख विशेषता यह होती है कि उसमें जिस क्रम से आवृत्तियाँ बढ़ती हैं उसी क्रम से वे घटती हैं। हम जानते हैं कि किसी समग्र (Universe) में से लिये गये न्यादर्शों (Samples) के मध्यक, अपकिरण, विषमता, आदि में भिन्नता हो सकती है किन्तु समग्र की विशेषताओं में अनन्त समंकों के कारण स्थिरता होती है। सम्भावना सिद्धान्त (Theory of Probability) का वर्णन करते समय इस बात का संकेत किया जा चुका है कि यदि हम किसी सिक्के को दो-चार बार हवा में उछालें, तो 'चित्त' व 'पट्ट' के अनुपात में समानता का अभाव हो सकता है, किन्तु यदि सौ या हजार बार इसी क्रिया को दोहरायें तो करीब-करीब दोनों के परिणाम में समानता दृष्टिगोचर होगी। 'सामान्य वितरण' (Normal Distribution) व उसके आधार पर निर्मित होने वाला 'सामान्य वक्र' (Normal Curve) वस्तुतः इसी सिद्धान्त पर आधारित है।

सामान्य वक्र की खोज डा० डी मॉयर (Dr. De Moivre) ने १७३३ में किया था, किन्तु इसका समुचित प्रयोग १८ वीं शताब्दी के अन्त में प्रसिद्ध

सांख्यिक गॉस (Gauss) ने किया। इसीलिये इसको 'गॉस का वक्र' (Gaussian Curve) भी कहते है। इसे 'सामान्य संभावना वक्र' (Normal Probability Curve) तथा 'विभ्रम का सामान्य वक्र' (Nomal Curve of Error) भी कहते हैं।

सामान्य वक्र का सांख्यिकी में महत्व
(Importance of Normal Curve in Statistics)

सांख्यिकी में सामान्य वक्र का अत्यन्त ही महत्वपूर्ण स्थान है। किसी विशाल समग्र में से लिये गये न्यादर्श वास्तव में उसकी विशेषताओं को प्रकट करने में समर्थ हैं अथवा नहीं, इसकी जानकारी हम सामान्य वक्र के द्वारा ही प्राप्त कर सकते हैं। सामान्य वक्र की ही सहायता से विभिन्न न्यादर्शों की विशेषताओं का विश्लेषणात्मक अध्ययन व विवेचन किया जा सकता है। इस वक्र में निम्नलिखित विशेषतायें पायी जाती हैं :—

(१) सामान्य वक्र में एक ही शीर्ष-विन्दु (Peak) होता है जिसके दोनों ओर वक्र का झुकाव समान होता है। अतः मध्यक (Mean), मध्यका (Median) व भूयिष्ठक (Mode) के मूल्य समान होते हैं।

(२) ये माध्य वक्र के नीचे के क्षेत्रफल (कुल आवृत्तियों की संख्या) को दो समान भागों में बाँटते हैं।

(३) प्रथम व तृतीय चतुर्थांश मध्यका से समान दूरी पर होते हैं।

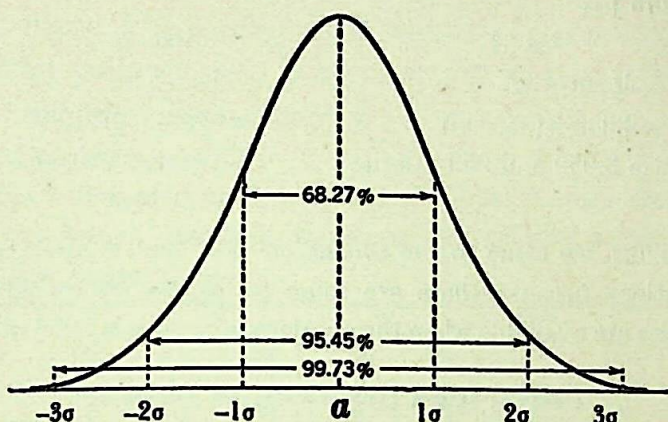
(४) जिन विन्दुओं पर वक्र के झुकाव में परिवर्तन होता है, यदि वहाँ से आधार रेखा तक लम्ब खींचे जायें, तो मध्यक से वहाँ तक की दूरी प्रमाप-विचलन बतलायेगी।

(५) वक्र के नीचे के क्षेत्रफल को प्रमाप विचलन इस प्रकार वितरित करता है :—

(अ) *Mean* $\pm 1\sigma$ के अन्तर्गत समग्र के करीब 68.268% समंक पाये जाते हैं, अर्थात् 34.134% ऋणात्मक भाग में व उतने ही धनात्मक भाग में;

(ब) *Mean* $\pm 2\sigma$ के अन्तर्गत 95.45% समंक पाये जाते हैं;

(स) *Mean* $\pm 3\sigma$ के अन्तर्गत 99.73% समंक पाये जाते हैं।

अर्थात्, Mean$\pm 3\sigma$ के अन्तर्गत हमें समग्र के सभी समंक उपलब्ध होते हैं। केवल 0.27% समंक ही इन सीमाओं के बाहर हो सकते हैं।

(६) मध्यक विचलन (Mean Deviation) प्रमाप विचलन का 0.7979 अर्थात् $\frac{4}{5}$ होता है।

(७) संभाव्य विभ्रम (Probable Error) प्रमाप विचलन का 0.6745, अर्थात् $\frac{2}{3}$ होता है।

(८) चतुर्थांश विचलन (Quartile Deviation) व संभाव्य विभ्रम समान होते हैं।

Illustration 16 :—

You are in charge of rationing in a State affected by food-shortage. The following reports arrive from your local investigators :—

Daily calorific value of food available per adult during current period :

Area		*Mean*	*S. D.*
A	...	2,000	350
B	...	1,750	100

The estimated requirement of an adult is taken at 2,500 calories daily and the absolute minimum at 1,000. Comment on the reported figures, and determine which area, in your opinion, needs more urgent attention.

(एम० कॉम०, बनारस, १९५१).

Solution :—

Area A	*Area B*
Mean $\pm 3\sigma$	Mean $\pm 3\sigma$
$=2{,}000 \pm (3 \times 350)$	$=1{,}750 \pm (3 \times 100)$
Between 3,050 and 950 calories	Between 2,050 and 1,450 calories

Thus, we come to the conclusion that area *A* needs urgent attentions because there are some people to whom only 950 calories are available when the absolute minimum is 1,000 calories.

विचरण-गुणक (Coefficient of Variation)

हम ऊपर देख चुके हैं कि तुलनात्मक अध्ययन करने के लिये अपकिरणों के गुणक (Coefficients) निकाले जाते हैं। यदि प्रमाप विचलन के गुणक में 100 से गुणा कर दिया जाय, तो जो फल किसी प्रतिशत के रूप में प्राप्त होगा, वही विचरण गुणक (Coefficient of Variation) है। चूँकि यह गुणक प्रतिशत के रूप में प्राप्त होता है, इसलिये तुलनात्मक अध्ययन करने में बड़ी सुगमता हो जाती है। इस माप को भी ज्ञात करने का श्रेय कार्ल पियर्सन (Karl Pearson) को है। निम्नलिखित उदाहरणों में इसका उपयोग दिखलाया जा रहा है :—

Illustration 17 :—

In a cricket match Mr. Verma has an average of 26.0 runs with a standard deviation of 17.5, whereas Mr. Wahi has an average of 33.85 runs with a standard deviation of 15.05. In your opinion, who is the more competent player ?

Solution :—

Mr. Verma	Mr. Wahi
$\text{C.V.} = \frac{\sigma_1}{a_1} \times 100$	$\text{C.V.} = \frac{\sigma_2}{a_2} \times 100$
$= \frac{17.5}{26.0} \times 100$	$= \frac{15.05}{33.85} \times 100$
$= 67.31\%$	$= 44.46\%$

अतः मि० वर्मा के खेल का विचरण गुणक 67.31% तथा मि० वाही का 44.46% है। इससे यह स्पष्ट हो जाता है कि मि० वर्मा के खेल में

अधिक विचरण (Variation) अथवा अस्थिरता (Instability) है। इसलिये इस तुलनात्मक अध्ययन के आधार पर कहा जा सकता है कि दोनों में मि० वाही अधिक होशियार खिलाड़ी हैं।

Illustration 18 :—

The scores of cricketers *A* and *B* for 20 innings each are tabulated below. Ascertain which may be regarded as the more consistent player ?

Score	50	51	52	53	54	55	56	57
A ...	1	0	0	4	3	6	3	3
B ...	1	2	2	6	3	4	2	0

(एम० कॉम०, बनारस, १९४९)

Solution :—

CALCULATION OF MEAN AND STANDARD DEVIATION OF SCORES OF CRICKETERS *A* AND *B* FOR 20 INNINGS

SCORE (x)	Deviations from ass. average. 53 (dx)	*A*			*B*		
		Frequency (f_1)	Product of Col. (2)×(3) (f_1dx)	Product of Col. (2)×(4) (f_1dx^2)	Frequency (f_2)	Product of Col. (2)×(6) (f_2dx)	Product of Col. (2)×(7) (f_2dx^2)
50	−3	1	−3	9	1	−3	9
51	−2	0	0	0	2	−4	8
52	−1	0	0	0	2	−2	2
53	0	4	0	0	6	0	0
54	+1	3	+3	3	3	+3	3
55	+2	6	+12	24	4	+8	16
56	+3	3	+9	27	2	+6	18
57	+4	3	+12	48	0	0	0
		$\Sigma f_1 = 20$	$\Sigma f_1dx = +33$	$\Sigma f_1dx^2 = 111$	$\Sigma f_2 = 20$	$\Sigma f_2dx = +8$	$\Sigma f_2dx^2 = 56$

A और B में कौन सा खिलाड़ी अधिक स्थिरता से खेलने वाला है यह जानने के लिये दोनों के विचरण-गुणक (Coefficient of Variation) का तुलनात्मक अध्ययन करना पड़ेगा।

CRICKETER A | CRICKETER B

ARITHMETIC MEAN

$$a_1 = a' \pm \frac{\Sigma f_1 dx}{\Sigma f_1} \qquad a_2 = a' \pm \frac{\Sigma f_2 dx}{\Sigma f_2}$$

$$= 53 \pm \left\{\frac{+33}{20}\right\} \qquad = 53 \pm \left\{\frac{+8}{20}\right\}$$

$$= 53 + 1.65 \qquad = 53 + 0.4$$

$$= 54.65 \text{ runs} \qquad = 53.4 \text{ runs}$$

STANDARD DEVIATION

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\Sigma f_1 dx^2}{\Sigma f_1} - \left\{\frac{\Sigma f_1 dx}{\Sigma f_1}\right\}^2} \qquad \sigma_2 = \sqrt{\frac{\Sigma f_2 dx^2}{\Sigma f_2} - \left\{\frac{\Sigma f_2 dx}{\Sigma f_2}\right\}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{111}{20} - \left\{\frac{+33}{20}\right\}^2} \qquad = \sqrt{\frac{56}{20} - \left\{\frac{+8}{20}\right\}^2}$$

$$= \sqrt{5.55 - 2.72} \qquad = \sqrt{2.8 - 0.16}$$

$$= \sqrt{2.83} \qquad = \sqrt{2.64}$$

$$= 1.68 \text{ runs} \qquad = 1.62 \text{ runs}$$

COEFFICIENT OF VARIATION

$$C.V._1 = \frac{\sigma_1}{a_1} \times 100 \qquad C.V._2 = \frac{\sigma_2}{a_2} \times 100$$

$$= \frac{1.68}{54.65} \times 100 \qquad = \frac{1.62}{53.4} \times 100$$

$$= 3.07\% \qquad = 3.03\%$$

ऊपर ज्ञात किये गये मध्यकों के आधार पर तो यह निष्कर्ष निकलता है कि प्रथम खिलाड़ी दूसरे की अपेक्षा अच्छा है। किन्तु जब हम उनके विचरण गुणक का अवलोकन करते हैं तो यह निष्कर्ष अशुद्ध जान पड़ता। वस्तुतः दूसरे खिलाड़ी में स्थिरता की मात्रा अधिक है।

लॉरेंज वक्र (Lorenz Curve)

अपकिरण ज्ञात करने की एक विन्दु रेखीय रीति (Graphical Method) भी है जिसका प्रयोग सर्वप्रथम डा० मैक्स ओ० लॉरेन्ज (Dr. Max O. Lorenz) ने किया था। उन्होंने अपकिरण प्रदर्शित करने के लिये जिस वक्र का प्रयोग किया वह उनके नाम पर लॉरेंज वक्र कहलाता है। इस वक्र का प्रयोग मुख्यतः आय, धन, लाभ, मज़दूरी, इत्यादि से सम्वन्धित समंक मालाओं या आवृत्ति वितरणों के अध्ययनार्थ किया जाता है। यह वक्र संचयी आकृति (Cumulative Values) और संचयी आवृत्ति (Cumulative Frequencies) के क्रमिक प्रतिशतों के आधार पर बनाया जाता है। लॉरेंज वक्र केवल दो या दो से अधिक मालाओं या वितरणों में पाये जाने वाले अपकिरणों का तुलनात्मक प्रदर्शन तो कर सकता है परन्तु इसके द्वारा कोई संख्यात्मक तुलना नहीं की जा सकती।

विन्दुरेखीय पत्र पर लॉरेंज वक्र का प्रदर्शन इस प्रकार किया जाता है :—

(१) चल-मूल्यों की संचयी आकृति निकाल ली जाती है और अन्तिम संचयी आकृति को 100 मान कर शेष संचयी आकृतियों के अलग-अलग प्रतिशत निकाल लिये जाते हैं।

(२) इसी प्रकार आवृत्तियों की भी संचयी आवृत्ति निकाल ली जाती हैं और अन्तिम संचयी आवृत्ति को 100 मान कर शेष संचयी आवृत्तियों के प्रतिशत निकाले जाते हैं।

(३) संचयी आकृतियों के प्रतिशत य (X) अक्ष पर और संचयी आवृत्तियों के प्रतिशत र (Y) अक्ष पर दिखलाये जाते हैं।

(४) साधारण विन्दुरेखीय रीति के विपरीत य (X) अक्ष पर यदि बाईं ओर से दाईं ओर 0 से 100 तक प्रतिशत दिखलाये जाते हैं तो र (Y) अक्ष पर नीचे से ऊपर 100 से 0 तक प्रतिशत दिखलाये जायेंगें, अथवा इसके विपरीत भी किया जा सकता है।

(५) फिर 0 और 100 को मिला दिया जाता है। इन्हें मिलाने वाली रेखा समान वितरण की रेखा (Line of Equal Distribution) कहलाती है।

(६) इस ढंग से वनाये गये अक्षों पर दोनों प्रकार के प्रतिशतों को प्रांकित करके वक्र बना लिये जाते हैं। ये ही लॉरेंज वक्र हैं।

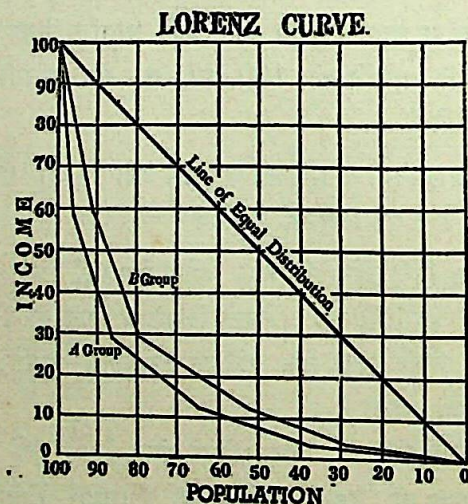
लॉरेंज वक्रों द्वारा अपकिरण के अध्ययन की यह रीति है:—

(क) लॉरेंज वक्र समान रेखा के जितना ही समीप होगा उतना ही कम अपकिरण उस समंक माला में होगा।

(ख) इसके विपरीत, लॉरेंज वक्र समान वितरण रेखा से जितना ही दूर होगा उतना ही अधिक अपकिरण उस समंक माला में होगा।

Illustration 19 :—

From the figures given below, draw a graph to show which group has greater inequality :—

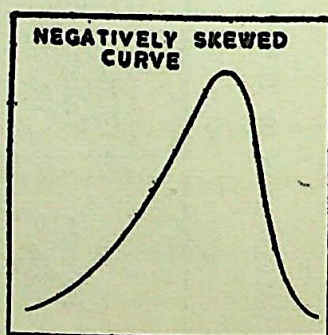
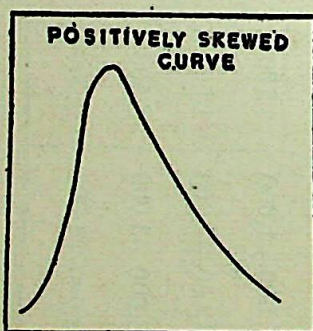
Income Rs.		No. of persons *A* Group	No. of persons *B* Group
Below 500	...	6,000	5,000
500—1,000	...	4,250	4,500
1,000—2,000	...	3,600	4,800
2,000—3,000	...	1,500	2,200
3,000—4,000	...	650	1,500

चित्र में प्रदर्शित लॉरेंज वक्रों के आधार पर हम कह सकते हैं कि 'अ' वर्ग के निवासियों की आय में 'ब' वर्ग के निवासियों की अपेक्षा अधिक असमानता है।

CALCULATION OF THE PERCENTAGE OF CUMULATIVE VALUES AND CUMULATIVE FREQUENCIES FOR DRAWING LORENZ CURVES

Income Rs.	Mid-Values Rs.	Cumulative Values Rs.	% to Total Income	A Group			B Group		
				No. of persons	Cumulative Frequency	% to Total Frequency	No. of persons	Cumulative Frequency	% to Total Frequency
0— 500	250	250	3%	6,000	6,000	37.5%	5,000	5,000	28.0%
500—1,000	750	1,000	12%	4,250	10,250	64.0%	4,500	9,500	53.0%
1,000—2,000	1,500	2,500	29%	3,600	13,850	86.5%	4,800	14.300	79.5%
2,000—3,000	2,500	5,000	59%	1,500	15,350	96.0%	2,200	16,500	91.0%
3,000—4,000	3,500	8,500	100%	650	16,000	100%	1,500	18,000	100.0%

विषमता (Skewness)

किसी समंक माला अथवा आवृत्ति वितरण का अध्ययन करने के लिये उसके मध्यक और अपकिरण की माप आवश्यक है, और इसी उद्देश्य से पिछले अध्यायों में उन पर सविस्तार प्रकाश डाला गया है। किन्तु मध्यक और अपकिरण द्वारा हम समंक माला अथवा आवृत्ति वितरण की केवल मध्य-प्रवृत्ति तथा मध्यक से विभिन्न चल-मूल्यों का विचलन ही देख पाते हैं। इन मापों द्वारा हम यह नहीं ज्ञात कर सकते कि समंक माला संमित (Symmetrical) है या असंमित (Asymmetrical)। अतः इसका पता लगाने के लिये विषमता के मापों (Measures of Skewness) का प्रयोग करना पड़ता है।

विषमता (Skewness) संमितता (Symmetry) का अभाव है जो यह सूचित करती है कि आवृत्ति-वक्र का एक सिरा (Tail) एक ओर की अपेक्षा दूसरी ओर अधिक झुका हुआ है, अर्थात् वक्र का एक सिरा दूसरे से अधिक लम्बा है। यदि समंक माला अथवा आवृत्ति वितरण के सभी चल मूल्य भूयिष्ठक के ऊपर और नीचे समान विचलन रखते हैं, तो उन्हें विन्दुरेखीय पत्र पर प्रांकित करने पर एक घन्टी के आकार का (Bell-Shaped) वक्र प्राप्त होता है, किन्तु यदि ऐसा नहीं है तो वक्र की ढाल में एक ओर अधिक झुकाव होगा। यदि वक्र का यह स्वरूप है तो आवृत्ति वितरण में विषमता या असंमितता कही जायगी। अतः विषमता का सम्बन्ध वक्र की आकृति से है, जब कि अपकिरण का सम्बन्ध चल मूल्यों की आकृति से है।

विषमता धनात्मक (+) और ऋणात्मक (−) दोनों हो सकती है। यदि मध्यक का मूल्य भूयिष्ठक अथवा मध्यका से कम है, तो विषमता ऋणात्मक

(—) और यदि अधिक है तो धनात्मक (+) होगी। दूसरे शब्दों में यदि वक्र दाहिनी ओर ज्यादा झुका है तो विषमता धनात्मक (+) और यदि बाईं ओर ज्यादा झुका है तो ऋणात्मक (—) होगी। यदि किसी आवृत्ति वितरण में भूयिष्ठक, मध्यक और मध्यका तीनों के मूल्य एक ही हैं, तो वहाँ विषमता शून्य होगी और वक्र का आकार एक घन्टी के समान अवश्य होगा।

निम्नलिखित स्थितियों में समंक माला में विषमता का होना निश्चित है :–

(क) यदि मध्यक, मध्यका और भूयिष्ठक के मूल्य समान नहीं हैं;

(ख) यदि मध्यक, मध्यका या भूयिष्ठक से लिये गये धनात्मक (+) विचलनों का योग ऋणात्मक (—) विचलनों के बराबर नहीं है;

(ग) यदि भूयिष्ठक के दोनों ओर की आवृत्तियों का योग बराबर नहीं है;

(घ) यदि दोनों चतुर्थांश, या दशांश व शतांश के जोड़े मध्यका से समान दूरी पर नहीं हैं।

(ङ) यदि वक्र का स्वरूप घंटी के आकार का नहीं है।

विषमता निकालने की रीति

(Methods of calculating the Skewness)

जैसा ऊपर दिये गये चित्रों से स्पष्ट है, विषमता विन्दुरेखीय रीति (Graphical Method) द्वारा बड़ी आसानी से जानी जा सकती है। किन्तु इस रीति द्वारा अंकात्मक अध्ययन नहीं हो सकता। विषमता का अंकात्मक अध्ययन करने की मुख्यतः तीन रीतियाँ हैं :—

(१) मध्यक-स्थिति रीति (The Position of Averages Method)

(२) चतुर्थांश विचलन रीति (The Quartile Deviation Method)

(३) घन-विचलन रीति (The Cubed Deviation Method)

इन रीतियों द्वारा विषमता के जो माप प्राप्त होते हैं वे सापेक्ष-माप (Absolute Measures) होते हैं। तुलनात्मक अध्ययन के लिये इन मापों के आधार पर निरपेक्ष माप (Relative Measures) निकाले जाते हैं, जिन्हें विषमता-गुणक (Coefficients of Skewness) कहते हैं। विषमता गुणक का चिन्ह (j) है।

मध्यक स्थिति रीति (The Position of Averages Method)

ऊपर यह बतलाया जा चुका है कि यदि किसी आवृत्ति वितरण में मध्यक, मध्यका और भूयिष्ठक के मूल्य एक ही हों तो वह आवृत्ति वितरण संमित (Symmetrical) होगा और उसमें विषमता शून्य होगी। यदि ऐसी स्थिति नहीं है तो मध्यक और भूयिष्ठक के बीच का अन्तर विषमता है। फिर विषमता गुणक प्राप्त करने के लिये इस अन्तर को सम्बन्धित अपकिरण-माप (σ अथवा δ) से विभाजित कर दिया जाता है। इनके सूत्र इस प्रकार दिये जा सकते हैं :—

$$Sk = a - Z$$

$$(j) = \frac{a-Z}{\sigma} \text{ अथवा } (j) = \frac{a-Z}{\delta} \text{ अथवा } (j) = \frac{a-Z}{\delta M}$$

कभी कभी भूयिष्ठक ज्ञात करना असम्भव हो जाता है। ऐसी स्थिति में मध्यक, मध्यका और भूयिष्ठक के आपसी सम्बन्ध वाले समीकरण के आधार पर भूयिष्ठक का अनुमान लगा लिया जाता है। समीकरण है—

$$Z = a - 3\,(a - M)$$

अथवा $a - Z = 3\,(a - M)$

अत: $Sk = 3\,(a - M)$, और

$$\text{Coefficient of } Sk = \frac{3(a-M)}{\sigma}$$

मध्यक और मध्यका के अन्तर $(a - M)$ द्वारा भी विषमता निकाली जाती है, किन्तु यह विषमता उपर्युक्त सूत्रों से निकाली गई विषमता के मूल्य का करीब $\frac{1}{3}$ होती है। विषमता गुणक निकालने के लिये इस दशा में प्रमाप-विचलन के स्थान पर मध्यक विचलन से भाग देना अधिक उचित है, क्योंकि इससे विषमता गुणक का परिमाण कुछ अधिक प्राप्त होगा। यह इसलिये कि मध्यक-विचलन का मूल्य प्रमाप विचलन से कम होता है। इस आधार पर—

$$Sk = a - M, \quad C. \text{ of } Sk = \frac{a-M}{\sigma}, \quad C. \text{ of } Sk. = \frac{a-M}{\delta}$$

ऊपर दिये गये विषमता-गुणकों में निम्नलिखित गुणक, जिसको ज्ञात करने का श्रेय कार्ल पियर्सन को है, सर्वश्रेष्ठ माना जाता है

$$\text{Coefficient of } Sk = \frac{a-Z}{\sigma}$$

निम्नलिखित उदाहरण में प्रथम रीति से विषमता एवं उसके गुणक को ज्ञात करने का ढंग बतलाया जा रहा है :—

Illustration 20 :—

Calculate the Coefficient of Skewness from the following table giving the marks obtained by 500 candidates in an examination paper :—

Marks below	10	20	30	40	50	60	70	80
No. of candidates	30	70	120	168	192	354	486	500

Solution :—

विषमता गुणक निकालने के पहले यह सोच लेना चाहिये कि किस सूत्र का प्रयोग करना है और उस सूत्र के अनुसार किन किन मापों का निकालना आवश्यक है। यदि कार्ल पियर्सन (Karl Pearson) के सूत्र द्वारा विषमता गुणक निकालना है, तो हमें पहले मध्यक (a), भूयिष्ठक (Z) और प्रमाप विचलन (σ) के मूल्य निकालने पड़ेंगे।

CALCULATION OF THE MEAN AND THE STANDARD DEVIATION OF THE MARKS OBTAINED BY 500 STUDENTS

Marks group	Mid-values (x)	Frequency (f)	Deviations from ass. av. 45 (dx)	Deviations taking 10 common (dx')	Product of Col. (3)×(5) (fdx')	Product of Col. (5)×(6) (fdx'^2)
0—10	5	30	—40	—4	—120	480
10—20	15	40	—30	—3	—120	360
20—30	25	50	—20	—2	—100	200
30—40	35	48	—10	—1	— 48	48
40—50	45	24	0	0	0	0
50—60	55	162	+10	+1	+162	162
60—70	65	132	+20	+2	+264	528
70—80	75	14	+30	+3	+ 42	126
		$\Sigma f = 500$			$\Sigma fdx' =$ +80	$\Sigma fdx'^2 =$ 1,904

$$a = a' \pm \left\{ \frac{\Sigma fdx'}{\Sigma f} \right\} \times \text{Common Factor}$$

$$= 45 \pm \left\{ \frac{+80}{500} \right\} \times 10$$

$$= 46.6 \text{ marks}$$

$$\sigma = \sqrt{\left\{ \frac{\Sigma fdx'^2}{\Sigma f} \right\} - \left\{ \frac{\Sigma fdx'}{\Sigma f} \right\}^2} \times \text{Common Factor}$$

$$= \sqrt{\left\{ \frac{1,904}{500} \right\} - \left\{ \frac{+80}{500} \right\}^2} \times 10$$

$$= 19.45 \text{ marks}$$

Calculation of Mode by grouping

Marks group	Fre-quency	Grouping in				
		Twos	Twos	Threes	Threes	Threes
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0—10	30	70		120		
10—20	40		90		138	
20—30	50	98				122
30—40	48		72			
40—50	24	186		234		
50—60	162		294		318	
60—70	132	146				308
70—80	14					

चूंकि वर्गण (वर्गण तालिका पृष्ठ ३८३ पर है) में (50-60) वाला वर्ग सबसे अधिक बार आया है, अतः यही भूयिष्ठ वर्ग है। सूत्रानुसार

$$Z = l_1 + \frac{f_1 - f_o}{2f_1 - f_o - f_2} \times (l_2 - l_1)$$

$$= 50 + \frac{162 - 24}{324 - 24 - 132} \times (60 - 50)$$

$$= 58.2 \text{ marks.}$$

ANALYSIS TABLE

Column Group	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50	50—60	60—70	70—80
(1)						*		
(2)					*	*		
(3)						*	*	
(4)				*	*	*		
(5)					*	*	*	
(6)						*	*	*
Total				1	3	6	3	1

अब कार्ल पियर्सन का सूत्र प्रयोग में लाते हुये

$$\text{Coefficient of } Sk = \frac{a - Z}{\sigma}$$

$$= \frac{46.6 - 58.2}{19.45}$$

$$= -0.596 \text{ (Negative } j \text{)}$$

चतुर्थांश विचलन रीति (The Quartile Deviation Method)

एक संमित आवृत्ति वितरण में प्रथम चतुर्थांश और तृतीय चतुर्थांश मध्यका से समान दूरी पर स्थित होते हैं। यदि वे समान दूरी पर नहीं हैं, तो इसका यह अर्थ हुआ कि वितरण में विषमता है।

अतः $Sk = (Q_3 - M) - (M - Q_1)$

$$= Q_3 - M - M - Q_1$$

$$= Q_3 - Q_1 - 2M$$

विषमता के इस माप को गुणक में परिवर्तित करने के लिये इसमें मध्यका

से लिये गये दोनों चतुर्थांशों के अन्तर के योग से भाग दे दिया जाता है। इसलिये विषमता गुणक का सूत्र हुआ :—

$$j=\frac{(Q_3-M)-(M-Q_1)}{(Q_3-M)+(M-Q_1)} \quad \text{अथवा} \quad j=\frac{Q_3-Q_1-2M}{Q_3-Q_1}$$

Illustration 21 :—

Compute the Coefficient of Skewness for the following distribution of scores of 50 post-graduate commerce students.

Scores		Frequency
140—150	...	4
150—160	...	6
160—170	...	10
170—180	...	18
180—190	...	9
190—200	...	3

Solution :—

COMPUTATION OF THE MEDIAN, LOWER QUARTLLE AND UPPER QUARTILE OF SCORES OF 50 COMMERCE STUDENTS

Scores (x)	Frequency (f)	Cumulative Frequency (cf)
140—150	4	4
150—160	6	10
160—170	10	20
170—180	18	38
180—190	9	47
190—200	3	50

$$\textit{Median } (m) = \text{Size of } \left\{\frac{N+1}{2}\right\} \text{ th item}$$

$$= \text{Size of } \left\{\frac{50+1}{2}\right\} \text{ th item}$$

=Size of 25.5th item which falls in median group (170—180)

$$Median\ (M)=l_1+\frac{l_2-l_1}{f_1}\times(m-c)$$

$$=170+3.06$$

$$=173.06 \text{ marks}$$

q_1=Size of $\left\{\frac{N+1}{4}\right\}$th item
=Size of $\left\{\frac{50+1}{4}\right\}$th item
=Size of 12.75th item
which falls in group (160—170)

$$Q_1=l_1+\frac{l_2-l_1}{f_1}(q_1-c)$$

$$=160+\frac{(170-160)}{10}\times(12.75-10)$$

$$=162.75 \text{ marks}$$

q_3=Size of $\left\{\frac{3(N+1)}{4}\right\}$th item
=Size of $\left\{\frac{3(50+1)}{4}\right\}$th item
=Size of 38.25th item
which falls in group (180—190)

$$Q_3=l_1+\frac{l_2-l_1}{f_1}(q_3-c)$$

$$=180+\frac{(190-180)}{9}\times(38.25-38)$$

$$=180.28 \text{ marks}$$

विषमता गुणक निकालने वाली चतुर्थांश विचलन रीति के अनुसार

$$\text{Coefficient of Skewness } (j)=\frac{(Q_3-M)-(M-Q_1)}{(Q_3-M)+(M-Q_1)}$$

$$=\frac{(180.28-173.06)-(173.06-162.75)}{(180.28-173.06)+(173.06-162.75)}$$

$$=\frac{7.22-10.31}{7.22+10.31}$$

$$=\frac{-3.09}{17.53}$$

$$=-0.18$$

जिस प्रकार चतुर्थांश विचलन केवल आवृत्ति वितरण के केवल मध्य के 50% भाग के अपकिरण का अध्ययन करता है, उसी प्रकार इस रीति द्वारा

निकाली गई विषमता भी केवल मध्य के 50% भाग का ही अध्ययन करती है। इस रीति से हम आवृत्ति वितरण के चरम मूल्यों (Extreme Items) का अध्ययन नहीं कर पाते। किन्तु फिर भी यह रीति बड़ी सरल है, और विषमता का यथोचित अध्ययन करती है। डा० बाउले (Dr. Bowley) के अनुसार 1.0 विषमता गुणक साधारण विषमता व्यक्त करता है जब कि 3.0 अत्यधिक विषमता का परिचायक है। इस रीति द्वारा प्राप्त उत्तर कार्ल पियर्सन वाली रीति के बराबर नहीं होता, यह ध्यान रखना चाहिये।

घन विचलन रीति (Cubed Deviation Method)

इस रीति के अनुसार विषमता तृतीय अपकिरण घात (Third Moment of Dispersion) का घनमूल है। विषमता-गुणक निकालने के लिये विषमता में प्रमाप-विचलन अथवा मध्यक विचलन का भाग देना पड़ता है।

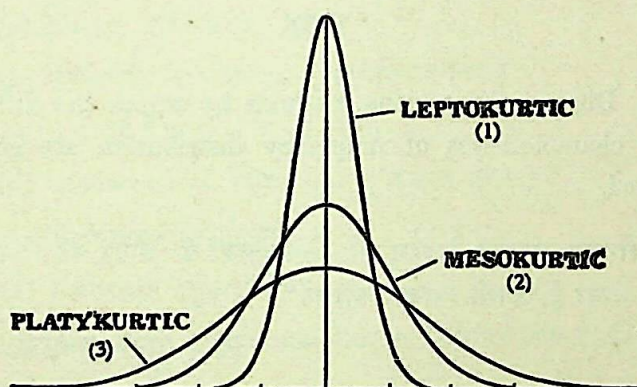
$$(j) = \frac{\sqrt[3]{\frac{\Sigma dx^3}{n}}}{\sigma} \quad \text{अथवा} \quad \frac{\sqrt[3]{\frac{\Sigma dx^3}{n}}}{\delta}$$ (साधारण श्रेणी में)

$$(j) = \frac{\sqrt[3]{\frac{\Sigma fdx^3}{n}}}{\sigma} \quad \text{अथवा} \quad \frac{\sqrt{\frac{\Sigma fdx^3}{\Sigma f}}}{\delta}$$ (विच्छिन्न व अविच्छिन्न माला में)

विषमता का महत्व (Importance of the Measure of Skewness)

विषमता द्वारा हमें यह ज्ञात हो जाता है कि आवृत्ति वितरण के वक्र का क्या स्वरूप होगा और वह दाहिनी ओर को झुकेगा या बाईं ओर को। अपकिरण द्वारा हमें किसी समंक माला अथवा आवृत्ति वितरण में मध्यक से अन्य चल-मूल्यों का विचलन क्या है यह ज्ञात होता है, किन्तु हम यह नहीं जान सकते कि उसमें संमितता है अथवा नहीं। किन्तु विषमता तथा उसके गुणक द्वारा हमें यह अच्छी तरह ज्ञात हो जाता है कि आवृत्ति वितरण में प्रसामान्य स्थिति (Normality) है अथवा नहीं, और यदि नहीं है तो विषमता धनात्मक (+) है या ऋणात्मक (−)। आर्थिक तथा सामाजिक समस्याओं के अध्ययन में जहाँ साधारणतः समंक मालाओं में संमितता का मिलना कठिन होता है, इस माप का प्रयोग कम होता है परन्तु प्रयोगशालाओं में जहाँ अनुसंधान सम्बन्धी समंक एकत्र किये जाते है, इसका विशेष महत्व है।

पृथु-शीर्षत्व (Kurtosis)

पृथु-शीर्षत्व वह माप है जो हमें सूचित करता है कि किसी आवृत्ति-वितरण के आधार पर निर्मित वक्र किस परिमाण तक नोकदार शीर्ष वाला (Peaked) अथवा चिपटे शीर्ष का (Flat-topped) है।* यह माप चतुर्थ घात (Fourth Moment) पर आधारित है जिसे ज्ञात करने का श्रेय कार्ल पियर्सन को ही है। निम्न चित्र में पृथु-शीर्षत्व का विन्दुरेखीय प्रदर्शन किया गया है :—

चित्र में तीन वक्र दिखलाये गये हैं। दूसरा वक्र सामान्य वक्र (Normal Curve or Mesokurtic) वक्र है। इस वक्र के आधार पर यदि हम अन्य दोनों वक्रों की तुलना करते हैं, तो पहला वक्र हमें अधिक नोकदार शीर्ष वाला (Leptokurtic) तथा तीसरा अधिक चिपटे शीर्ष वाला (Platykurtic) ज्ञात होता है।† जिस वक्र का शीर्ष सामान्य वक्र के शीर्ष की अपेक्षा अधिक चिपटा होता है उसमें पृथु-शीर्षत्व पाया जाता है। इसके विपरीत जिस वक्र का शीर्ष अधिक नोकदार होता है उसमें पृथु-शीर्षत्व का अभाव रहता है।

---

*A measure of *Kurtosis* indicates the degree to which a curve of the frequency distribution is peaked or flat-topped—**Croxton and Cowden.**

†Platykurtic curves are like the platypus, squat with short tails; leptokurtic curves are like the Kangaroo, high with long tails—noted for "lepping"!—**Student, quoted by Johnson and Jackson.**

पृथु-शीर्षत्व ज्ञात करने का सूत्र यह है :—

$$K(\beta_2) = \frac{\pi_4}{\pi_2^2}$$, (अर्थात् चतुर्थ घात ÷ द्वितीय घात का वर्ग)

सामान्य वक्र में β_2 बराबर 3 के होता है। यदि इस सूत्र के आधार पर निकाला गया पृथु-शीर्षत्व उससे अधिक हो तो वक्र अधिक नोकदार, व कम हो तो अधिक चिपटे शीर्ष वाला समझना चाहिये।

प्रश्न

1. Discuss the various methods by which the differences in the characteristics of frequency distribution are generally measured.

साधारणत: आवृत्ति वितरण की विशेषताओं के अन्तर को जिन रीतियों से मापा जाता है, उनकी व्याख्या कीजिये।

(बी० कॉम०, बनारस, १९५८)

2. Explain with the help of a suitable example, the meaning of 'Dispersion'. How does it differ from 'Skewness', and how is it measured?

एक उपयुक्त उदाहरण की सहायता से यह समझाइये कि 'अपकिरण' का क्या अर्थ है। यह 'विषमता' से किस प्रकार भिन्न है, और इसे कैसे मापा जाता है?

(बी० कॉम०, बनारस, १९५६)

3. What is meant by dispersion? What are the methods of computing measures of dispersion? Illustrate the practical utility of such measures.

अपकिरण का क्या अर्थ है? अपकिरण की मापों को ज्ञात करने की कौन रीतियाँ हैं? इन मापों की व्यवहारिक उपयोगिता का चित्रण कीजिये।

(एम० कॉम०, इलाहाबाद, १९४५)

4. What is meant by Skewness? How does it differ from Dispersion? What is the practical utility of these measures?

विषमता का क्या अर्थ है? इसमें व अपकिरण में क्या अन्तर है? इन मापों की व्यवहारिक उपयोगिता क्या है?

(एम० ए०, पंजाब, १९५२).

5. Write short notes on the following:—

निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणियाँ लिखिये :—

(a) Range (विस्तार)

(b) Quartile Deviation (चतुर्थांश विचलन)

(c) Lorenz Curve (लारेंज वक्र)

(d) Coefficient of Variation (विचरण गुणक)

(e) Skewness (विषमता)

(f) Kurtosis (पृथु-शीर्षत्व)

(g) Properties of Normal Curve (सामान्य वक्र की विशेषतायें)

6. Yield of sugar-cane, in tons, per acre, on twenty farms in the U. P. was as follows:—

18, 15, 28, 20, 17, 23, 16, 16, 20, 19, 19, 25, 16, 13, 21, 23, 21, 27, 18 and 22.

Calculate the Standard Deviation.

(बी० कॉम०, आगरा, १९५२ तथा बनारस, १९४६)

(σ=3.889 *tons, approximately*)

7. The mean daily sunshine for Great Britain and Ireland for the years 1881-1915 is given below:—

—	Jan.	Feb.	Mar.	Apl.	May	June	July	Aug.	Sep.	Oct.	Nov.	Dec.
Hrs.	1.42	2.40	3.63	5.19	6.18	6.26	5.68	5.19	4.47	2.99	1.86	1.16

Find the average number of hours' sunshine per day and the standard deviation.

(बी॰ कॉम॰, बनारस, १९५५)

(a=3.87 hours and σ=1.79 hours)

8. Calculate the Standard Deviation from the following data :—

Size of item	6	7	8	9	10	11	12
Frequency	3	6	9	13	8	5	4

(बी॰ कॉम॰, नागपुर, १९४४)

(σ=1.6 units)

9. Calculate (*a*) Median Coefficient of dispersion and (*b*) Mean Coefficient of dispersion from the following data :—

Size of items 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16
Frequency 2, 4, 5, 3, 2, 1, 4

(एम॰ ए॰, आगरा, १९५४)

(C. of δ_M=0.40475 and C. of δ_a=0.34)

10. Compute the Mean Deviation from the Mean and from the Median for the following distribution of the scores of 50 college students :—

Scores		Frequency
140—150	...	4
150—160	...	6
160—170	...	10
170—180	...	18
180—190	...	9
190—200	...	3

(एम॰ कॉम॰, बनारस, १९५७)

(δ_a=10.56 and δ_M=10.24)

11. Calculate the mean deviation and the standard deviation from the following data :—

Exceeding	Not Exceeding	Frequency
$7\frac{1}{2}$	$8\frac{1}{2}$	2
$8\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{2}$	4
$9\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{2}$	5
$10\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{2}$	7
$11\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{2}$	9
$12\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$	3
$13\frac{1}{2}$	$14\frac{1}{2}$	1

(बी० कॉम०, बनारस, १९५१)

(*δM=1.23 units and σ=1.49 units*)

12. Compute the mean and the standard deviation from the following data, drawn *randomly* :—

Monthly Expenditure on Food and Luxuries		Number of students
78—82	...	3
73—77	...	6
68—72	...	7
63—67	...	12
58—62	...	17
53—57	...	13
48—52	...	9
43—47	...	7
38—42	...	4
33—37	...	2
28—32	...	1

(एम० कॉम०, बनारस, १९५७)

(*a=58.27 units and σ=11.32 units*)

13. Find the standard deviation and the coefficient of variation from the following data :—

Wages		Number of persons
Up to Rs. 10	...	12
,, ,, ,, 20	...	30
,, ,, ,, 30	...	65
,, ,, ,, 40	...	107
,, ,, ,, 50	...	157
,, ,, ,, 60	...	202
,, ,, ,, 70	...	222
,, ,, ,, 80	...	230

(बी० कॉम०, बनारस, १९५४)

(σ=Rs. 17.26 and Coefficient of Variation=42.69%)

14. Calculate the mean and standard deviation of the following data :—

Age under		*Number of persons*
10 years	...	15
20 ,,	...	30
30 ,,	...	53
40 ,,	...	75
50 ,,	...	100
60 ,,	...	110
70 ,,	...	115
80 ,,	...	125

(एम० ए०, राजपूताना, १९५७)

(a=35.16 years and σ=19.7 years)

15. Calculate Karl Pearson's Coefficient of Skewness from the following data :—

Marks		*Number of students*
Above 0	...	150
,, 10	...	140

Above	20	...	100
,,	30	...	80
,,	40	...	80
,,	50	...	70
,,	60	...	30
,,	70	...	14
,,	80	...	0

(एम० ए०, राजपूताना, १९५६)

(σ=22.8, a=39.3 and M=45.5. j=—0.82, using the formula j=3 (a—M)/σ as the Z is ill-defined)

16. A collar manufacturer is considering the production of a new style of collar to attract youngmen. The following measurements relate to a typical group of college students :—

Neck Circumference Mid-value (inches)		No. of students
12.5	...	4
13.0	...	19
13.5	...	30
14.0	...	63
14.5	...	66
15.0	...	29
15.5	...	18
16.0	...	1
16.5	...	1

Compute the mode and the standard deviation.

(बी० कॉम०, बनारस, १९५३)

(Z=14.2875 inches and σ=0.721 inches)

17. A manufacturer of collars supplies to you the following statistics regarding the neck-circumferences of the students of the Banaras Hindu University :—

Neck-circumference in inches		No. of students
12.0	...	5
12.5	...	20
13.0	...	30
13.5	...	43
14.0	...	60
14.5	...	56
15.0	...	37
15.5	...	16
16.0	...	3

Calculate the standard deviation and advise the manufacturer as to the largest and smallest size of collars he should make in order to meet the needs of most of his customers (by using the criterion mean ± 3 standard deviation).

(बी० कॉम०, बनारस, १९५८)

($\sigma=0.87$ *inches*, $a=14.01$ *inches, Largest size of collar being* $14.01+3\times0.87=16.62$ *inches and Smallest size being* $14.01-3\times0.87=11.40$ *inches*)

18.(*a*) The following is a random sample from a given population. Compute the Arithmetic Mean, the Median and the sample estimate of the population Variance :—

Lower-class boundry	Upper-class boundry		Frequency
9.5	14.5	...	1
14.5	19.5	...	7
19.5	24.5	...	5
24.5	29.5	...	5
29.5	34.5	...	2

(*b*) Calculate the Coefficient of Variation and write a brief note on its usefulness.

(एम० कॉम० बनारस, १९५६)

($a=22$, $M=22$, $\sigma^2=30$ *and* $\sigma=5.477$ *units.* $C.V.=24.9\%$)

19. What have you to say about the age distribution of population in the two places, *A* and *B*, in the following table ?—

Age		Number of persons (in thousands) *A*	*B*
0—10	...	12	12
10—20	...	11	10
20—30	...	8	20
30—40	...	6	22
40—50	...	5	18
50—60	...	3.5	12
60—70	...	2.5	4
70—80	...	2	2

(बी० कॉम०, बनारस, १९५२)

(C.V. in place A=74% and C.V. in place B=51.5% Hence, greater variability in A)

20. From the prices of shares *X* and *Y* given below, state which share is more stable in value :—

X	55,	54,	52,	53,	56,	58,	52,	50,	51,	49
Y	108,	107,	105,	105,	106,	107,	104,	103,	104,	101

(बी० कॉम०, बनारस, १९५२)

(C.V. of X shares=4.992% and C.V. of Y shares=1.905%. Hence, Y shares are more stable)

21. The following table gives goals scored by two teams *A* and *B* in a football season :—

No. of goals scored in a match		No. of matches *A*	*B*
0	...	27	17
1	...	9	9
2	...	8	6
3	...	5	5
4	...	4	3

Find the team which is more consistent in its performance.

(बी० कॉम०, सागर, १९५८ तथा बनारस, १९५७)

(Coefficient of Variation: Team A—123.8% and Team B—109.0%. Hence, Team B is more consistent).

22. The following is a record of the number of bricks laid each day for 20 days by two bricklayers *A* and *B*:—

A—725, 700, 750, 650, 675, 725, 675, 725, 625, 675, 700, 675, 725, 675, 800, 650, 675, 625, 700, 650.

B—575, 625, 600, 575, 675, 625, 575, 550, 650, 625, 550, 700, 625, 600, 625, 650, 575, 675, 625, 600.

Calculate the coefficient of variation in each case, and discuss the relative consistency of the two bricklayers. If the figures for *A* were in every case 10 more and those for *B* in every case 20 more than the figures given above, how would the answer be affected ?

(एम० कॉम०, बनारस, १९५०)

(C.V. A—10.3%, B—6.6%. Hence, B is more consistent. In the latter case the Standard Deriations will remain the same but Means will increasc by 10 and 20 respectively. Then C.V. A—10.1%, B—6.4%. No effect on their consistency.)

23. In two factories *A* and *B* engaged in the same industry in an area, the average weekly wages in rupees and the standard deviation are as follows :—

Factory	Average weekly wages	S. D.	Number of wage-earners
A	34.5	5	476
B	28.5	4.5	524

(*a*) Which factory, *A* or *B* pays out the larger amount as weekly wages ?

(*b*) What is the average weekly wages of all workers in the two factories taken together ?

(*c*) What is the Coefficient of Variation in the case of each factory separately ? What inference do you draw from a comparison of these two figures ?

(एम० ए०, बनारस, १९५५)

(*Factory* A *pays more because* $34.5 \times 476 > 28.5 \times 524$. *Combined a=Rs.* 31.356. *C.V. in factory* A=14.5% *and in* B=15.8%. *More stability of wages in factory* A)

24. Compute the quartile coefficient of dispersion and skewness of the following array :—

Central size	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
Frequency	2,	9,	11,	14,	20,	24,	20,	16,	5,	2

(बी० कॉम०, आगरा, १९५७)

($Q_1=4.143$, *M*=5.750, $Q_3=7.150$, *Coefficient of Q.D*=0.27 *and Coefficient of Sk.*=—0.07 *units. It is a Continuous Series*)

25. Find mean, mode, standard deviation and a coefficient of skewness for the following :—

Age in years *below*	10	20	30	40	50	60
No. of persons	15	32	51	78	97	109

(सर्टिफिकेट, बनारस, १९५५)

(σ=16.4, *a*=30.5 *and Z*=35.0. *Hence j*=—0.27)

26. A distribution consists of three components with frequencies of 200, 250 and 300, having means of 25, 10 and 15, and standard deviations of 3, 4 and 5 respectively. Find the mean and the standard deviation of the combined distribution.

(एम० कॉम०, बनारस, १९५४)

(*Combined a*= 16 *units and Combined* σ= 7.2 *units*)

27. Find the Coefficient of Skewness of the two groups given below, and point out which distribution is more skew :—

Marks		Group (A)	Group (B)
55—58	...	12	20
58—61	...	17	22
61—64	...	23	25
64—67	...	18	13
67—70	...	11	7

(एम ए०, आगरा, १९५४)

(Quartile Coefficient of Sk. in Group A=—0.016 and in Group B=—0.05. Hence, Group B is more skew)

28. From the following information regarding the marks obtained at College and the Competitive Examinations, find which group is more homogeneous in intelligence :—

College Examination			Competitive Examination		
Marks		No. of students	Marks		No. of students
100—150	...	20	1200—1250	...	50
150—200	...	45	1250—1300	...	85
200—250	...	50	1300—1350	...	72
250—300	...	25	1350—1400	...	60
300—350	...	19	1400—1450	...	16

Which of the two series is more skew ?

(बी० कॉम०, आगरा, १९४८)

(College Examination : C. of V.=27.1% and Q. C. of Sk.= +0.02 ; Competitive Examination : C. of V.=4.4% and Q. C. of Sk.=+0.08. Hence, the second group is more homogeneous, and more skew in intelligence)

29. List the chief properties of the normal distribution. Why is this distribution given a central place in statistics ?

सामान्य आवृत्ति वितरण की प्रमुख विशेषताओं का उल्लेख कीजिये। सांख्यिकी में इस वितरण को क्यों इतना महत्व दिया जाता है।

(एम० कॉम०, बनारस, १९५६)

अध्याय ११

सहसम्बन्ध व प्रतीप-गमन
(Correlation and Regression)

(सहसम्बन्ध की परिभाषा—सहसम्बन्ध की महत्ता—सहसम्बन्ध का परिमाण—सहसम्बन्ध ज्ञात करने की रीतियाँ—विक्षेप चित्र—विक्षेप चित्र की सीमायें—सहसम्बन्ध विन्दुरेख—कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणक—ऋजु व लघु रीतियाँ—वर्गान्तर मालाओं में सहसम्बन्ध—कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणक की परिकल्पनायें—संभाव्य विभ्रम—स्पियरमैन की अनुस्थिति रीति—संगामी विचलन रीति—कालान्तर मालाओं में सहसम्बन्ध—प्रतीपगमन—प्रश्न)

सहसम्बन्ध की परिभाषा (Meaning of Correlation)

समंक मालाओं की केन्द्रीय-प्रवृत्ति तथा उनके अपकिरण व विषमता का अध्ययन हम पिछले अध्यायों में कर चुके हैं। ये माप प्रत्येक माला की रचना व उसकी वनावट का पूर्णरूप से स्पष्टीकरण करते हैं। किन्तु कभी कभी हमें ऐसी मालाओं की विशेषताओं पर प्रकाश डालने की आवश्यकता पड़ती है जिनमें दो चल-मूल्य (Variables) साथ-साथ परिवर्तन प्रदर्शित करते रहते हैं, जैसा माँग (Demand) व मूल्य (Price) से सम्बन्धित समंक मालाओं में दिखलाई पड़ता है। ऐसी मालाओं में हम यह जानना चाहते हैं कि उनके मूल्य के बढ़ने-घटने की प्रवृत्ति में कहाँ तक अन्योन्याश्रितता (Interdependence) है। यदि हम देखते हैं कि जब एक माला के मूल्य बढ़ते हैं, तो दूसरी माला के मूल्य में भी बढ़ाव दृष्टिगोचर होता है अथवा जब एक माला के मूल्य घटते हैं तो दूसरी के मूल्य में भी गिराव दिखलाई पड़ता है, तो इस प्रकार की विचलन-शीलता (Co-variation) को हम सहसम्बन्ध (Correlation) कहते हैं।* सहसम्बन्ध की आशा

---

*If it is proven true that in a large number of instances two variables tend always to fluctuate in the same or in opposite directions we consider that the fact is established and that a relationship exists. This relationship is called correlation—**King.***

हम उस स्थिति में भी कर सकते हैं, जब एक माला के मूल्य घट रहे हों किन्तु दूसरी के मूल्य बढ़ रहे हों, अथवा जब एक माला के मूल्य बढ़ रहे हों किन्तु दूसरी के मूल्य घट रहे हों। प्रथम स्थिति में जब दोनों मालाओं के मूल्य एक ही दिशा में बढ़ते या घटते हैं तो सहसम्वन्ध प्रत्यक्ष (Direct), अनुलोम अथवा धनात्मक (Positive) कहलाता है, और दूसरी स्थिति में जब उनके मूल्य विपरीत दिशाओं में बढ़ते या घटते हैं तो सहसम्बन्ध अप्रत्यक्ष (Indirect), विलोम अथवा ऋणात्मक (Negative) कहलाता है।

सहसम्बन्ध की महत्ता (Importance of Correlation)

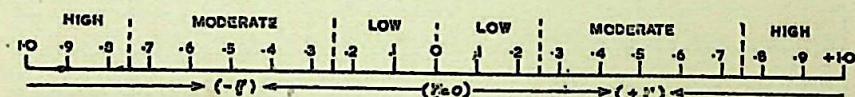
सांख्यिकी में सहसम्बन्ध के सिद्धान्त का अत्यधिक महत्व है। इस सिद्धान्त को प्रतिपादित करने का श्रेय फ्रांसिस गाल्टन (Francis Galton) व कार्ल पियर्सन (Karl Pearson) को दिया जाता है जिन्होंने प्राणि-शास्त्र (Biology) की अनेक समस्याओं का अध्ययन इस सिद्धान्त के आधार पर किया है। अनेक वैज्ञानिक, सामाजिक, आर्थिक अथवा व्यावसायिक घटनाओं में हमें सहसम्वन्ध की कल्पना दृष्टिगोचर होती है। विज्ञान की अनेक समस्याओं के कारण (Cause) व प्रभाव (Effect) में गहरा सहसम्बन्ध होता है। व्यवहारिक जीवन में भी हम देखते हैं कि वेतन व व्यय, आयात व उत्पादन, विक्रय व लाभ, बुद्धि व सफ़लता, आदि अनेक समस्याओं में सहसम्वन्ध पाया जाता है। मनोविज्ञान, शिक्षा-शास्त्र, कृषि-अर्थशास्त्र, आदि की अनेक समस्याओं के अध्ययन में इस सिद्धान्त का व्यापक उपयोग किया जाता है। इसके अतिरिक्त दो समंक मालाओं में सहसम्वन्ध की मात्रा निश्चित कर लेने के उपरान्त उनका तुलनात्मक अध्ययन करने में भी विशेष सुविधा होती है। सहसम्वन्ध का सिद्धान्त हमें विश्वास दिलाता है कि एक माला के चल-मूल्यों के आधार पर यदि दूसरी माला के चल-मूल्यों का आन्तरगणन (Interpolation) अथवा बाह्यगणन (Extrapolation) किया जाय तो वह अधिक विश्वसनीय होगा।

---

*If two or more quantities vary in sympathy, so that movements in the one *tend* to be accompanied by corresponding movements in the other (s), then they are said to be correlated—**Connor.**

Whenever some definite connection exists between the two or more groups, classes or series of data, there is said to be correlation—**Boddington.**

सहसम्बन्ध का परिमाण (Degree of Correlation)

समंक मालाओं के विभिन्न मूल्यों का निरीक्षण करने से यह तो ज्ञात हो जाता है कि उनमें सहसम्बन्ध है अथवा नहीं, किन्तु उसके आंकिक परिमाण का वोध नहीं हो पाता। अतः इसके लिये सहसम्वन्ध गुणक (Coefficient of Correlation) ज्ञात करने की आवश्यकता पड़ती है। प्रत्यक्ष, अनुलोम अथवा धनात्मक पूर्ण सहसम्वन्ध (Perfect Correlatein) की स्थिति में सहसम्वन्ध गुणक (+1.0), तथा अप्रत्यक्ष, विलोम अथवा ऋणात्मक पूर्ण सहसम्वन्ध की स्थिति में यह (—1.0) होता है। जहाँ समंक मालाओं के मूल्यों में सहसम्वन्ध का पूर्ण अभाव (No Correlation) रहता है, वहाँ यह गुणक शून्य (0) होता है। सहसम्वन्ध गुणक शून्य (0) से (+1.0) की ओर ज्यों-ज्यों बढ़ता जाता है, सहसम्बन्ध का धनात्मक परिमाण भी अधिकाधिक होता जाता है। इसके विपरीत ज्यों-ज्यों वह शून्य (0) से (—1.0) की ओर बढ़ता जाता है सहसम्वन्ध के ऋणात्मक परिमाण में भी वृद्धि होती जाती है। निम्न चित्र को देखने से सहसम्वन्ध परिमाण की व्याख्या समझ में आ जायगी :—

सहसम्बन्ध ज्ञात करने की रीतियाँ (Methods of determining Correlation)

दो या दो से अधिक समंक मालाओं के मूल्यों में सहसम्बन्ध ज्ञात करने की निम्नलिखित प्रमुख रीतियाँ हैं :—

(अ) विक्षेप चित्र (Scatter Diagram or Dotogram)

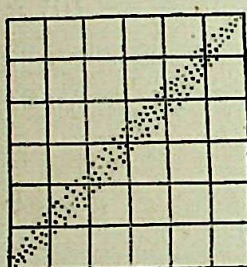
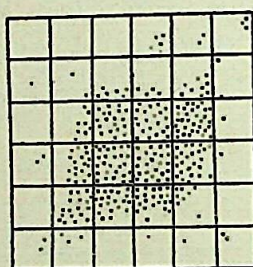
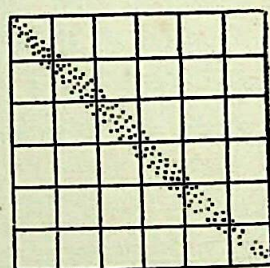
(ब) बिन्दुरेखीय रीति (Graphical Method)

(स) कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणक (Karl Pearson's Coefficient of Correlation)

(द) स्पियरमैन का अनुस्थिति सहसम्बन्ध गुणक (Spearmans' Rank Coefficient of Correlation)

(इ) संगामी विचलन गुणक (Coefficient of Concurrent Deviations)

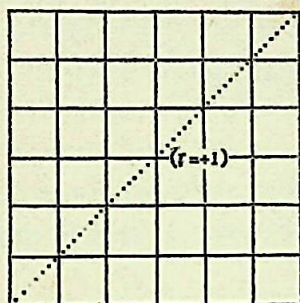
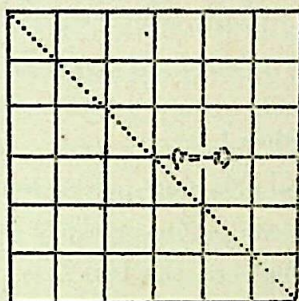
विक्षेप चित्र (Scatter Diagram)

दो समंक मालाओं में दिये गये मूल्यों का सहसम्बन्ध चित्रों की सहायता से बड़ी सुगमता पूर्वक प्रदर्शित किया जा सकता है। x के विभिन्न मूल्यों को भुजाक्ष (Abscissa) पर लेकर यदि हम तत्सम्बन्धी y के मूल्यों को किसी बिन्दुरेखीय पत्र पर प्राङ्कित करें, तो हमें एक ऐसा चित्र प्राप्त होगा जिसमें बिन्दुओं का एक समूह दिखलाई पड़ेगा। इस प्रकार के चित्र को ही विक्षेप चित्र (Scatter Diagram) कहते हैं। यदि इन विन्दुओं में कोई समान-प्रवृत्ति दृष्टिगोचर होती है तो x और y के मूल्यों में सहसम्बन्ध होना निश्चित है, परन्तु यदि ये विन्दु अनेक दिशाओं में बिखरे हुए हैं, तो x और y के मूल्यों में सहसम्बन्ध होने की आशा कम है। विक्षेप चित्र के कुछ उदाहरण यहाँ दिये जा रहे हैं।

POSITIVE CORRELATION

NO CORRELATION

NEGATIVE CORRELATION

चित्र (१) में हम देखते हैं कि x और y के मूल्य साथ ही साथ बढ़ रहे हैं। अतः यहाँ अनुलोम अथवा धनात्मक (+) सहसम्बन्ध है।

चित्र (२) में सब विन्दु इधर-उधर विखरे हुए हैं और उनके बढ़ने-घटने की प्रवृत्ति में किसी प्रकार की समानता नहीं दृष्टिगोचर होती। अतः यहाँ x और y के मूल्यों में सहसम्वन्ध का अभाव है।

चित्र (३) में हम देखते हैं कि x के मूल्य बढ़ने पर y के मूल्य घट रहे हैं। अतः यहाँ विलोम अथवा ऋणात्मक (—) सहसम्बन्ध है।

पूर्ण अनुलोम (Perfect Positive) तथा पूर्ण विलोम (Perfect Negative) सह सम्वन्ध की स्थिति में सब बिन्दु एक सीधी रेखा (Straight Line) में आ जाते हैं, परन्तु यह याद रहे कि पहली स्थिति में यह रेखा बाईं ओर नीचे से दाहिनी ओर ऊपर को जाती है, जब कि दूसरी स्थिति में बाईं ओर ऊपर से दाहिनी ओर नीचे तक आती हुई दृष्टिगोचर होती है।

PERFECT POSITIVE CORRELATION

PERFECT NEGATIVE CORRELATION

इन चित्रों के अध्ययन के आधार पर यह कहा जा सकता है कि विक्षेप चित्र के विन्दु ऐसी रेखा के जितने ही पास होंगे, सहसम्वन्ध गुणक (Coefficient of Correlation) उतना ही अधिक होगा। इस रेखा को प्रतीप-गमन-रेखा (Regression Line) भी कहते हैं।

विक्षेप चित्र की सीमायें (Limitations of Scatter Diagram)

विक्षेप चित्र द्वारा दो समंक मालाओं में सहसम्वन्ध है या नहीं, तथा वह अनुलोम है अथवा विलोम, आदि बातों का पता लगाया जा सकता है, किन्तु यह निश्चित रूप से बतलाना कठिन है कि उसका परिमाण (Degree) क्या है। इसके द्वारा केवल चल-मूल्यों के बढ़ने-घटने की प्रवृत्ति में पाई जाने वाली समानता व असमानता देखी जा सकती है। इन बिन्दुओं के मध्य से जाने वाली सीधी रेखा को निश्चित करना भी कठिन है। विक्षेप चित्र की सबसे बड़ी उपयोगिता यह है कि इसके द्वारा यह ज्ञात हो जाने पर कि चलों में सहसम्वन्ध निहित है, अन्य सांख्यिकीय क्रियाओं को प्रोत्साहन मिलता है।

सहसम्बन्ध बिन्दुरेख (Correlation Graph)

सहसम्वन्ध विन्दुरेख द्वारा भी दो चल-मूल्यों में सहसम्वन्ध देखा जा सकता है। बिन्दुरेखीय पत्र पर सर्व प्रथम कोई उचित मापदण्ड लेकर प्रत्येक माला के विभिन्न मूल्यों को प्राङ्कित करके उनका रेखा-चित्र बना लिया जाता है, और फिर उन रेखाचित्रों का पारस्परिक अध्ययन किया जाता है। यदि दोनों रेखा-चित्र एक ही दिशा में उच्चावचन (Fluctuations) प्रदर्शित करते हैं, तो वहाँ अनुलोम सहसम्वन्ध का होना निश्चित है। किन्तु यदि एक

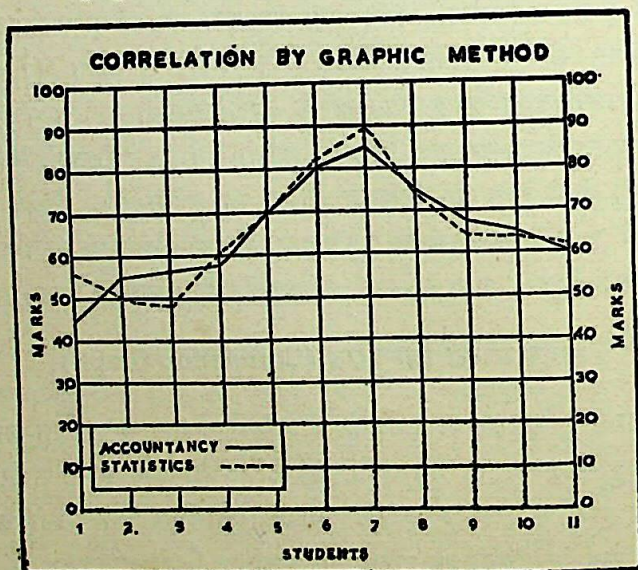
रेखाचित्र एक दिशा में जा रहा है और दूसरा दूसरी दिशा में, तो वहाँ सहसम्बन्ध विलोम होगा। यदि रेखाचित्रों में किसी प्रकार की कोई समानता नहीं जान पड़ती तो वहाँ सहसम्वन्ध का अभाव समझना चाहिये।

Illustration 1 :—

The following marks have been obtained by a batch of 11 students in Accountancy and Statistics. Is there any correlation between the two ?

Accountancy	45	55	56	58	70	80	85	75	68	65	60
Statistics	56	50	48	60	70	82	90	74	65	64	62

Solution :—

रेखाचित्र में लेखा कर्म (Accountancy) तथा सांख्यिकी (Statistics) में प्राप्त किये गये अंको को y-अक्ष पर तथा विद्यार्थियों को x-अक्ष पर दिखलाया जा रहा है—

चित्र को देखने से स्पष्ट हो जायगा कि दोनों विषयों के प्राप्तांकों में सहसम्बन्ध है।

कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणक

(Karl Pearsons' Coefficient of Correlation)

सहसम्वन्ध ज्ञात करने की यह रीति सर्वश्रेष्ठ समझी जाती है क्योंकि यह मध्यक (Arithmetie Mean) व प्रमाप-विचलन (Standard Deviation) पर आधारित है, जिनका प्रयोग उच्चतर सांख्यिकीय अध्ययन में किया जा सकता है। कार्ल पियर्सन ने प्राणिशास्त्र की समस्याओं के अध्ययनार्थ इस रीति का प्रतिपादन १८९० में किया था। इसका सूत्र है—

$$r = \frac{\Sigma\, dxdy}{n\, \sigma_x\, \sigma_y}$$

r stands for Coefficient of Correlation (सहसम्बन्ध गुणक)

$\Sigma\, dxdy$ stands for Product of Deviations (विचलनों का गुणनफल)

σ_x stands for Standard Deviation of X series (प्रथम माला का प्रमाप-विचलन)

σ_y stands for Standard Deviation of Y series (द्वितीय माला का प्रमाप-विचलन)

n stands for No. of pairs (पदों की संख्या)

$\frac{\Sigma\, dxdy}{n}$ stands for Co-variation (विचलनशीलता)

अतः इस सूत्र की सहायता से सहसम्वन्ध गुणक निकालने के लिये X व Y मालाओं के क्रमशः मध्यक निकाल कर उनसे विभिन्न मूल्यों के विचलन ज्ञात कर लेना चाहिये। विचलन निकालते समय (+) व (−) के चिन्हों का ध्यान रखना आवश्यक है। तत्पश्चात् विचलनों के पारस्परिक गुणनफल निकाल कर उनका योग कर लेना चाहिये। यही $\Sigma\, dxdy$ होगा। इसी मूल्य के धनात्मक होने पर सहसम्वन्ध गुणक (+), तथा ऋणात्मक होने पर (−) होगा। $\Sigma\, dxdy$ ज्ञात करने के उपरान्त दोनों मालाओं के प्रमाप-विचलन निकाल कर उनके गुणनफल में पदों की संख्या से पुनः गुणा कर लेना चाहिये। इस गुणनफल से $\Sigma\, dxdy$ में भाग देने पर सहसम्बन्ध गुणक प्राप्त होगा। जैसा ऊपर बतलाया जा चुका है, सहसम्वन्ध गुणक अधिक से अधिक (+1.0) अथवा कम से कम (−1.0) होना चाहिये।

Illustration 2 :—

The following table shows the marks obtained by ten students in Accountancy and Statistics :—

Student No.	1	2	3	4	5	6	6	8	9	10
Accountancy	45	70	65	30	90	40	50	75	85	60
Statistics	35	90	70	40	95	40	60	80	80	50

Find the Coefficient of Correlation

(बी० कॉम०, बनारस, १९५२)

Solution :—

CALCULATION OF r BY KARL PEARSON'S METHOD

Student No.	Accountancy (X)			Statistics (Y)			Product of Deviations ($dxdy$)
	Marks (x)	Deviations from 61 (dx)	Square of Deviations (dx^2)	Marks (y)	Deviations from 64 (dy)	Square of Deviations (dy^2)	
1	45	−16	256	35	−29	841	464
2	70	+ 9	81	90	+26	676	234
3	65	+ 4	16	70	+ 6	36	24
4	30	−31	961	40	−24	576	744
5	90	+29	841	95	+31	961	899
6	40	−21	441	40	−24	576	504
7	50	−11	121	60	− 4	16	44
8	75	+14	196	80	+16	256	224
9	85	+24	576	80	+16	256	384
10	60	− 1	1	50	−14	196	14
$n=10$	$\Sigma x=$ 610		$\Sigma dx^2=$ 3,490	$\Sigma y=$ 640		$\Sigma dy^2=$ 4,390	$\Sigma dxdy$ =3,535

X Series

$$a_x = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{610}{10} = 61 \text{ marks}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{n}} = \sqrt{\frac{3{,}490}{10}} = 18.681 \text{ marks}$$

Y Series

$$a_y = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{640}{10} = 64 \text{ marks}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma dy^2}{n}} = \sqrt{\frac{4{,}390}{10}} = 20.952 \text{ marks}$$

कार्ल पियर्सन के सूत्र के अनुसार—

$$r = \frac{\Sigma\, dxdy}{n\sigma_x\sigma_y}$$

$$= \frac{3{,}535}{10 \times 18.681 \times 20.952}$$

$$= \frac{3{,}535}{3914.04312}$$

$$= 0.903$$

अतः लेखाकर्म (Accountancy) तथा सांख्यिकी (Statistics) के प्राप्तांकों में 0.903 का अनुलोम (+) सहसम्बन्ध है।

सहसम्बन्ध निकालने की इस क्रिया को सुगम करने के लिये कार्ल पियर्सन के मूल-सूत्र को इस प्रकार सरल किया जा सकता है :—

$$r = \frac{\Sigma\, dxdy}{n\sigma_x\sigma_y}$$

$$= \frac{\Sigma\, dxdy}{n \times \sqrt{\frac{\Sigma\, dx^2}{n}} \times \sqrt{\frac{\Sigma\, dy^2}{n}}}$$

$$= \frac{\Sigma\, dxdy}{\sqrt{\Sigma\, dx^2} \times \sqrt{\Sigma\, dy^2}}$$

$$= \frac{\Sigma\, dxdy}{\sqrt{\Sigma\, dx^2 \times \Sigma dy^2}}$$

अर्थात्, यदि $\Sigma dxdy$ में Σdx^2 तथा Σdy^2 के गुणनफल का वर्गमूल निकाल कर भाग दे दें, तो सहसम्बन्ध गुणक निकल आयेगा। इस प्रकार σ_x तथा σ_y निकालने में जो समय लगता है वह बचाया जा सकता है यद्यपि हमें वही उत्तर प्राप्त होगा। उस सूत्र का प्रयोग उपरोक्त उदाहरण में इस प्रकार किया जायगा :

$$r=\frac{\Sigma\, dxdy}{\sqrt{\Sigma dx^2\times\Sigma dy^2}}$$

$$=\frac{3{,}535}{\sqrt{3{,}490\times4{,}390}}$$

$$=\frac{3{,}535}{\sqrt{1{,}53{,}21{,}100}}$$

$$=\frac{3{,}535}{3{,}914}$$

$$=0.903$$

इस प्रश्न को हल करने के लिये जो गुणा, भाग तथा वर्गमूल की क्रियायें करनी पड़ती हैं उन्हें लघुगणकों (Logarithms) की सहायता से इस प्रकार सुगम बनाया जा सकता है—अतः

$$r=\frac{\Sigma\, dxdy}{\sqrt{\Sigma dx^2\times\Sigma dy^2}}$$

$$=Antilog\,\{log\,\Sigma\, dxdy-\tfrac{1}{2}(log\,\Sigma\, dx^2+log\,\Sigma\, dy^2)\}$$

ऊपर ज्ञात किये गये मूल्यों को इस सूत्र में आदिष्ट करने पर—

$$r=Antilog\,[log\,3535-\tfrac{1}{2}\,(log\,3490+log\,4390)]$$

$$=Antilog\,[3.5478-\tfrac{1}{2}\,(3.5428+3.6425)]$$

$$=Antilog\,[3.5478-3.59265]$$

$$=Antilog\,\bar{1}.95515$$

$$=0.903$$

सहसम्बन्ध गुणक निकालने की लघु रीतियाँ
(Short-cut Methods for calculating Coefficient of Correlation)

सहसम्बन्ध गुणक की जो रीतियाँ ऊपर बतलाई गई हैं उनमें समंक मालाओं के विभिन्न मूल्यों के विचलन वास्तविक माध्य (True Arithmetic

Average) से निकाले जाते हैं। किन्तु यदि माध्य भिन्न में हों, तो विचलन निकालने में कठिनाई होती है और गणितीय क्रियायें भी बढ़ जाती हैं। अतः सुविधा के लिये काल्पनिक माध्य (Assumed Averages) से विचलन निकाले जा सकते हैं। किन्तु ऐसी दशा में $\Sigma\, dxdy$ में आवश्यक संशोधन करने की आवश्यकता पड़ती है। साथ ही साथ σ_x तथा σ_y के मूल्य भी लघु रीति वाले सूत्र (Short-cut Formula for calculating Standard Deviation) से ज्ञात करना आवश्यक हो जाता है, अन्यथा Σdx^2 तथा Σdy^2 अशुद्ध होंगे। $\Sigma dxdy$ को शुद्ध करने के लिये उसमें से दोनों समंक मालाओं के क्रमशः वास्तविक तथा काल्पनिक माध्यों के अन्तरों के गुणनफल को पुनः पद संख्या से गुणा करके घटा दिया जाता है।

$$r=\frac{\Sigma\, dx'dy'-n(a_x-a'_x)\,(a_y-a'_y)}{n\sqrt{\dfrac{\Sigma dx'^2-n(a_x-a'_x)^2}{n}}\times\sqrt{\dfrac{\Sigma dy'^2-n(a_y-a'_y)}{n}}}$$

r stands for Coefficient of Correlation (सहसम्बन्ध गुणक)

$\Sigma\, dx'dy'$ stands for Product of the Deviations, taken from Assumed Averages (काल्पनिक मध्यक से लिये गये विचलनों का गुणनफल)

a_x and a_y stand for True Averages (वास्तविक मध्यक)

a'_x and a'_y stand for Assumed Averages (काल्पनिक मध्यक)

$\Sigma\, dx'^2$ and $\Sigma dy'^2$ stand for square of the Deviations taken from Assumed Averages (काल्पनिक मध्यक से लिये विचलनों के वर्ग

n stands for No. of pairs (पदों की संख्या)

सुविधा के लिये इस सूत्र को अन्य रूप भी दिये जा सकते हैं :—

$$r=\frac{\Sigma\, dx'dy'-n\times\dfrac{\Sigma\, dx'}{n}\times\dfrac{\Sigma\, dy'}{n}}{n\sqrt{\left\{\dfrac{\Sigma dx'^2}{n}\right\}-\left\{\dfrac{\Sigma\, dx'}{n}\right\}^2}\times\sqrt{\dfrac{\Sigma\, dy'^2}{n}-\left\{\dfrac{\Sigma dy'}{n}\right\}^2}}$$

$$\text{अथवा } r=\frac{\Sigma\, dx'dy'-\left\{\dfrac{\Sigma dx'\times\Sigma dy'}{n}\right\}}{\sqrt{\Sigma dx'^2-\dfrac{(\Sigma dx')^2}{n}\times\Sigma dy'^2-\dfrac{(\Sigma dy')^2}{n}}}$$

(यदि अंश व हर के n को काटने का प्रयास किया जाय)

अथवा $r = \dfrac{\Sigma dx'dy' \times n - (\Sigma dx' \times \Sigma dy')}{\sqrt{\Sigma dx'^2 \times n - (\Sigma dx')^2} \times \sqrt{\Sigma dy'^2 \times n - (\Sigma dy')^2}}$

(यदि उपर्युक्त सूत्र के अंश व हर में n का गुणा किया जाय)

Illustration 3 :—

Find the coefficient of correlation :—

Roll No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Statistics	80	60	51	69	58	62	64	72	56	58
Law	45	71	60	57	62	68	48	50	62	60

(बी० कॉम०, राजपूताना, १९५५)

Solution :—

CALCULATION OF THE COEFFICIENT OF CORRELATION BETWEEN MARKS IN STATISTICS AND LAW

Roll No.	Statistics (X)			Law (Y)			Product of Deviations ($dx'dy'$)
	Marks (x)	Deviations from Ass. Average 62 (dx')	Square of Deviations (dx'^2)	Marks (y)	Deviations from Ass. Average 62 (dx')	Square of Deviations (dy'^2)	
1	80	+18	324	45	−17	289	−306
2	60	− 2	4	71	+ 9	81	− 18
3	51	−11	121	60	− 2	4	+ 22
4	69	+ 7	49	57	− 5	25	+ 35
5	58	− 4	16	62	0	0	0
6	62	0	0	68	+ 6	36	0
7	64	+ 2	4	48	−14	196	− 28
8	72	+10	100	50	−12	144	−120
9	56	− 6	36	62	0	0	0
10	58	− 4	16	60	− 2	4	+ 8
$n=10$	$\Sigma x =$ 630 $\therefore a_x =$ 63	$\Sigma dx' =$ +10	$\Sigma dx'^2$ =679	$\Sigma y =$ 583 $\therefore a_y =$ 58.3	$\Sigma dy' =$ −37	$\Sigma dy'^2$ =779	$\Sigma dx'dy'$ =−477

प्रथम सूत्र से

$$r=\frac{\Sigma\, dx'dy'-n(a_x-a'_x)\,(a_y-a'_y)}{n\sqrt{\dfrac{\Sigma dx'^2-n\,(a_x-a'_x)^2}{n}}\times\sqrt{\dfrac{\Sigma\, dy'^2-n\,(a_y-a'_y)^2}{n}}}$$

उपर्युक्त तालिका में ज्ञात किये गये मूल्यों को आदिष्ट करने पर

$$r=\frac{-477-10(63-62)\,(58.3-62)}{10\sqrt{\dfrac{670-10\,(63-62)^2}{10}}\times\sqrt{\dfrac{779-10\,(58.3-62)^2}{10}}}$$

$$=\frac{-477-10\times(+1)\,(-3.7)}{10\sqrt{\dfrac{670-10\times(+1)^2}{10}}\times\sqrt{\dfrac{779-10\times(-3.7)^2}{10}}}$$

$$=\frac{-477--10\times(-3.7)}{10\times\sqrt{66.0}\times\sqrt{64.21}}$$

$$=\frac{-477+37}{10\times 8.124\times 8.013}$$

$$=\frac{-440}{650.976}$$

$$=-0.676$$

द्वितीय सूत्र के अनुसार

$$r=\frac{\Sigma\, dx'dy'-n\times\dfrac{\Sigma\, dx'}{n}\times\dfrac{\Sigma\, dy'}{n}}{n\sqrt{\dfrac{\Sigma\, dx'^2}{n}-\left\{\dfrac{\Sigma\, dx'}{n}\right\}^2}\times\sqrt{\dfrac{\Sigma\, dy'^2}{n}-\left\{\dfrac{\Sigma\, dy'}{n}\right\}^2}}$$

$$=\frac{-477-10\times\dfrac{+10}{10}\times\dfrac{-37}{10}}{10\sqrt{\dfrac{670}{10}-\left\{\dfrac{+10}{10}\right\}^2}\times\sqrt{\dfrac{779}{10}-\left\{\dfrac{-37}{10}\right\}^2}}$$

$$=\frac{-477-10\times(-3.7)}{10\sqrt{67-1}\times\sqrt{77.9-13.69}}$$

$$=\frac{-477+37}{10\times 8.124\times 8.013}$$

$$=\frac{-440}{650.976}$$

$$=-0.676$$

तृतीय सूत्र के अनुसार

$$r=\frac{\Sigma\, dx'dy'-\left\{\dfrac{\Sigma\, dx'\times\Sigma\, dy'}{n}\right\}}{\sqrt{\Sigma\, dx'^2-\dfrac{(\Sigma\, dx')^2}{n}\times\Sigma dy'^2-\dfrac{(\Sigma\, dy')^2}{n}}}$$

$$=\frac{-477-\left\{\dfrac{+10\times-37}{10}\right\}}{\sqrt{670-\dfrac{(+10)^2}{10}\times 779-\dfrac{(-37)^2}{10}}}$$

$$=\frac{-477-37}{\sqrt{670-10\times 779-136.9}}$$

$$=\frac{-477+37}{\sqrt{660\times 642.1}}$$

$$=\frac{-440}{650.976}$$

$$=-0.6\,76$$

चतुर्थ सूत्र के अनुसार

$$r=\frac{\Sigma\, dx'dy'\times n-\Sigma\, dx'\times\Sigma\, dy'}{\sqrt{\Sigma\, dx'^2\times n-(\Sigma\, dx')^2}\times\sqrt{\Sigma\, dy'^2\times n-(\Sigma\, dy')^2}}$$

$$=\frac{-477\times 10-(+10)\times(-37)}{\sqrt{670\times 10-(+10)^2}\times\sqrt{779\times 10-(-37)^2}}$$

$$=\frac{-4{,}770+370}{\sqrt{6{,}700-100}\times\sqrt{7{,}790-1{,}369}}$$

$$=\frac{-4{,}400}{\sqrt{6{,}600\times 6{,}421}}$$

$$=Antilog\ \{log\ 4{,}400-\tfrac{1}{2}\ (log\ 6{,}600+log\ 6{,}421)\}$$

$$=Antilog\ \{3.6435-\tfrac{1}{2}\ (3.8195+3.8075)\}$$

$$=Antilog\ \{3.6435-3.8135\}$$

$$=Antilog\ \bar{1}.8300$$

$$=-0.676$$

अतः सहसम्बन्ध गुणक निकालने के लिये ऊपर दिये गये सूत्रों में से किसी भी सूत्र का प्रयोग किया जा सकता है। अन्तिम सूत्र अन्य सूत्रों की अपेक्षा सरल है। सूत्र में विभिन्न मूल्यों को आदिष्ट करने के उपरान्त गणन-क्रिया की सुविधा के लिये लघुगणकों का प्रयोग विशेष लाभप्रद होता है। उपर्युक्त उदाहरण में सहसम्बन्ध गुणक ज्ञात करने के लिये इन सभी सूत्रों का प्रयोग दिखलाया गया है।

वर्गान्तर मालाओं में सहसम्बन्ध
(Correlation in Grouped Series)

अभी तक हम लोगों ने साधारण श्रेणियों (Individual Series) में सहसम्बन्ध गुणक निकालने का प्रयास किया है। इसी ढंग से वर्गान्तर मालाओं में भी सहसम्बन्ध गुणक निकाला जा सकता है। इसके लिये सहसम्बन्ध सारणी (Correlation Table) में से दोनों अविच्छिन्न मालाओं को निकाल कर उनके क्रमशः प्रमाप-विचलन निकाल लिये जाते हैं। विचलनों के गुणनफल का योग $\Sigma\, dxdy$ ज्ञात करने के लिये एक विस्तृत तालिका भी बनाने की आवश्यकता पड़ती है। किन्तु इस ढंग से सहसम्बन्ध गुणक ज्ञात करने में अत्यधिक समय लगता है। अतः सुविधा के लिये एक ही तालिका ऐसे ढंग से बनानी चाहिये जिसमें सहसम्बन्ध गुणक के सूत्र में प्रयुक्त होने वाले सभी मूल्य ज्ञात किये जा सकें। निम्न उदाहरण में वर्गान्तर माला में सहसम्बन्ध निकालने की रीति का स्पष्टीकरण किया जा रहा है :—

Illustration 4 :—

Calculate the coefficient of correlation between the ages of husbands and wives from the undernoted data and comment upon the result obtained :—

Ages of husbands	Ages of wives					
	10—20	20—30	30—40	40—50	50—60	Total
10—20	6	3				9
20—30	3	16	10			29
30—40		10	15	7		32
40—50			7	10	4	21
50—60				4	5	9
Total	9	29	32	21	9	100

(बी० कॉम०, बनारस, १९५८)

Solution :—

पृष्ठ ४१५ की तालिका का स्पष्टीकरण

इस उदाहरण में कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणक निकालने के लिये जो तालिका बनाई गई है उसमें पति के वय-वर्गों को बाईं ओर से दाहिनी ओर (Horizontally) को तथा पत्नियों के वय वर्गों को ऊपर से नीचे (Vertically) की ओर दिखलाया गया है। दोनों मालाओं में काल्पनिक मध्यक 35 वर्ष मान कर विचलन निकाले गये हैं। तदुपरान्त विचलनों के गुणनफल का योग निकालने के लिये यह क्रिया अपनाई गई है :—

सहसम्बन्ध तालिका (Correlation Table) के जिन उभयनिष्ठ वर्गों में आवृत्तियाँ दृष्टिगोचर हो रही हैं उनके dx' व तत्सम्बन्धी dy' के गुणनफल को उन वर्गों के ऊपरी भाग के बाईं ओर के कोने (Left-hand top Corner) में दिखलाया गया है। तत्पश्चात् इन गुणनफलों में वर्गों की आवृत्तियों का गुणा करके नीचे दाहिनी ओर के कोने में रक्खा गया है। दोनों ओर से इन गुणनफलों के योग कर लिये गये हैं। इस प्रकार $\Sigma fdx'\ dy'$ बराबर 98 के है। पति व पत्नियों के वय-वर्गों में पूर्णतः समानता होने के कारण दोनों ओर के विभिन्न योगों में भी समानता है।

CALCULATION OF KARL PEARSON'S COEFFICIENT OF CORRELATION BETWEEN THE AGES OF 100 HUSBANDS AND WIVES

Husbands (X)	Mid-Value	Wives (Y) →	10—20	20—30	30—40	40—50	50—60				
		Mid-Value	15	25	35	45	55				
		dx' / dy'	−2	−1	0	+1	+2	$fdx'dy'$	f_2	f_2dy'	$f_2dy'^2$
10—20	15	−2	4 / 6 / 24	2 / 3 / 6				30	9	−18	36
20—30	25	−1	2 / 3 / 6	1 / 16 / 16	0 / 10 / 0			22	29	−29	29
30—40	35	0		0 / 10 / 0	0 / 15 / 0	0 / 7 / 0		0	32	0	0
40—50	45	+1			0 / 7 / 0	1 / 10 / 10	2 / 4 / 8	18	21	21	21
50—60	55	+2				2 / 4 / 8	4 / 5 / 20	28	9	18	36
		$fdx'dy'$	30	22	0	18	28	98	$\Sigma f_2 = 100$	$\Sigma f_2dy' = -8$	$\Sigma f_2dy'^2 = 122$
		f_1	9	29	32	21	9	$\Sigma f_1 = 100$			
		f_1dx'	−18	−29	0	+21	+18	$\Sigma f_1dx' = -8$			
		$f_1dx'^2$	36	29	0	21	36	$\Sigma f_1dx'^2 = 122$			

सहसम्बन्ध गुणक के सूत्र में प्रयुक्त होने वाले अन्य मूल्यों को ज्ञात करने के लिये पूर्वोक्त नियमों का ही पालन किया गया है।

अतः अब चतुर्थ सूत्र के अनुसार

$$r = \frac{\Sigma fdx'dy' \times n - (\Sigma f_1dx' \times \Sigma f_2dy')}{\sqrt{\Sigma f_1dx'^2 \times n - (\Sigma f_1dx')^2 \times \Sigma f_2dy'^2 \times n - (\Sigma f_2dy')^2}}$$

$$= \frac{98 \times 100 - (-8) \times (-8)}{\sqrt{122 \times 100 - (-8)^2 \times 122 \times 100 - (-8)^2}}$$

$$= \frac{9{,}800 - 64}{\sqrt{(12{,}200 - 64) \times (12{,}200 - 64)}}$$

$$= \frac{9{,}736}{\sqrt{12{,}136 \times 12{,}136}}$$

$$= \frac{9,736}{12,136}$$

$$= +0.802$$

अतः, पति व पत्नियों की उम्र में ऊँची मात्रा का अनुलोम सहसम्बन्ध (High Degree of Positive Correlation) है।

कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणक की परिकल्पनायें (Assumptions of Karl Pearsons' Coefficient of Correlation)

कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणक निम्नलिखित तीन परिकल्पनाओं पर आधारित है :—

(१) कार्ल पियर्सन की सर्व प्रथम कल्पना यह है कि जिन समंक मालाओं में सहसम्बन्ध होता है वे अनेक स्वतन्त्र कारणों से प्रभावित रहती हैं, जिसके फलस्वरूप उनमें सामान्यता (Normality) का सृजन हो जाता है।

(२) दूसरी कल्पना के अनुसार समंक मालाओं को प्रभावित करने वाले स्वतन्त्र कारणों में पारस्परिक कारण व प्रभाव (Cause and Effect) का सम्बन्ध होता है।

(३) तीसरी कल्पना यह है कि दोनों मालाओं में रेखीय (Linear) सम्बन्ध होता है, अर्थात् यदि हम विभिन्न x व y के मूल्यों को किसी विन्दुरेखीय पत्र पर प्रांकित करें, तो विक्षेप चित्र (Scatter Diagram) में एक रेखा का निर्माण हो सकेगा।

संभाव्य विभ्रम (Probable Error)

संभाव्य विभ्रम, विभ्रम की वह मात्रा है जिसे यदि किसी विशिष्ट माप में जोड़ दें तथा घटा दें, तो यह संभावना है कि अन्य न्यादर्शों के कथित माप उन सीमाओं के अन्तर्गत होंगे। कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणक का संभाव्य विभ्रम भी ऐसी ही सीमायें निर्धारित करता है।* यह निम्न सूत्र से ज्ञात किया जाता है :—

*Probable Error defines the limit above and below the size of the coefficient determined within which there is an equal chance that coefficient of correlation similarly calculated from other samples will fall—**Wheldon.**

$$\text{P. E. of } r = 0.6745 \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$$

सूत्र में 0.6745 अचल संख्या (Constant), r सहसम्बन्ध गुणक व n पदों की संख्या के क्रमशः प्रतीक हैं।

Illustration 5 :—

Find out the Probable Error of the Coefficient of Correlation, using the data given in Illustration 2 on page 406 :—

Solution :—

$$\text{P. E. of } r = 0.6745 \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$$

सहसम्वन्ध गुणक व पदों की संख्या को इस सूत्र में आदिष्ट करने पर

$$\text{P. E. of } r = 0.6745 \frac{1-(0.903)^2}{\sqrt{10}}$$

$$= 0.6745 \frac{1-0.815409}{3.162}$$

$$= 0.6745 \frac{0.184591}{3.162}$$

$$= 0.0394$$

संभाव्य विभ्रम को ध्यान में रखते हुये अब सहसम्बन्ध गुणक को हम इस प्रकार प्रस्तुत कर सकते हैं :—

$$r = 0.903 \pm 0.0394$$

अर्थात्, अन्य न्यादर्शों के सहसम्बन्ध गुणक संभवतः 0.8636 तथा 0.9424 के अन्तर्गत होंगे।

संभाव्य विभ्रम के आधार पर सहसम्वन्ध गुणक का निर्वचन (Interpretation) इस प्रकार किया जाता है :—

(१) यदि सहसम्वन्ध गुणक संभाव्य विभ्रम से कम है, तो यह इस बात का प्रमाण है कि दोनों मालाओं में सहसम्बन्ध का कोई चिन्ह नहीं है।

(२) यदि सहसम्बन्ध गुणक संभाव्य विभ्रम के छः गुने (Six times) से अधिक है, तो यह निश्चितरूप से कहा जा सकता है कि दोनों मालाओ के मूल्य में सहसम्बन्ध है।

२७

(३) यदि सहसम्बन्ध गुणक 0.3 से कम है तो सहसम्बन्ध की मात्रा नगण्य समझनी चाहिये, चाहे संभाव्य विभ्रम अपेक्षाकृत कितना भी कम क्यों न हो।

(४) यदि सहसम्बन्ध गुणक 0.5 से अधिक है और संभाव्य विभ्रम भी कम है, तो सहसम्बन्ध का अस्तित्व निश्चित है।

अतएव जब सहसम्बन्ध गुणक को ज्ञात करने के उपरान्त उसकी समीक्षा करने के लिये कहा जाय, तो दो बातों का स्पष्टीकरण आवश्यक है :—

(क) **सहसम्बन्ध की मात्रा (Degree)**—इस सम्बन्ध में यह पहले ही बतलाया जा चुका है कि सहसम्बन्ध गुणक (+1.0) व (−1.0) के अन्तर्गत होता है। अत: उसकी मात्रा का उल्लेख करने के साथ ही यह भी वतलाना चाहिये कि सहसम्बन्ध अनुलोम (+) है अथवा विलोम (−)। जब सहसम्बन्ध गुणक (0) हो, तो समंक मालाओं में किसी प्रकार का सहसम्बन्ध न होगा।

(ख) **सहसम्बन्ध की मान्यता (Significance)**—तत्पश्चात् संभाव्य विभ्रम निकाल कर यह वतलाना चाहिये कि उपर्युक्त नियमों के अनुसार सहसम्बन्ध मान्य (Significant) है, अथवा अमान्य (Insignificant)।

Illustration 6 :—

Interpret the Coefficient of Correlation calculated in Illustration No. 4 on page 414 :—

Solution :—

$$\text{P. E. of } r = 0.6745 \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$$

$$= 0.6745 \frac{1-(0.8)^2}{\sqrt{100}}$$

$$= 0.6745 \frac{1-0.64}{10}$$

$$= \frac{0.6745 \times 0.36}{10}$$

$$= 0.024282$$

चूंकि सहसम्बन्ध गुणक (+0.802) संभाव्य विभ्रम के छः गुने (0.024282×6=0.145692) से बहुत अधिक है, इसलिये इस बात का पर्याप्त प्रमाण है कि पति-पत्नियों की उम्र में सहसम्बन्ध है।

स्पियरमैन की अनुस्थिति रीति
(Spearman's Ranking Method)

सहसम्बन्ध गुणक ज्ञात करने की एक सरल रीति प्रो० स्पियरमैन ने बतलाई है। इसमें न तो X और Y मालाओं के प्रमाप-विचलन निकालने पड़ते हैं और न उनके विचलनों के गुणनफल को ही ज्ञात करने की आवश्यकता पड़ती है। इस रीति से सहसम्बन्ध गुणक निकालने के लिये निम्न क्रिया करनी पड़ती :—

(क) X तथा Y मालाओं में दिये गये समंकों को क्रमशः पहले उनकी अनुस्थिति (Rank) प्रदान की जाती है—जैसे, x के सबसे छोटे मूल्य को 1, उससे बड़े मूल्य को 2..., y के सबसे छोटे मूल्य को 1, इससे बड़े मूल्य को 2..., इत्यादि।

(ख) इसके बाद x की अनुस्थितियों में से तत्सम्बन्धी y की अनुस्थितियों को घटा कर अनुस्थिति-अन्तर (Rank Differences) ज्ञात किये जाते हैं।

(ग) फिर इन अनुस्थिति-अन्तरों का वर्ग निकाल कर उनका योग ज्ञात किया जाता है।

(घ) तदुपरान्त सहसम्बन्ध गुणक ज्ञात करने के लिये यह सूत्र प्रयोग में लाया जाता है :—

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)} \quad \text{अथवा} \quad r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n^3-1}$$

जिसमें r सहसम्बन्ध गुणक का प्रतीक है; Σd^2 अनुस्थिति-अन्तरों के वर्गों का योग है; तथा n पदों की संख्या है।

(ङ) अनुस्थिति प्रदान करते समय यदि एक से अधिक आकृतियाँ समान हों तो उनकी अनुस्थिति, सब समान अनुस्थितियों का माध्य (Arithmetic Mean) होगी।

स्पियरमैन के इस सहसम्बन्ध गुणक के लिये प्रतीक ρ (rho) का भी प्रयोग किया जाता है।

Illustration 7 :—

Calculate the Coefficient of Correlation from the following data by the method of rank differences :—

Age of bridegroom	17	18	19	20	20	21	22
Age of bride	14	16	17	15	19	22	16

Solution :—

CALCULATION OF THE COEFFICIENT OF CORRELATION BY SPEARMAN'S RANKING METHOD

Age of Bridegroom	17	18	19	20	20	21	22	$n=7$
Rank (x)	*1*	*2*	*3*	*4.5*	*4.5*	*6*	*7*	
Age of Bride	14	16	17	15	19	22	16	$n=7$
Rank (y)	*1*	*3.5*	*5*	*2*	*6*	*7*	*3.5*	
Rank Differences (d)	0	1.5	2.0	2.5	1.5	1.0	3.5	
Square of R. Diff. (d^2)	0	2.25	4.0	6.25	2.25	1.0	12.25	$\Sigma d^2=$ 28.00

$$\text{Spearman's } r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 28}{7(7^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{168}{7 \times 48}$$

$$= 0.5$$

सहसम्बन्ध गुणक निकालने की यह रीति कार्ल पियर्सन की रीति से अधिक सरल है किन्तु जबतक यह रीति अनिवार्य रूप से न पूछी जाय, इसका उपयोग नहीं करना चाहिये क्योंकि इसके द्वारा प्राप्त होने वाला परिणाम अधिक विश्वसनीय नहीं समझा जाता।

संगामी विचलन रीति (Concurrent Deviations Method)

विन्दुरेखीय रीति से दो समंक मालाओं के सहसम्बन्ध को ज्ञात करते समय यह देखा जा चुका है कि यदि दोनों वक्र एक ही दिशा में गमन करते हैं, तो अनुलोम सहसम्बन्ध और यदि विपरीत दिशा में गमन करते हैं, तो विलोम सहसम्बन्ध होता है। दूसरे शब्दों में यह कहा जा सकता है कि यदि दोनों समंक माला के विचलन एक ही दिशा में गमन करते हैं अथवा संगामी (Concurrent) हैं, तो वहाँ अनुलोम सहसम्बन्ध होगा अन्यथा नहीं। सह-सम्बन्ध गुणक निकालने की यह संगामी विचलन रीति इसी तथ्य पर आधारित है। समंक मालाओं के अल्पकालीन (Short-time) उच्चावचन में सहसम्बन्ध देखने के लिए साधारणतः इस रीति का प्रयोग किया जाता है। यहाँ समंकों की आकृतियो के वजाय केवल उनके परिवर्तनों की दिशा (+अथवा−) का अध्ययन किया जाता है। यह रीति भी कार्ल पियर्सन की रीति से सरल है।

संगामी विचलन रीति से सहसम्बन्ध गुणक निकालने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है :—

$$r=\pm\sqrt{\pm\left\{\frac{2c-n}{n}\right\}}$$

r stands for Coefficient of Correlation (सहसम्बन्ध गुणक)

c stands for number of Concurrent Deviations (संगामी विचलनों की संख्या, अथवा अन्तिम कॉलम में (+) के चिन्हों की संख्या)

n stands for number of pairs (पदों की संख्या अथवा n—1)

Illustration 8 :—

Obtain the Coefficient of Correlation between X and Y by means of Concurrent Deviations :—

X	25.2	24.7	32.1	20.5	40.9	28.0
Y	34.0	31.8	20.6	42.4	50.0	25.7

Solution :—

CALCULATION OF COEFFICIENT OF CORRELATION BY CONCURRENT DEVIATION'S METHOD

Item No.	X		Y		Product of Col. (3)× (5) ($dxdy$)
	Values (x)	Dev. from pre. value (dx)	Values (y)	Dev. from pre. value (dy)	
1	25.2	*	34.0	*	*
2	24.7	—	31.8	—	+
3	32.1	+	20.6	—	—
4	20.5	—	42.4	+	—
5	40.9	+	50.0	+	+
6	28.0	—	25.7	—	+

Hence, $n=5$ and $c=3$

$$r=\pm\sqrt{\pm\left\{\frac{2c-n}{n}\right\}}$$

$$=\pm\sqrt{\pm\left\{\frac{2\times3-5}{5}\right\}}$$

$$=\pm\sqrt{(+0.2)}$$

$$=+0.447$$

इस रीति से निकाला गया सहसम्बन्ध गुणक दीर्घ-कालीन परिवर्तनों का अध्ययन करने के लिये अनुपयुक्त है क्योंकि इसमें दीर्घकालीन प्रवृत्ति (Trend) को महत्व नहीं दिया जाता। दूसरी बात यह है कि मूल्य में चाहे थोड़ा परिवर्तन हो या अधिक, दोनों स्थितियाँ क्रिया की दृष्टि से समान हैं। फिर भी इस रीति के द्वारा हम सरलतापूर्वक जान सकते हैं कि दोनों समंक मालाओं में कोई सहसम्बन्ध है अथवा नहीं।

कालान्तर मालाओं में सहसम्बन्ध
(Correlation in the Time Series)

कालान्तर मालाओं में सहसम्बन्ध ज्ञात करने के लिये भी कार्ल पियर्सन की रीति प्रयोग में लाई जा सकती है। किन्तु इस बात का ध्यान रखना

आवश्यक होगा कि कालान्तर मालायें दीर्घकालीन (Long-time) व अल्पकालीन (Short-time) उच्चावचनों से प्रभावित रहती हैं। ऐसा हो सकता है कि उनकी दीर्घकालीन प्रवृत्ति में तो सहसम्बन्ध हो किन्तु अल्पकालीन प्रवृत्ति में न हो। अतः इस प्रकार की मालाओं में सहसम्बन्ध ज्ञात करने के पूर्व उनका विधिवत विश्लेषण करना अनिवार्य हो जाता है। विश्लेषण करने की रीतियों का अध्ययन आगे के अध्याय में किया जायगा। किन्तु परीक्षा के दृष्टिकोण से विद्यार्थियों को यह स्मरण रखना चाहिये कि कालान्तर मालाओं का विश्लेषण करके सहसम्बन्ध गुणक निकालने की क्रिया तभी करनी चाहिये जब प्रश्नपत्र में स्पष्टरूप से पूछा जाय। कालान्तर मालाओं के छोटे-छोटे न्यादर्शों में उनका विश्लेषण करके सहसम्बन्ध ज्ञात करना अनावश्यक समझा जाता है।

प्रतीप-गमन (Regression)

प्रतीप-गमन (Regression) का शाब्दिक अर्थ है—वापस लौटना (to regress or to return back)। सांख्यिकी में प्रतीप-गमन के विश्लेषणात्मक अध्ययन का श्रेय गाल्टन (Galton) को दिया जाता है। पिता व पुत्रों की ऊँचाइयों का अध्ययन करते समय उसने देखा कि व्यक्तिगत ऊँचाइयाँ साधारणतः मध्यक ऊँचाई की ओर ही झुकती हुई दृष्टिगोचर होती हैं। यही प्रवृत्ति प्रतीप-गमन कहलाती है। इसकी सहायता से दो समंक मालाओं में सहसम्बन्ध है अथवा नहीं इसकी भी जानकारी प्राप्त की जा सकती है क्योंकि प्रतीप-गमन उनके मध्यक सम्बन्ध (Average Relationship) का अध्ययन करता है।

गाल्टन ने प्रतीप-गमन का बिन्दुरेखीय अध्ययन करते समय बतलाया है कि यदि हम दो समंक मालायें X तथा Y लें, तो मध्यक सम्बन्ध प्रदर्शित करने वाली हमें दो प्रतीप-गमन रेखायें प्राप्त होंगी। इन रेखाओं की सहायता से हम किसी X के मूल्य पर आधारित Y का, अथवा Y के मूल्य पर आधारित X का सर्वोपयुक्त मूल्य ज्ञात कर सकते हैं। इन दोनों रेखाओं द्वारा सहसम्बन्ध भी ज्ञात किया जा सकता है। यदि मालाओं में पूर्ण सहसम्बन्ध है, तो दोनों रेखायें एक दूसरे को ढँक देंगी। यदि ये रेखायें समकोण पर कटती हैं तो सहसम्बन्ध शून्य होगा। रेखायें जितनी ही एक दूसरे के पास होंगी सहसम्बन्ध की मात्रा उतनी ही अधिक होगी और ये

जितनी ही दूर होंगी सहसम्बन्ध में उतनी ही न्यूनता पाई जायगी। ये दोनों रेखायें जहाँ कटती हैं वहां से भुजाक्ष पर डाला जाने वाला लम्ब X व Y मालाओं के मध्यक (a_x तथा a_y) को प्रदर्शित करता है। इन रेखाओं को अति उपयुक्त रेखायें (Lines of the Best fit) भी कहा जाता है।

प्रतीप-गमन की रेखाओं के निम्नलिखित समीकरण(Equations) हैं :—

(अ) $x=a+by$

(ब) $y=a+bx$

जिसमें x व y क्रमशः किसी y तथा x के सर्वोपयुक्त मूल्य हैं तथा a व b अचल (Constants) हैं।

इन समीकरणों को सहसम्बन्ध गुणक के प्रयोग के साथ भी लिखा जा सकता है :—

(अ) $$(x-a_x)=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-a_y)$$

(ब) $$(y-a_y)=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-a_x)$$

जिसमें x व y क्रमशः y तथा x के सर्वोपयुक्त मूल्य, a_x व a_y X तथा Y मालाओं के मध्यक (Mean), r सहसम्बन्ध गुणक तथा σ_x व σ_y X तथा Y मालाओं के प्रमाप विचलन हैं। प्रथम समीकरण को 'X पर Y का प्रतीप-गमन समीकरण (Regression Equation of X on Y)' तथा द्वितीय समीकरण को 'Y पर X का प्रतीप-गमन समीकरण (Regression Equation of Y on X)' कहते हैं।

$r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ तथा $r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ क्रमशः प्रथम व द्वितीय समीकरणों के प्रतीप-गमन गुणक (Coeffieients of Regresion) हैं। इन्हें b_{xy} व b_{yx} संकेत भी दिये जाते हैं। यदि इन दोनों का गुणनफल निकाल कर उसका वर्गमूल निकाला जाय तो वह सहसम्बन्ध गुणक होगा :

$$r=\sqrt{b_{yx}\times b_{xy}}$$

प्रतीप-गमन रेखा से विभिन्न मध्यक विन्दुओं तक के विचलनों का प्रमाप विचलन अनुमान का प्रमाप विभ्रम (Standard Error of the Esti-

mate) कहलाता है जिसके लिये क्रमश: S_x व S_y चिन्हों का प्रयोग किया जाता है। इसका सूत्र है—

$$S_x = \sqrt{\frac{\Sigma\, dx^2}{n}} \quad \text{तथा} \quad S_y = \sqrt{\frac{\Sigma\, dy^2}{n}}$$

जिसमें S_x व S_y क्रमश: X पर Y, तथा Y पर X की प्रतीप-गमन रेखाओं के प्रमाप विभ्रम हैं; तथा Σdx^2 व Σdy^2 क्रमश: X तथा Y के वास्तविक व अनुमानित मूल्यों के अन्तरों के योग हैं। प्रतीम-गमन रेखा के दोनों ओर $\pm 1S_x$ अथवा $\pm 1S_y$ के अन्तर्गत 68.3%, $\pm 2S_x$ अथवा $\pm 2S_y$ के अन्तर्गत 95.4% तथा $\pm 3S_x$ अथवा $\pm 3S_y$ के अन्तर्गत 99.7% मूल्य पाये जाते हैं। इन प्रमाप विभ्रमों की सहायता से सहसम्बन्ध गुणक भी निकाला जा सकता है।

$$r = \sqrt{1 - \frac{S_x^2}{\sigma_x^2}} \quad \text{अथवा} \quad r = \sqrt{1 - \frac{S_y^2}{\sigma_y^2}}$$

Illustration 9:—

A regression equation, explaining the average relationship between the dividend per share and the price per share in 1950 for 100 corporations, was

$$Y = \text{Rs. } 5.49 + 12.14\, X$$

Estimate the value of a share of stock which pays a dividend of Rs. 5 per share. The standard error of the estimate is S_y= Rs. 4.5.

(एम० कॉम०, बनारस, १९५१)

Solution :—

$$Y = \text{Rs. } 5.49 + 12.14\, X$$
$$= \text{Rs. } 5.49 + 12.14 \times 5$$
$$= \text{Rs. } 66.19$$

Estimated Value of the Share

There is 68.3% chance that its value will be Rs. 66.19± (1×4.5) i.e. between Rs. 70.69 and Rs. 61.69, 95.4% chance that it will be Rs. 66.19±(2×4.5) i.e. between Rs. 75.19 and

Rs. 57.19 and 99.7% chance that it will be Rs. $66.19 \pm (3 \times 4.5)$ i.e. between Rs. 79.69 and Rs. 52.69.

Illustration 10 :—

Given the following data, calculate the expected value of y when x is 12 and x when y is 20 :—

		x	y
Mean value	...	10.5	25.5
Standard deviation	...	2.2	4.4

Coefficient of Correlation between x and $y = +0.9$

(एम० कॉम०, बनारस, १९५५)

Solution :—

किसी x से सम्बन्धित y का सर्वोपयुक्त मूल्य निकालने के लिये हमें यह समीकरण लेना पड़ेगा—

$$(y - a_y) = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - a_x)$$

अतः विभिन्न मूल्यों को इस समीकरण में आदिष्ट करने पर

$$(y - 25.5) = 0.9\frac{4.4}{2.2}(12 - 10.5)$$

अथवा $y - 25.5 = 1.8 \times 1.5$

$\therefore y = 28.2$ units

इसी प्रकार किसी y से सम्बन्धित x का सर्वोपयुक्त मूल्य ज्ञात करने के लिये

$$(x - a_x) = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - a_y)$$

अथवा $(x - 10.5) = 0.9\frac{4.4}{2.2}(20 - 25.5)$

अथवा $x - 10.5 = 0.45 \times (-5.5)$

$\therefore x = 8.025$ units

Illustration 11 :—

For certain data $y = 1.3x$ and $x = 0.7y$ are the regression lines. Compute the Coefficient of Correlation between x and y.

(एम० कॉम०, बनारस, १९५३)

Solution :—

इस उदाहरण में $1.3 = b_{yx}$ तथा $0.7 = b_{xy}$ है, अतः

$$r = \sqrt{b_{yx} \times b_{xy}}$$
$$= \sqrt{1.3 \times 0.7}$$
$$= 0.95$$

Illustration 12 :—

In a partially destroyed laboratory record of an analysis of correlation data the following results only are legible :—

Regression equations :—

$$\left.\begin{array}{l} 8x - 10y + 66 = 0 \\ 40x - 18y = 214 \end{array}\right\}$$

What were (*a*) the mean value of x and y, (*b*) the coefficient of correlation between x and y?

(आई० ए० एस०, १९४७)

Solution :—

(*a*) यह पहले ही बतलाया जा चुका है कि जहाँ दोनों प्रतीप-गमन रेखायें एक दूसरे को काटती हैं वहीं पर X व Y मालाओं के मध्यक स्थित होते हैं। अतः यदि हम उपर्युक्त समीकरणों को हल करके x व y के मूल्य निकाल लें, तो वे ही X व Y मालाओं के मध्यक होंगे :—

$$8x - 10y + 66 = 0 \quad \text{(i)}$$
$$40x - 18y = 214 \quad \text{(ii)}$$

यदि हम प्रथम समीकरण को 5 से गुणा करें, तो

$$40x - 50y = -330 \quad \text{(iii)}$$
$$40x - 18y = +214 \quad \text{(ii)}$$
$$-32y = -544$$

$\therefore \quad y = 17 \quad$ अथवा $\quad a_y = 17$

इसी प्रकार यदि हम प्रथम समीकरण को 18 तथा द्वितीय समीकरण को 10 से गुणा करें, तो

$$144x - 180y = -1{,}188 \quad \text{(iv)}$$
$$400x - 180y = +2{,}140 \quad \text{(v)}$$
$$-256x = -3{,}328$$

$\therefore \quad x = 13 \quad$ अथवा $\quad a_x = 13$

(b) सहसम्बन्ध गुणक निकालने के लिये हमें b_{xy} व b_{yx} की आवश्यकता पड़ती है जो इस प्रकार ज्ञात किये जा सकते हैं :—

$\because$ $40x-18y=214$ $\qquad$ $\because$ $8x-10y+66=0$

$\therefore$ $x=0.45y+5.35$ $\qquad$ $\therefore$ $y=0.8x+6.6$

इस प्रकार 0.45 तथा 0.8 क्रमशः b_{xy} तथा b_{yx} के मूल्य हुये ।

$$r=\sqrt{b_{xy}\times b_{yx}}$$

अथवा $$=\sqrt{0.45\times 0.8}$$

$$=0.6$$

प्रश्न

1. Explain the meaning and significance of the concept of correlation. How will you calculate it from a statistical point of view ?

सहसम्वन्ध के सिद्धान्त का अर्थ व उसकी महत्ता का वर्णन कीजिये । सांख्यिकीय दृष्टिकोण से आप उसकी गणना किस प्रकार करेंगे ?

(एम० कॉम०, आगरा, १९४५)

2. What is meant by correlation ? Give the general rules for interpreting its coefficient.

सहसम्वन्ध से आपका क्या तात्पर्य है ? उसके गुणक का निर्वचन करने के जो साधारण नियम हैं उनका उल्लेख कीजिये ।

(एम० कॉम०, इलाहाबाद, १९४४)

3. Explain the concept of regression and state its utility in the field of economic enquiries.

प्रतीप-गमन के सिद्धान्त का जो आर्थिक अनुसंधान के क्षेत्र में महत्व है उसकी व्याख्या कीजिये ।

(एम० ए०, पंजाब १९५२)

4. Write short notes on the following :—

निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणियाँ लिखिये :—

(*a*) Assumptions underlying coefficient of correlation (सहसम्बन्ध गुणक की परिकल्पनायें)

(*b*) Correlation Table (सहसम्बन्ध तालिका)

(*c*) Positive and Negative Correlation (अनुलोम व विलोम सहसम्बन्ध)

(*d*) Coefficient of Regression (प्रतीप-गमन गुणक)

(*e*) Scatter Diagram (विक्षेप चित्र)

5. Calculate the correlation coefficient between x and y given by the following table :—

x ...	25	29	38	43	45	49	55	59
y ...	52	57	69	76	79	84	92	96

(बी० कॉम०, बनारस, १९५७)

($r=+0.9993$)

6. Calculate Karl Pearson's Coefficient of Correlation between the values of x and y given below :—

x ...	42	44	58	55	89	98	66
y ...	56	49	53	58	65	76	58

(बी० कॉम०, आगरा, १९५५)

($r=+0.904$)

7. Calculate the Coefficient of Correlation between the values of x and y given below :—

x ...	78	89	97	69	59	79	68	61
y ...	125	137	156	112	107	136	123	108

Use 69 as working mean for x and 112 as that for y.

(एम० ए०, दिल्ली, १९५३)

($r=+0.957$)

8. Calculate Karl Pearson's Coefficient of Correlation between the ages of husbands and wives and comment on the result :—

Ages of husbands	20	30	40	50	60	70	80
Ages of wives	14	25	30	32	40	45	65

(बी० कॉम०, बनारस, १९५४)

($r=+0.96$)

9. Ten students got the following percentage of marks in Accountancy and Statistics. Find the Coefficient of Correlation and state your deductions :—

Student	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Accountancy	78	36	98	25	75	82	90	62	65	39
Statistics	84	51	91	60	68	62	86	58	53	47

(बी० कॉम०, बनारस, १९५०)

($r=+0.78$)

10. The following figures give the capital employed by a firm in ten successive years, together with the profit made in each year, both in thousands of rupees :—

Capital	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Profit	2	4	8	5	10	15	14	20	22	30

Find the Coefficient of Correlation, and state your deductions.

(बी० कॉम०, बनारस, १९५१)

($r=+0.96$)

11. What is meant by a Correlation Coefficient? The following table gives the income and expenditure on food of 10 working class families :—

Income of family in rupees			Expenditure on food in rupees
20	...	...	10.2
25	...	...	12.3
35	...	...	15.9
45	...	...	19.6
55	...	...	22.6
65	...	...	26.8
75	...	...	29.4
85	...	...	32.0
100	...	...	42.5
105	...	...	43.0

Calculate the Correlation Coefficient between income and expenditure on food.

(बी० कॉम०, बनारस, १९५६)

($r=+0.994$)

12. Find the correlation between the income and expenditure of a wage-earner on piece-rate system, working in a factory :—

Months	Income in Rs.	Expenditure in Rs.
October ...	46	36
November ...	54	40
December ...	56	44
January ...	56	54
February ...	58	42
March ...	60	58
April ...	62	54
May ...	66	58

(बी० कॉम०, बनारस, १९५५)

($r=+0.82$)

13. Calculate Pearson's Coefficient of Correlation between wages and cost of living from the following data :—

INDEX NUMBERS

Wages ...	100	101	103	102	100	99	97	98	96	95
Cost of Living ...	98	99	99	97	95	92	95	94	90	91

(बी० काम०, आगरा, १९५४)

($r=+0.85$)

14. The following table gives the index numbers of wholesale prices of rice and wheat for the year 1955-56 :—

Month		Index Numbers of Wholesale prices RICE	WHEAT
April, 1955	...	410	400
May, 1955	...	405	350
June, 1955	...	410	365
July, 1955	...	455	415
Aug., 1955	...	490	420
Sept., 1955	...	510	410
Oct., 1955	...	490	552
Nov., 1955	...	475	430
Dec., 1955	...	465	470
Jan., 1956	...	450	505
Feb., 1956	...	473	530
Mar., 1956	...	505	545

Calculate the Coefficient of Correlation between the index numbers of wholesale prices of rice and wheat.

(एम० ए०, आगरा, १९५७)

($r=+0.6$)

15. Calculate the Coefficient of Correlation from the following table and interpret it :—

Year		Average daily number of labourers (000)	Number of bails consumed by mills (00,000)
1925	...	368	22
1926	...	384	21

1927	...	385	24
1928	...	361	20
1929	...	347	22
1930	...	384	26
1931	...	395	26
1932	...	403	29
1933	...	400	28
1934	...	385	27

(बी० कॉम०, बनारस, १९५३ तथा आगरा, १९५७)

($r=+0.79$)

16. The following table gives the distribution of the total population and those who are wholly or partially blind among them. Find out if there is any correlation between age and blindness :—

Age	No. of persons in thousands	Blind
0—10	100	55
10—20	60	40
20—30	40	40
30—40	36	40
40—50	24	36
50—60	11	22
60—70	6	18
70—80	3	15

(बी० कॉम०, आगरा, १९३९)

(First of all find out the rate of blindness per thousand or per lakh in each age-group, and then compute the r between those rates and the number of persons who are blind. $r=+0.898$).

17. The following table presents 100 couples, classified according to the age of the pairs at the time of marriage. Is there any correlation in their ages ?

२८

Husband's Age

Wife's age \ Husband's Age	20—25	25—30	30—35	35—40	40—45
15—20	20	10	2	—	—
20—25	4	28	6	2	—
25—30	—	5	11	4	2
30—35	—	—	1	2	1
35—40	—	—	—	—	1

What light do these figures throw on the marriage customs of the people ?

(एम० कॉम, आगरा, १९५६)

($r=+0.91$)

18. The following table gives class frequency distribution of 45 clerks in a business office according to age and pay. Find the correlation, if any, between age and pay :—

Pay

Age \ Pay	60—70	70—80	80—90	90—100	100—110
20—30	4	3	1	—	—
30—40	2	5	2	1	—
40—50	1	2	3	2	1
50—60	—	1	3	5	2
60—70	—	—	1	1	5

(एम० कॉम०, आगरा, १९५४)

($r=+0.749$)

19. Find the correlation, if any, between the height and weight from the following class frequency distribution :—

Height in inches

Weight in lb	59–61	61–63	63–65	65–67	67–69
110–120	12	8	6	2	0
120–130	6	10	4	3	1
130–140	4	8	16	10	2
140–150	2	3	5	8	3
150–160	1	4	5	6	14

(एम॰ कॉम॰, आगरा, १९५१)

$(r=+0.54)$

20. You are given the following results for the heights (X) and weights (Y) of 1000 workers of a factory :—

Mean height $(a_x)=68.0$ inches and $\sigma_x=2.5$ inches

Mean weight $(a_y)=150.0$ lb. and $\sigma_y=20.0$ lb.

$r=+0.60$

Estimate from the above data (i) the height of a particular factory worker whose weight is 200 lb., (ii) the weight of a particular factory worker who is 5 feet tall.

(एम॰ कॉम॰, बनारस, १९५६)

(71.75" and 111.6 lb)

21. Find the most likely price in Bombay corresponding to the price of Rs. 70 at Calcutta from the following data :—

Average price—Calcutta : 65, Bombay : 67

Standard Deviation—Calcutta : 2.5, Bombay : 3.5

r between the two prices$=+0.8$.

(एम॰ कॉम॰, आगरा, १९५१)

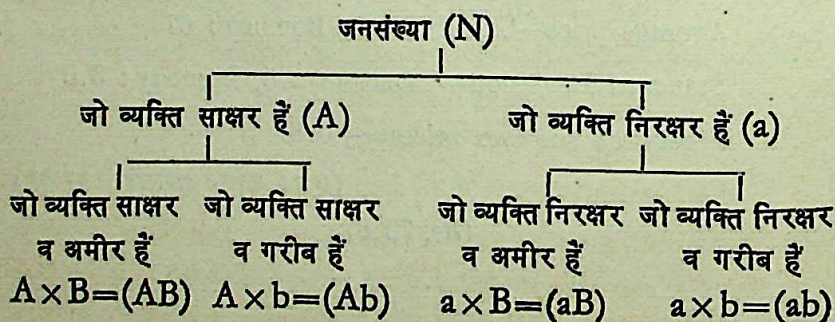
(Rs. 72.6)

अध्याय १२

गुणसम्बन्ध

(Association of Attributes)

(गुणात्मक समंक—संकेताक्षरों व शब्दों के अर्थ—नौ-वर्गों की तालिका—दृढ़ता—संभावना सिद्धान्त व आशंसा—स्वतन्त्रता, गुणसम्बन्ध तथा गुणसम्बन्ध का अभाव—यूल का गुणसम्बन्ध गुणक—आंशिक गुणसम्बन्ध—भ्रमात्मक गुणसम्बन्ध—अपवर्त्य तालिका—प्रश्न)

अध्याय ६ में बतलाया जा चुका है कि समंकों का वर्गीकरण मुख्यतः दो रीतियों से होता है—(क) वर्गान्तरों के अनुसार तथा (ख) गुणों के अनुसार। गुणों के अनुसार हमें वर्गीकरण करने की तब आवश्यकता पड़ती है जब समंक गुणात्मक हों, जैसे बुद्धि, अपराध, इत्यादि। इन समंकों को Statistics of Attributes भी कहते हैं। पृष्ठ ९० व ९१ पर बतलाया जा चुका है कि ऐसे समंकों का वर्गीकरण गुण की उपस्थिति (Presence) व अनुपस्थिति (Absence) के आधार पर किया जाता है। गुण की उपस्थिति वर्णमाला के बड़े अक्षरों (Capital Letters, A, B) द्वारा तथा अनुपस्थिति छोटे अक्षरों (Small Letters, a, b) द्वारा प्रकट की जाती है, जैसे शिक्षित (A) व अशिक्षित (a)। यदि हम कल्पना करें कि किसी नगर की जनसंख्या (N) है जिसे दो गुणों—साक्षरता (A) व निरक्षरता (a), तथा अमीरी (B) व गरीबी (b)—के अनुसार वर्गीकृत करना है, तो वर्गीकरण की क्रिया निम्न ढंग से की जायगी :—

गुणात्मक समंकों का वर्गीकरण करने की यह सरल रीति है जिसे द्वन्द्व-भाजन (Classification by Dichotomy) कहते हैं। यदि इन गुणों व उपगुणों का पुनः वर्गीकरण किया जाय, तो वह बहुगुण वर्गीकरण (Manifold Classification) कहलायेगा।

संकेताक्षरों व शब्दों के अर्थ
(Meaning of Notation and Terms)

(१) **अनुलोम गुण (Positive Attribute)**—किसी गुण की उपस्थिति जैसे, A।

(२) **विलोम गुण (Negative Attribute)**—किसी गुण की अनुपस्थिति जैसे, a।

(३) **गुण संयोग (Combination of Attributes)**—विभिन्न गुणों का संयोग जैसे, साक्षर व अमीर के लिये AB, साक्षर व गरीब के लिये Ab, इत्यादि।

(४) **वर्ग-आवृत्ति (Class-frequency)**—जो गुण अथवा गुण-संयोग अभिवार (Brackets) के भीतर प्रदर्शित किये गये हों उन्हें वर्ग आवृत्ति कहते हैं, जैसे AB का अर्थ तो दो गुणों का संयोग मात्र है किन्तु (AB) का अर्थ है—किसी विशेष स्थान में A व B गुण रखने वाले कुल व्यक्तियों की संख्या। उसी प्रकार B गरीबी का प्रतीक है, किन्तु (B) हमारे समग्र में कुल गरीबों की संख्या है।

(५) **आवृत्तियों के क्रम (Order of frequencies)**—यदि अभिवारों (Brackets) में क्रमशः एक (जैसे, A), दो (जैसे, Ab) अथवा तीन (जैसे, ABc) आवृत्तियाँ हों, तो उन्हें क्रमशः प्रथम क्रम की आवृत्ति (Frequency of the first Order), द्वितीय क्रम की आवृत्ति (Frequency of the Second Order) तथा तृतीय क्रम की आवृत्ति (Frequency of the Third Order) कहते हैं।

(६) **वर्गों के नामकरण (Names of Classes)**—जो वर्ग केवल बड़े अक्षरों से बने रहते हैं उन्हें अनुलोम वर्ग (Positive Classes), जो केवल छोटे अक्षरों से बने रहते हैं, उन्हें विलोम वर्ग (Negative Classes) तथा जो बड़े व छोटे अक्षरों के संयोग होते हैं उन्हें विपरीत वर्ग (Contrary

Classes) कहते हैं। उदाहरण के लिये A, AB, ABc, आदि अनुलोम वर्ग हैं, a, ab, abc आदि विलोम वर्ग हैं तथा Ab, Abc, आदि विपरीत वर्ग हैं। Ab, AB, aB, ab अथवा Abc, ABc, aBc आदि को अन्तस्थ वर्ग (Ultimate Classes), तथा इनकी आवृत्तियों को (अर्थात् अभिवार के अन्दर रखने पर) अन्तस्थ वर्ग की आवृत्तियाँ (Ultimate Class Frequencies) कहते हैं।

(७) **समग्र (Universe)**—सम्पूर्ण समंकों की संख्या समग्र कहलाती है। इसके लिये (N) संकेताक्षर का प्रयोग किया जाता है। समग्र को शून्य क्रम का वर्ग (Class of the Zero Order) भी कहते हैं।

नौ-वर्गों की तालिका (Nine Square Table)

उपर्युक्त वर्गीकरण को ध्यानपूर्वक देखने से ज्ञात हो गया होगा कि कोई गुणात्मक समग्र (N) उस गुण की उपस्थिति (A) तथा उसकी अनुपस्थिति (a) के बराबर होता है। इसी प्रकार (A) बराबर (AB) तथा (Ab) के योग के अथवा (a) बराबर (aB) तथा (ab) के योग के होता है। अतः यदि हम (AB), (Ab), (aB) तथा (ab) का योग निकालें, तो वह (N) के बराबर होगा। इससे यह स्पष्ट हो जाता है कि यदि हमें एक छोड़ कर अन्य आवृत्तियाँ ज्ञात हों, तो हम उन्हें जोड़-घटा कर अज्ञात आवृत्ति को ज्ञात कर सकते हैं। इस कार्य के लिये एक तालिका बना ली जाती है जिसे नौ-वर्गों की तालिका (Nine Square Table) कहते हैं। तालिका बनाने का ढंग निम्न उदाहरण से स्पष्ट हो जायगा।

Illustration 1 :—

Given the following frequencies of some classes; calculate the frequencies of the rest of the classes :—

$$(N)=500,\ (AB)=140,\ (A)=360,\ (ab)=20$$

Solution :—

$$(Ab) = (A) - (AB) = 360 - 140 = 220$$
$$(b) = (Ab) + (ab) = 220 + 20 = 240$$
$$(B) = (N) - (b) = 500 - 240 = 260$$
$$(aB) = (B) - (AB) = 260 - 140 = 120$$
$$(a) = (N) - (A) = 500 - 360 = 140$$

	A	a	
B	(AB) 140	(aB) 120	(B) 260
b	(Ab) 220	(ab) 20	(b) 240
	(A) 360	(a) 140	(N) 500

जहाँ समंकों का द्वन्द-भाजन हुआ हो वहाँ नौ-वर्गों की तालिका अत्यन्त ही उपयोगी होती है। इस तालिका में दो अनुलोम, दो विलोम व चार विपरीत क्रमों की तथा एक शून्य क्रम (N) की आवृत्तियों का समावेश है। किन्तु जहाँ समंकों को तीन गुणों के आधार पर वर्गीकृत करने की आवश्यकता हो वहाँ, 27 वर्गों की तालिका बनानी पड़ेगी जिसमें छः प्रथम क्रम की, बारह द्वितीय क्रम की, आठ तृतीय क्रम की व एक शून्य क्रम की आवृत्तियाँ होंगी। इन तालिकाओं को गुण सम्बन्ध तालिका (Association Tables) भी कहते हैं।

दृढ़ता (Consistency)

उपरोक्त तथ्यों का अध्ययन करने से ज्ञात होगा कि सभी वर्गों की आवृत्तियाँ धनात्मक अथवा अनुलोम (+) होती हैं। यदि कभी किसी वर्ग की आवृत्ति ऋणात्मक (—) अथवा विलोम हो, तो समंकों को असंगत (Inconsistent) समझना चाहिये। ऐसा तब होता है जब समंकों के संकलन अथवा वर्गीकरण में कोई बड़ी भूल हो गई हो।

Illustration 2 :—

Do you find any inconsistency in the following data ?

Intelligent fathers with dull sons	...	248
Dull fathers with dull sons	...	81
Dull fathers with intelligent sons	...	92
Intelligent fathers	...	200

Solution :—

यदि बुद्धिमान पिताओं को A, बुद्धिमान पुत्रों को B, मूर्ख पिताओं को a तथा मूर्ख पुत्रों को b संकेताक्षर दें, तो इनके अनुसार

$$(Ab)=248,\ (ab)=81,\ (aB)=92 \text{ तथा } (A)=200$$

इन आवृत्तियों के आधार पर यदि हम अज्ञात द्वितीय क्रम की आवृत्ति अर्थात् बुद्धिमान पिताओं व बुद्धिमान पुत्रों की संख्या निकालें, तो

$$\begin{aligned}(AB)&=(A)-(Ab)\\&=200-248\\&=-48\end{aligned}$$

यह आवृत्ति ऋणात्मक है। अतः समंक असंगत (Inconsistent) हैं।

संभावना सिद्धान्त व आशंसा
(Theory of Probability and Expectation)

अध्याय ४ में संभावना सिद्धान्त का उल्लेख किया जा चुका है। यह सिद्धान्त किसी घटना के होने (Happening) अथवा न होने (Not happening) पर प्रकाश डालता है। उदाहरण के लिये यदि किसी पासे (Dice) को फेंका जाय, तो छः प्राप्त करने की संभावना (Probability) $\frac{1}{6}$ अथवा 'छः अवसरों में एक' है। यदि यह क्रिया 120 बार दोहराई जाय, तो संभवतः ($\frac{1}{6}\times120$), अर्थात् 20 बार छः प्राप्त करने की आशा अथवा आशंसा (Expectation) की जा सकती है। इस प्रकार यह स्पष्ट हो जाता है कि किसी घटना की आशंसा उसकी संभावना में संख्या (N) से गुणा करने पर प्राप्त होती है। अब यदि हमारे समग्र (N) में A व B दो गुण हैं, तो उनकी संभावना क्रमशः A/N तथा B/N होगी। सामूहिक रूप से दोनों की संभावना $A/N\times B/N$, तथा आशंसा $A/N\times B/N\times N$, अर्थात् $A\times B/N$ होगी। गुण सम्बन्ध का अध्ययन संभावना व आशंसा पर ही आधारित है।

स्वतन्त्रता, गुणसम्बन्ध तथा गुणसम्बन्ध का अभाव
(Independence, Association and Disassociation)

जब किसी वर्ग की वास्तविक आवृत्ति उस वर्ग की आशंसा के बराबर होती है, तो गुणों को स्वतन्त्र (Independent) समझा जाता है; उनमें किसी

प्रकार का गुणसम्बन्ध नहीं होता। यदि वास्तविक आवृत्ति वर्ग की आशंसा से अधिक है, तो गुणों में धनात्मक (+) अथवा अनुलोम गुणसम्बन्ध (Positive Association) होता है। इसके विपरीत यदि वास्तविक आवृत्ति वर्ग की आशंसा से कम होती है, तो गुणों में ऋणात्मक (–) अथवा विलोम (Negative Association) गुणसम्बन्ध होता है। विलोम गुणसम्बन्ध को ही गुणसम्बन्ध का अभाव (Disassociation) कहते हैं। अतः यदि कोई समग्र (A) व (B) दो गुणों में विभक्त है, तो स्वतन्त्रता, गुणसम्बन्ध व उसके अभाव के ये सूत्र होंगे :—

Independence	Association	Disassociation
	गुण A व B के लिये	
$(AB)=\frac{(A)\times(B)}{N}$	$(AB) > \frac{(A)\times(B)}{N}$	$(AB) < \frac{(A)\times(B)}{N}$
	गुण A व b के लिये	
$(Ab)=\frac{(A)\times(b)}{N}$	$(Ab) > \frac{(A)\times(b)}{N}$	$(Ab) < \frac{(A)\times(b)}{N}$
	गुण a व B के लिये	
$(aB)=\frac{(a)\times(B)}{N}$	$(aB) > \frac{(a)\times(B)}{N}$	$(aB) < \frac{(a)\times(B)}{N}$
	गुण a व b के लिये	
$(ab)=\frac{(a)\times(b)}{N}$	$(ab) > \frac{(a)\times(b)}{N}$	$(ab) < \frac{(a)\times(b)}{N}$

Illustration 3 :—

Show whether A and B are independent, positively associated or negatively associated i.e., disassociated in the following cases :—

(i) (N)=750, (A)=120, (B)=250 and (AB)=40

(ii) (A)=200, (*ab*)=240, (*a*)=480 and (*b*)=100

(iii) (N)=800, (A*b*)=120 (A)=300 and (*b*)=400

Solution :—

CONDITION (i)	CONDITION (ii) EXPECTATIONS	CONDITION (iii)
$(AB)=\frac{(A)\times(B)}{N}$	$(ab)=\frac{(a)\times(b)}{N=(A+a)}$	$Ab=\frac{(A)\times(b)}{N}$
$40=\frac{120\times250}{750}$	$240=\frac{480\times100}{600}$	$120=\frac{300\times400}{800}$
$=40$	$=80$	$=600$

(i) Since $40=40$, hence A and B are independent.

(ii) Since $240>80$, hence A and B are positively associated.

(iii) Since $120<600$, hence A and B are negatively associated.

ऊपर के उदाहरण में द्वितीय क्रम की आवृत्तियों की आशंसा ज्ञात करने के लिये प्रथम क्रम की आवृत्तियों का ज्ञात होना आवश्यक है। फिर भी यदि केवल चारो अन्तस्थ आवृत्तियाँ (AB, aB, Ab तथा ab) दी हुई हों, तो गुणसम्बन्ध अथवा स्वतन्त्रता की परख करने के लिये निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जा सकता है :—

$$(AB)\times(ab)=(Ab)\times(aB), \text{ क्योंकि}$$

$$(AB)\times(ab)=\frac{(A)\times(B)^*}{N}\times\frac{(a)\times(b)^\dagger}{N}$$

$$=\frac{(A)\times(b)^\dagger}{N}\times\frac{(a)\times(B)^*}{N}$$

$$=(Ab)\times(aB)$$

Illustration 4 :—

In an anti-malarial compaign in a certain area, quinine was administered to 812 persons out of a total population of 3,248. The number of fever cases is shown below :—

Treatment		*Fever*	*No Fever*
Quinine	...	20	792
No-quinine	...	220	2,216

Discuss the usefulness of quinine in checking malaria.

(पी० सी० एस०, १९४१)

यदि हम क्विनाइन के उपचार को A, क्विनाइन रहित उपचार को a, बुखार के अभाव को B तथा बुखार को b संकेताक्षर दें, तो

$$(AB)=792,\ (aB)=2,216,\ (Ab)=20 \text{ तथा } (ab)=220$$

अब स्वतन्त्रता की परख वाले सूत्रानुसार

$$(AB)\times(ab)=(Ab)\times(aB),$$

किन्तु $(792\times 220) > (20\times 2,216)$

अथवा $1,74,240 > 44,320$

अर्थात्, क्विनाइन के उपचार व बुखार के आक्रमण में विलोम गुणसम्बन्ध है। इसका तात्पर्य यह हुआ कि मलेरिया को रोकने में क्विनाइन एक सफल औषधि है।

यूल का गुणसम्बन्ध गुणक
(Yules' Coefficient of Association)

जिस प्रकार कार्ल पियर्सन ने सहसम्वन्ध गुणक का सूत्र दिया है उसी प्रकार यूल नामक सांख्यिक ने भी गुणसम्वन्ध का एक सूत्र दिया है—

$$Q=\frac{(AB)(ab)-(Ab)(aB)}{(AB)(ab)+(Ab)(aB)}$$

इस सूत्र के आधार पर निकाला गया गुणसम्वन्ध गुणक $(+1)$ तथा (-1) के अन्तर्गत होता है। गुणक द्वारा गुणसम्बन्ध का निर्वचन (Interpretation) उसी प्रकार किया जाता है जैसे सहसम्बन्ध का किया जाता है। यह एक सापेक्ष माप है, इसलिये स्वतन्त्रता, गुणसम्वन्ध अथवा गुणसम्बन्ध के अभाव के अध्यायनार्थं साधारणतः इसी सूत्र का प्रयोग करना चाहिये।

Illustration 5 :—

Investigate the association between darkness of eye colour in father and son from the following data :—

Fathers with dark eyes and sons with dark eyes	100
Fathers with dark eyes and sons with not dark eyes	158
Fathers with not dark eyes and sons with dark eyes	178
Fathers with not dark eyes and sons with not dark eyes ...	1,564

(एम० कॉम० बनारस, १९५८)

Solution :—

यदि काली आँखों वाले पिताओं को हम A, काली आँखों वाले पुत्रों

को B, जिन पिताओं की आँखें काली नहीं है उन्हें a, तथा जिन पुत्रों की आँखें काली नहीं हैं उन्हें b संकेताक्षर दें, तो

$$(AB)=100,\ (Ab)=158,\ (aB)=178 \text{ तथा } (ab)=1,564$$

यूल के गुणसम्बन्ध गुणक वाले सूत्र के अनुसार

$$Q=\frac{(AB)(ab)-(Ab)(aB)}{(AB)(ab)+(Ab)(aB)}$$

$$=\frac{(100\times1,564)-(158\times178)}{(100\times1,564)+(158\times178)}$$

$$=\frac{+1,28,276}{1,84,524}$$

$$=+0.695$$

अतः, पिता व पुत्रों की आँखों के कालेपन में अनुलोम गुणसम्बन्ध है ।

आंशिक गुणसम्बन्ध (Partial Association)

जब किसी वर्ग की वास्तविक आवृत्ति उसकी आशंसा से अधिक होती है तो गुणसम्बन्ध धनात्मक तथा जब कम होती है तो ऋणात्मक होता है। किन्तु इसके आधार पर यह नहीं जाना जा सकता कि गुणों में प्रत्यक्ष (Direct) सम्बन्ध है या अप्रत्यक्ष (Indirect)। कभी कभी ऐसा हो सकता है कि A व B में गुणसम्बन्ध किसी तीसरे अज्ञात गुण के कारण हो, जैसे यदि A का सम्बन्ध C से और B का भी C से है, तो A व B में अप्रत्यक्ष गुणसम्बन्ध होने की संभावना हो सकती है। उदाहरण के लिये यदि टीके (Vaccination) व किसी बीमारी की रोक (Exemption from disease) में गुणसम्बन्ध हो, तो इसका यह तात्पर्य होगा कि टीका लेने वाले व्यक्तियों को बीमारी नहीं हो सकती। परन्तु हम यह भी देखते हैं कि खुली हवा व धूप में रहने वाले व्यक्तियों को कम बीमारी होती है जब कि गन्दे वातावरण में रहने वाले लोग अधिक रोगग्रस्त होते हैं। फिर गन्दे स्थानों में रहने वाले लोग अपनी अशिक्षा के कारण टीके भी कम लगवाते हैं किन्तु स्वस्थ्य वातावरण में रहने वाले लोग टीके में अधिक विश्वास करते हैं क्योंकि वे उसके महत्व को समझते हैं। अतः इस कारण से यह निश्चय पूर्वक नहीं कहा जा सकता कि बीमारी की रोक टीके के ही कारण होती है। यह हो सकता है कि 'बीमारी की रोक' व 'टीके' का गुणसम्बन्ध स्वस्थ्य वातावरण से प्रभावित हुआ हो। यदि समग्र में सभी व्यक्ति समान वातावरण में रहते होते तो इस

शंका का कोई प्रश्न न उठता। अतः A व B गुणों का जो गुणसम्बन्ध किसी तीसरे गुण C अथवा c में पाया जाता है, आंशिक गुणसम्बन्ध कहलाता है।

भ्रमात्मक गुणसम्बन्ध (Illusory Association)

आंशिक गुणसम्बन्ध का वर्णन करते समय यह बतलाया गया है कि कभी कभी दो गुणों में गुणसम्बन्ध तो पाया जाता है किन्तु वह किसी तीसरे अज्ञात गुण की उपस्थिति के कारण होता है। अतः ऐसे गुणसम्बन्ध के प्रति हमारे मन में भ्रान्ति उत्पन्न हो जाती है क्योंकि यदि हम अन्य गुणों का अध्ययन करते हैं तो ज्ञात किये गये गुणसम्बन्ध पर विश्वास नहीं होता। भ्रमात्मक गुण सम्बन्ध अनुसंधानकर्ताओं के व्यक्तिगत पक्षपात तथा समंक संकलन व निर्वचन की अशुद्धियों के कारण ही होता है।

अपवर्त्य तालिका (Contingency Table)

जब समग्र को अनेक भागों अथवा गुणों में विभक्त किया जाता है तो बहुगुण-वर्गीकरण (Manifold classificrtion) करने की आवश्यकता पड़ती है जैसे, पिता पुत्रों की बुद्धि का वर्गीकरण करते समय अनेक गुणों को लिया जाय—तीव्र बुद्धि, साधारण बुद्धि, मन्द बुद्धि, आदि। ऐसे वर्गीकरण के आधार पर बनाई जाने वाली तालिका अपवर्त्य तालिका (Contingency Table) कहलाती है। इसका एक नमूना देखिये :—

CONTINGENCY TABLE SHOWING THE TEMPERAMENT OF BROTHERS AND SISTERS

BROTHERS (A)	SISTERS (B)			TOTAL
	Quick (B_1)	Good-natured (B_2)	Sullen (B_3)	
Quick (A_1)	(A_1B_1)	(A_1B_2)	(A_1B_3)	(A_1)
Good-natured (A_2)	(A_2B_1)	(A_2B_2)	(A_2B_3)	(A_2)
Sullen (A_3)	(A_3B_1)	(A_3B_2)	(A_3B_3)	(A_3)
TOTAL	(B_1)	(B_2)	(B_3)	N

प्रश्न

1. Write a note on the use of Coefficient of Association in analysing economic statistics.

आर्थिक समंकों के विश्लेषण में गुणसम्बन्ध गुणक के उपयोग पर एक टिप्पणी लिखिये।

(एम० कॉम०, आगरा, १९५४)

2. Write short notes on the following :—

निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणियाँ लिखिये।

(*a*) Classification by Dichotomy (द्वन्द-भाजन)

(*b*) Ultimate class frequencies (अन्तस्थ वर्ग आवृत्तियाँ)

(*c*) Yule's Coefficient of Association (यूल का गुणसम्बन्ध गुणक)

(*d*) Partial Association (आंशिक गुण सम्बन्ध)

(*e*) Illusory Association (भ्रमात्मक गुणसम्बन्ध)

(*f*) Contingency Table (अपवर्त्य तालिका)

3. What do you understand by 'Association of Attributes' ? How is its existence or non-existence determined ? What is Partial Association ?

'गुणसम्बन्ध' से आप क्या समझते हैं ? उसके अस्तित्व अथवा अन-अस्तित्व का निर्धारण किस प्रकार होता है ? आंशिक गुणसम्बन्ध क्या है ?

Out of 900 persons, 300 were literate and 400 had travelled beyond the limits of their district; 200 of the literates were among those who had travelled. Is there any relation between travelling and literacy ?

(एम० कॉम०, आगरा, १९५६)

$(Q=+0.6)$

4. Can vaccination be regarded as a preventive measure for small-pox from the data given below ?

'Of 1,482 persons in a locality exposed to small-pox, 368 in all were attacked. Of 1,482 persons, 343 had been vaccinated and of these only 35 were attacked.'

(बी० कॉम०, बनारस, १९४९ तथा एम० कॉम०, इलाहाबाद, १९४४)

($Q=+0.57$)

5. The male population of an Indian State is 250 lacs. The number of literate males is 20 lacs and the total number of male criminals is 26 thousand. The number of literate male criminals is 2 thousand. Investigate if you find any association between literacy and criminality in this State.

(एम० ए०, बनारस, १९५५)

($Q=-0.02$)

6. Calculate the Coefficient of Association between intelligence in father and son from the following data :—

Intelligent fathers with intelligent sons	248
Intelligent fathers with dull sons	81
Dull fathers with intelligent sons	92
Dull fathers with dull sons	579

(एम० ए०, इलाहाबाद, १९४८)

($Q=+0.98$)

7. Calculate the Coefficient of Association between extravagance in father and sons from the following data :—

Extravagant fathers with extravagant sons ...	327
Extravagant fathers with miserly sons ...	545
Miserly fathers with extravagant sons ...	741
Miserly fathers with miserly sons ...	235

(एम० ए०, लखनऊ, १९४७, राजपूताना १९५७ तथा आगरा, १९५६)

($Q=-0.68$)

8. Find out the Coefficient of Association between the type of training and success in teaching from the following table :—

	Successful	*Unsuccessful*	*Total*
Institution :—			
Teachers' College	58	42	100
University	49	51	100
Total	107	93	200

(एम० ए०, राजपूताना, १९५६ तथा इलाहाबाद, १९५०)

($Q=+0.18$)

9. What do you understand by 'Contingency ? In an investigation into the Health and Nutrition of certain children (between the ages of one and five years) two groups of children were compared, one belonging to the well-to-do class, 125 in number, and the other belonging to the poor class, 124 in number. The following results were obtained :—

	Poor children (per cent)	Well-to-do children (per cent)
Below normal weight ...	75	23
Above normal weight ...	5	42

Find the coefficient of association between the weight of the children and their parents' financial condition.

(एम० कॉम०, आगरा, १९५७ तथा राजपूताना, १९५५)

($Q=+0.929$)

10. The following table shows the distribution of the temper in pairs of sisters in an exhaustive school inquiry :—

Second Sister	First Sister		Total
	Good-natured	Sullen	
Good-natured	1,040	180	1,220
Sullen	160	120	280
Total	1,200	300	1,500

Trace the association, if any, in the distribution of tempers in first and second sisters.

(एम० कॉम०, राजपूताना, १९५२)

(Q=+0.72)

11. The following table gives the number of literates and criminals in three cities of U. P.:—

	KANPUR	ALLAHABAD	AGRA
Total number (in thousands)	244	184	230
Literates (in thousands)	40	47	33
Literate criminals (in hundreds)	3	2	2
Illiterate criminals (in hundreds)	40	20	24

Compare the degree of association between criminality and illiteracy in each of the above three towns.

(एम० ए०, इलाहाबाद, १९४४)

(Q—Kanpur=+0.45, Q—Allahabad=+0.55 and Q—Agra =+0.34)

12. A census revealed the following figures of the blind and the insane in two age-groups in a certain population:—

	Age-group 15—25 years	Age-group Over 75 years
Total population	2,70,000	1,60,200
Number of blind	1,000	2,000
Number of insane	6,000	1,000
No. of insane among the blind	19	9

Obtain a measure of association between blindness and insanity in each of the two age-groups.

(एम० कॉम०, इलाहाबाद, १९५०)

($Q_1= -0.07$ *and* $Q_2= -0.16$. *Greater degree of disassociation in 'Over 75 years' group*).

अध्याय १३

कालान्तर मालाओं का विश्लेषण

(Analysis of Time Series)

(कालान्तर माला—कालान्तर माला का महत्व—कालान्तर माला के अंग—सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति—सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति की माप—स्वतन्त्र हस्त वक्र रीति—चल माध्य रीति—न्यूनतम वर्ग रीति—आर्तव विचरण—आर्तव विचरण की माप—चक्रीय उच्चावचन—दैव अथवा क्रमहीन उच्चावचन—प्रश्न)

कालान्तर माला (Time Series)

जिस समंक माला के एक चल-मूल्य (Variable) समय अथवा काल के द्योतक होते हैं, उसे कालान्तर माला (Time Series) कहते हैं। ऐसी मालाओं में साधारणतः X चल-मूल्य समय प्रस्तुत करते हैं, जो अविराम गति से उत्तरोत्तर बढ़ते चले जाते हैं। कालान्तर मालाओं का विन्दुरेखीय प्रदर्शन अध्याय ७ में किया जा चुका है।

कालान्तर माला का महत्व (Importance of Time Series)

वर्तमान समय में आर्थिक व व्यावसायिक परिवर्तनों का अध्ययन करने के लिए कालान्तर मालाओं का विश्लेषण करना आवश्यक हो गया है। अर्थ-शास्त्रियों को आर्थिक स्थितियों के अध्ययनार्थ यह जानने की आवश्यकता रहती है कि भूतकाल में आर्थिक समंकों की क्या प्रवृत्ति रही है, और भविष्य में क्या प्रवृत्ति रहने की संभावना है। यदि हम किसी भी आर्थिक समंक माला को लें, तो हमें समंकों के मूल्य में निरन्तर होने वाले उच्चावचन (Fluctuations) दिखलाई पड़ेंगे। किन्तु यदि हम एक बहुत ही लम्बी कालान्तर माला का ध्यानपूर्वक अध्ययन करें तो हमें उच्चावचनों के क्रम में एक प्रकार की संमितता दृष्टिगोचर होगी। प्रत्येक व्यवसायी, अर्थशास्त्री, कृषि-विशेषज्ञ, अथवा राजनीतिज्ञ के लिए काल-परिवर्तन के साथ ही साथ विभिन्न समंकों के मूल्य में प्ररिवर्तन की जो प्रवृत्ति दिखलाई पड़ती है उसकी जानकारी प्राप्त करना अत्यावश्यक है, क्योंकि इसी जानकारी के बल पर वह अपने को आकस्मिक व क्रमहीन उच्चावचनों से बचा सकता है, और भविष्य का पूर्वानुमान कर सकता है।

कालान्तर माला के अंग
(Components of a Time Series)

सभी कालान्तर मालाओं में मुख्यतः ४ अंग पाये जाते हैं :—

(१) सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति (Secular Trend)
(२) आर्तव विचरण (Seasonal Variation)
(३) चक्रीय उच्चावचन (Cyclical Fluctuations)
(४) दैव अथवा क्रमहीन उच्चावचन (Random or Irregular Fluctuations)

सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति (Secular Trend)

एक लम्बे समय में किसी समंक के बढ़ने-घटने की प्रवृत्ति को सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति (Trend) कहते हैं। उदाहरण के लिए भारत की जनसंख्या को लिया जा सकता है। यद्यपि हमारे देश की जनसंख्या में निरन्तर घट-बढ़ होती हुई दिखलाई पड़ती है, किन्तु यदि इन अल्पकालीन उच्चावचनों को हम दूर रखें, तो जनसंख्या में सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति, अर्थात् क्रमिक वृद्धि दृष्टिगोचर होगी। यह प्रवृत्ति सर्वदा एक ही दिशा में दिखलाई पड़ती है, या तो वृद्धि की ओर या ह्रास की ओर। यह दोनों का एक साथ प्रदर्शन नहीं करती। व्यावसायिक लाभ, उत्पादन, विक्रय, पूँजी-निर्माण, आदि अनेक व्यावसायिक समंकों में यह दीर्घकालीन प्रवृत्ति दिखलाई पड़ती है।

सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति की माप (Measurement of Trend)

सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति का अध्ययन तभी किया जा सकता है जब हम उसको प्रभावित करने वाले अल्पकालीन उच्चावचनों को हटा दें। इसके लिए निम्न रीतियाँ काम में लाई जाती हैं :—

(१) स्वतन्त्र हस्त वक्र रीति (Freehand Curve Method)—इस रीति के अनुसार पहले कालान्तर माला को बिन्दुरेखीय पत्र पर प्रांकित कर लिया जाता है, और तब रेखाचित्र के उच्चावचनों को ध्यान में रखते हुए स्वतन्त्रतापूर्वक एक सरलित वक्र (Smoothed Curve) बना लिया जाता है। यही वक्र सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति का प्रदर्शन करता है। यद्यपि यह रीति सबसे सरल है, फिर भी सरलन का कोई स्पष्ट आधार न होने के कारण वक्र का कोई निश्चित स्वरूप नहीं आंका जा सकता। अतः विभिन्न सांख्यिकों द्वारा बनाये गए वक्र भिन्न-भिन्न होंगे।

(२) चल माध्य रीति (Moving Average Method)—इस रीति के अनुसार कालान्तर माला में दिये गये समंकों के 3, 5, 7, 9 वर्षीय साधारण मध्यक (Means) निकाल लिये जाते हैं और उन्हें मूल समंकों को प्रांकित करने के उपरान्त उसी विन्दुरेखीय पत्र पर प्रांकित किया जाता है। यदि तीन-वर्षीय मध्यक निकालने हैं तो क्रिया इस प्रकार की जायगी—पहले तीन समंकों को जोड़िये और योग में तीन से भाग दे कर दूसरे समंक के सामने रखिये, फिर एक समंक को छोड़ कर तीन समंक लीजिये और उन्हें जोड़ कर योग में पुनः तीन से भाग देकर तीसरे समंक के सामने रखिये। यही क्रिया अन्तिम समंक तक दोहराई जायगी। फलतः प्रथम व अन्तिम समंकों को छोड़ कर शेष अन्य समंकों के सामने चल-माध्य निकल आयेंगे।

इस रीति से अल्पकालीन उच्चावचन दूर हो जाते हैं और कालान्तर माला की सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति स्पष्टतया दृष्टिगोचर होने लगती है। चल माध्य की उपयुक्त अवधि को ज्ञात करने के लिये कालान्तर माला की आवर्तिता (Periodicity) का ध्यान रखना चाहिये, अर्थात् यदि महत्वपूर्ण उतार-चढ़ाव तीन वंषों के उपरान्त दिखलाई पड़ते हों, तो तीन-वर्षीय; पाँच वर्षों के बाद दिखलाई पड़ते हों तो पाँच वर्षीय चल माध्य ज्ञात करने चाहिये। चल-माध्य की अवधि को जितना ही बढ़ाया जाता है, सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति में उतनी ही स्थिरता दिखलाई पड़ती है, किन्तु साथ ही यह भी याद रखना चाहिये कि अवधि जितनी ही लम्बी होगी, उतने ही माला के चरम-मूल्य छूटते जायँगे। इस रीति का एक उदाहरण दिया जा रहा है :—

Illustration 1 :—

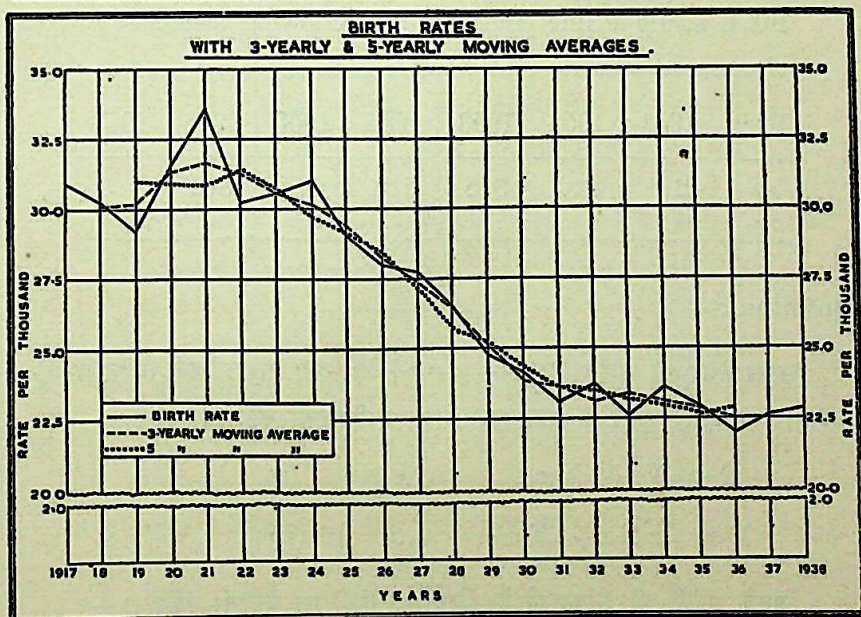
Represent the following data graphically. Also show the 3-yearly and 5-yearly moving averages to indicate the trend :—

Year	Birth Rate	Year	Birth Rate	Year	Birth Rate
1917 ...	30.9	1924 ...	31.0	1931 ...	23.1
1918 ...	30.2	1925 ...	29.0	1932 ...	23.7
1919 ...	29.1	1926 ...	27.9	1933 ...	22.6
1920 ...	31.4	1927 ...	27.7	1934 ...	23.6
1921 ...	33.4	1928 ...	26.4	1935 ...	23.0

1922 ...	30.2	1929 ...	24.7	1936 ...	22.0
1923 ...	30.4	1930 ...	24.1	1937 ...	22.6
				1938 ...	22.9

(एम० ए०, इलाहाबाद, १९५१)

3–YEARLY AND 5–YEARLY MOVING AVERAGES

Year	Birth Rate	3-yearly Moving Average	5-yearly Moving Average	Year	Birth Rate	3-yearly Moving Average	5-yearly Moving Average
1917	30.9	—	—	1928	26.4	26.3	26.2
1918	30.2	30.1	—	1929	24.7	25.1	25.2
1919	29.1	30.2	31.0	1930	24.1	24.0	24.4
1920	31.4	31.3	30.9	1931	23.1	23.6	23.6
1921	33.4	31.7	30.9	1932	23.7	23.1	23.4
1922	30.2	31.3	31.3	1933	22.6	23.3	23.2
1923	30.4	30.5	30.8	1934	23.6	23.1	23.0
1924	31.0	30.1	29.7	1935	23.0	22.9	22.7
1925	29.0	29.3	29.2	1936	22.0	22.5	22.8
1926	27.9	28.2	28.4	1937	22.6	22.5	—
1927	27.7	27.3	27.1	1938	22.9	—	—

यद्यपि यह रीति सरल, लोचदार व वैज्ञानिक है, फिर भी इसके कुछ दोष हैं। चल माध्यों को ज्ञात करने के लिये क्या अवधि लेनी चाहिये, यह निश्चित न होने के कारण सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति के स्वरूप में भिन्नता हो सकती है। यह रीति समंकों की केन्द्रीय-प्रवृत्ति को तो महत्व देती है किन्तु वक्र के उच्चावचनों पर कोई प्रकाश नहीं डालती। पुनः चल-माध्यों से माला के प्रारम्भ व अन्त के समंकों का अध्ययन नहीं किया जा सकता।

(३) न्यूनतम वर्ग रीति (Method of Least Squares)—सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति का अध्ययन करने के लिये यह रीति सर्वोत्तम समझी जाती है। न्यूनतम वर्गों की सहायता से रेखाचित्र में एक सर्वोपयुक्त अन्वायोजन रेखा (Line of Best Fit) बनाई जाती है जो या तो सरल रेखा (Straight Line) हो सकती है या एकेन्द्रिक वक्र (Parabolic Curve)। यह रेखा के समीकरण पर निर्भर है। इस रीति को न्यूनतम वर्ग रीति इसलिये कहते हैं कि इस रेखा से विभिन्न चल-मूल्यों तक के लिये गये धनात्मक व ऋणात्मक विचलन यदि शून्य के बराबर नहीं होते, तो न्यूनतम अवश्य होते हैं।

Illustration 2 :—

Fit a straight line trend to the following data :—

Year	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
y	2.5	2.0	3.5	3.0	4.5	3.0	4.0

Solution :—

सरल रेखा का समीकरण है— $y=a+bx$, अतः सरल सर्वोपयुक्त अन्वायोजन रेखा ज्ञात करने के लिये अब निम्न समीकरणों को लेना पड़ेगा :—

$$\Sigma y = Na + b\Sigma x \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

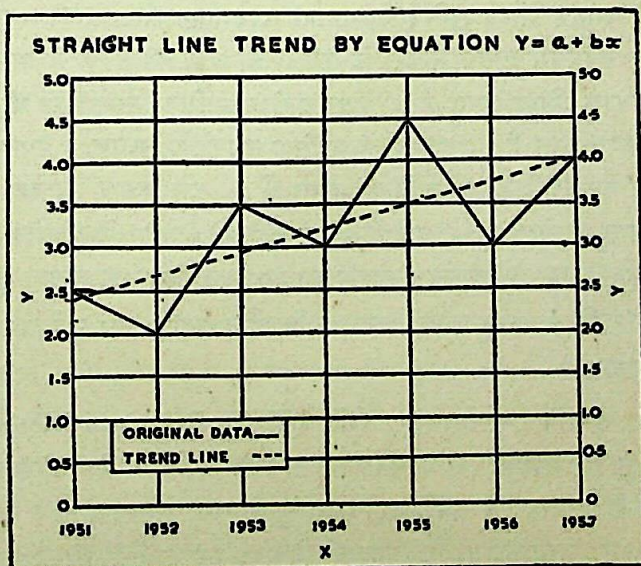
जिनके मूल्यों को निकालने के लिये यह तालिका बनानी पड़ेगी :—

STRAIGHT LINE TREND FITTED TO ABOVE DATA

Year	(x)	(y)	(xy)	(x^2)	(y')
1951	−3	2.5	−7.5	9	2.40
1952	−2	2.0	−4.0	4	2.67
1953	−1	3.5	−3.5	1	2.94
1954	0	3.0	0	0	3.21
1955	+1	4.5	+4.5	1	3.48
1956	+2	3.0	+6.0	4	3.75
1957	+3	4.0	+12.0	9	4.02
$n=7$	$\Sigma x=0$	$\Sigma y=22.5$	$\Sigma xy=+7.5$	$\Sigma x^2=28$	

यदि हम इन मूल्यों को ऊपर दिये गये समीकरणों में आदिष्ट करें, तो

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma y=Na+b\Sigma x\\ \Sigma xy=a\Sigma x+b\Sigma x^2\end{array}\right\} \text{ OR } \left.\begin{array}{r}22.5=7a+b\times 0\\ 7.5=a\times 0+28b\end{array}\right\} \text{ OR } \left.\begin{array}{r}7a=22.5\\ 28b=7.5\end{array}\right\}$$

इन समीकरणों को सरल करने पर $a=3.21$ तथा $b=0.27$ प्राप्त होता है। यदि समीकरण $y=a+bx$ में इन मूल्यों को कॉलम (2) में दिये दिये x के मूल्यों के आधार पर प्रयुक्त करें, तो हमें सर्वोपयुक्त अन्वायोजन रेखा के विन्दु प्राप्त हो जायँगे, जैसे, प्रथम वर्ष में $y=3.21+.27\times(-3)$ अर्थात् 2.4। इन्हें अन्तिम कॉलम में दिखलाया गया है। इसका विन्दुरेखीय प्रदर्शन इस प्रकार होगा :—

आर्तव विचरण (Seasonal Variation)

समंकों के परिमाण में आर्तव अथवा मौसमी परिवर्तनों के कारण भी उच्चावचन होते रहते हैं, किन्तु ये उच्चावचन अल्पकालीन होते हैं। जब तक किसी मौसम का प्रभाव रहता है ये दृष्टिगोचर होते रहते हैं, किन्तु ज्योंही मौसम में परिवर्तन होता है इनमें भी परिवर्तन की मात्रा दिखलाई पड़ने लगती है। उदाहरण के लिये जाड़े में ऊनी वस्त्रों के भाव बढ़ जाते हैं परन्तु ज्योंहीं गर्मी प्रारम्भ होती है इसके भाव में कमी होने लगती है। ये परिवर्तन भी चक्रीय (Cyclical) होते हैं, परन्तु आर्थिक चक्रों की अपेक्षा इनका कालक्रम कम होता है।

हम ऊपर वर्णन कर चुके हैं कि जब हमें समंकों की दीर्घकालीन प्रवृत्ति का अध्ययन करना रहता है, तो हम अल्पकालीन प्रभावों को दूर करने का प्रयत्न करते हैं। अतः जब हमें आर्तव विचरण का अध्ययन करना आवश्यक होता है, तो हमें समंकों की दीर्घकालीन प्रवृत्ति को दूर करना अनिवार्य हो जाता है।

आर्तव विचरण की माप
(Measurement of Seasonal Variation)

आर्तव विचरण ज्ञात करने की निम्नलिखित चार रीतियाँ हैं :—

(१) आर्तव माध्य रीति (Seasonal Average Method)—इस रीति के अनुसार सर्वप्रथम समान महीनों के समंकों का वर्षों की संख्या से भाग देकर मध्यक निकाल लिया जाता है। फिर प्रत्येक मासिक समंकों का भी मध्यक निकाल लिया जाता है। तदुपरान्त मासिक समंकों के मध्यक में प्रथम मध्यक से भाग दे कर 100 का गुणा किया जाता है। इस प्रकार प्रत्येक मास के प्रतिशत ज्ञात हो जाते हैं। यदि इन प्रतिशतों को किसी विन्दुरेखीय पत्र पर प्रांकित किया जाय, तो आर्तव विचरण का अध्ययन किया जा सकता है। यह एक सरल रीति है परन्तु इसके द्वारा दीर्घकालीन प्रवृत्ति का पूर्णतया समापन नहीं हो पाता।

(२) शृंखला मूल्यानुपात रीति (Clain Relatives Method)—इस रीति द्वारा मौसमी परिवर्तनों का अध्ययन करने के लिये पिछले महीने के समंकों के आधार पर अगले महीनों के मूल्यानुपात निकाल लिये जाते हैं। तदुपरान्त इन मूल्यानुपातों के मध्यक निकाल कर उन्हें किसी आधार वर्ष

(Base Year) पर परिणित कर लिया जाता है। अब यदि इन मूल्यानुपातों को क्रमशः मासिक मध्यकों के आधार पर प्रतिशतों के रूप में बदल कर विन्दुरेखीय पत्र पर प्रांकित किया जाय, तो निर्मित वक्र आर्तव विचरण का प्रदर्शन करेगा। यह रीति **कार्ल पियर्सन** ने ज्ञात की है।

(३) प्रवृत्ति-अनुपात रीति (Ratio to Trend Method)—इस रीति के अनुसार पहले सब महीनों के समंकों का योग निकाल कर उनमें वर्षों की संख्या से भाग देकर उनके साधारण मध्यक ज्ञात कर लिये जाते हैं। फिर न्यूनतम वर्ग रीति (Method of Least Squares) की सहायता से प्रत्येक मास के समंकों के दीर्घकालीन मूल्य (जिनकी सहायता से दीर्घकालीन वक्र का निर्माण होता है) निकाल लिये जाते हैं। अब इन मूल्यों से तत्सम्बन्धी माला के मध्यकों में भाग देकर तथा 100 से गुणा करके क्रमशः प्रवृत्ति अनुपातों की गणना कर ली जाती है। यदि इन अनुपातों को विन्दुरेखीय पत्र पर प्रांकित किया जाय, तो निर्मित चित्र आर्तव विचरण का भलीभाँति चित्रण करने में सफल होगा। यह रीति दीर्घकालीन प्रवृत्ति को तो महत्व देती है किन्तु कठिन होने के कारण इसका प्रयोग सीमित है।

(४) बारह-मासिक चल माध्य रीति (Twelve Monthly Moving Average Method)—इस रीति के अनुसार समंकों के बारह-मासिक चल माध्य निकाले जाते हैं। उदाहरण के लिये यदि जुलाई १९२९ से जून १९५७ तक के समंक दिये हैं, तो जनवरी १९५० से दिसम्बर १९५० तक के समंकों का योग निकाल कर जून व जुलाई महीनों के मध्य में, फरवरी १९५० से जनवरी १९५१ तक के समंकों का योग जुलाई व अगस्त महीनों के मध्य में रखना चाहिये। अब इन दोनों योगों को जोड़ कर तथा 24 से विभाजित करके प्राप्त फल को जुलाई १९४९ के सामने दिखलाना चाहिये। चल माध्य निकालने की यह क्रिया अन्तिम मास तक दोहरानी पड़ेगी। तदुपरान्त प्रत्येक समंक को उसके तत्सम्बन्धी चल माध्य से भाग देकर प्रतिशत में परिणित कर लेना चाहिये। इसके पश्चात इन प्रतिशतों के मासिक मध्यक निकाल कर उन्हें तत्सम्बन्धी मध्यकों से विभाजित कर देना चाहिये और प्राप्तफल को 100 से गुणा कर के पुनः नये प्रतिशतों में बदल लेना चाहिये। ये प्रतिशत आर्तव विचरण का प्रदर्शन करेंगे। यह रीति सब रीतियों में श्रेष्ठ समझी जाती है क्योंकि यह दीर्घकालीन प्रवृत्ति व चक्रीय उच्चावचनों का परित्याग करती है, किन्तु गणना की दृष्टि से बहुत कठिन है।

चक्रीय उच्चावचन (Cyclical Fluctuations)

साधारणतः सभी आर्थिक समंकों के उतार-चढ़ाव में एक प्रकार की नियमिता (Regularity) देखने में आती है। सात, नौ या ग्यारह वर्षों के अनन्तर हमें पुनः उसी प्रकार की आर्थिक स्थिति दिखलाई पड़ती है। ये चक्रीय उच्चावचन वस्तुतः अनेक कारणों के फलस्वरूप दृष्टिगोचर होते हैं। यदि इन उच्चावचनों से युक्त समंकों को किसी विन्दुरेखीय पत्र पर प्रांकित किया जाय, तो हमें व्यापार चक्र के चारो चरण, अर्थात् सम्पन्नता (Prosperity), ह्रास (Decline), अवसाद (Depression) तथा पुनरुत्थान (Revival) दिखलाई पड़ेंगे। चारो चरणों का यह चक्र हमेशा एक निश्चित अवधि में पूर्ण होता रहता है। चक्रीय उच्चावचनों का अध्ययन करना प्रत्येक अर्थशास्त्री व व्यवसायिक के लिये आवश्यक होता है। किन्तु इनकी प्रक्रिया समझने के लिये समंकों पर जो दीर्घकालीन व आर्तव विचरणों के प्रभाव हों उन्हें दूर कर देना अत्यावश्यक होता है।

दैव अथवा क्रमहीन उच्चावचन
(Random or Irregular Fluctuations)

दैव उच्चावचन किसी काल-क्रम से प्रभावित नहीं होते, अतः यह कहना कठिन है कि कितने समय के पश्चात ऐसे उच्चावचन दृष्टिगोचर होंगे। यदि हम किसी कालान्तर माला के अन्य अंगों, अर्थात् सुदीर्घकालीन प्रवृति, आर्तव विचरण व चक्रीय उच्चावचनों को दूर कर सकें, तो हम क्रमहीन उच्चावचनों का अध्ययन कर सकते हैं। फिर भी क्रमहीन होने के कारण इनका कोई वैज्ञानिक व विश्लेषणात्मक अध्ययन नहीं किया जा सकता। फिर भी क्रमहीन उच्चावचनों को व्यर्थ नहीं समझना चाहिये क्योंकि कभी-कभी ये अन्य प्रकार के उच्चावचनों को प्रोत्साहन देते हैं।

प्रश्न

1. What do you understand by an 'economic time series'? Why and how do you decompose such a series into various components such as trend, seasonal variation, business cycle, etc.? How is trend in a given time series studied? Explain, giving illustration.

किसी 'आर्थिक कालान्तर माला' से आपका क्या तात्पर्य है ? इस प्रकार की माला को सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति, आर्तव उच्चावचन, व्यापार चक्र, आदि का विश्लेषण करने के लिये आप क्यों और किस प्रकार विभिन्न उपविभागों में पृथक करते हैं ? किसी कालान्तर माला में सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति का किस तरह अध्ययन किया जाता है, उदाहरण सहित वर्णन कीजिये ।

(एम० ए०, बनारस, १९५५)

2. What is a 'trend' in a time series ? Describe briefly the methods known to you for determining it in a time series.

किसी कालान्तर माला में सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति क्या है ? इसे ज्ञात करने की जो रीतियाँ आपको ज्ञात हों उनका संक्षेप में वर्णन कीजिये ।

(एम० कॉम०, बनारस, १९५६)

3. What is meant by 'trend' ? How would you statistically eliminate the influence of seasonal and cyclical fluctuations on the long period movement of any series ?

'सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति' से आपका क्या अभिप्राय है ? किसी माला की दीर्घकालीन प्रवृत्ति को प्रभावित करने वाले आर्तव एवं चक्रीय उच्चावचनों को सांख्यिकीय रीति से आप किस प्रकार दूर करेंगे ?

(एम० ए०, राजपूताना, १९५६)

4. Write a brief essay on 'Analysis of Time Series'.

'कालान्तर माला के विश्लेषण' पर एक संक्षिप्त निबन्ध लिखिये ।

(एम० ए० राजपूताना, १९५७)

5. PERCENTAGE UNEMPLOYED AMONG INSURED PERSONS

(*Average for the year*)

Year	Males	Females	Year	Males	Females
1941	16.1	8.7	1945	13.2	9.5
1942	12.4	9.0	1946	10.9	6.2
1943	10.8	8.5	1947	12.2	6.7
1944	12.0	8.1	1948	11.5	7.2

Year	Males	Females	Year	Males	Females
1949	16.4	14.4	1953	19.1	9.8
1950	22.4	17.7	1954	17.8	9.8
1951	25.1	13.5	1955	14.6	8.3
1952	23.1	11.2	1956	11.8	7.7

Represent on one graph paper the series for males and that for females. Smooth the series for males by a five-yearly moving average.

(एम० ए०, बनारस, १९५६)

6. Using the data given below, explain clearly how you would determine seasonal fluctuations in a time series.

Year		Summer	Monsoon	Autumn	Winter
1	...	30	81	62	119
2	...	33	104	86	171
3	...	42	153	99	221
4	...	56	172	129	235
5	...	67	201	136	302

(आई० सी० एस०, १९४०)

7. Calculate the five-yearly moving average for the following time series and plot it with the original figures on the same graph. Next calculate seven-yearly moving average and plot it on the same graph. Comment on the reversal effect.

Year		Annual figure	Year		Annual figure	Year		Annual figure
1	...	110	11	...	130	21	...	146
2	...	104	12	...	127	22	...	142
3	...	98	13	...	122	23	...	138
4	...	105	14	...	118	24	...	135
5	...	109	15	...	130	25	...	145
6	...	120	16	...	140	26	...	155
7	...	115	17	...	135	27	...	150
8	...	110	18	...	130	28	...	148
9	...	114	19	...	127	29	...	143
10	...	122	20	...	135	30	...	156

(एम० कॉम०, बनारस, १९५६)

अध्याय १४

निर्देशांक

(Index Numbers)

निर्देशांक का अर्थ—निर्देशांकों का महत्व—निर्देशांकों की समस्यायें—मूल्य निर्देशांकों की रचना—स्थिर आधार—श्रृंखला आधार—स्थिर तथा श्रृंखला आधार निर्देशांकों में सम्बन्ध—निर्देशांक रचना में विभिन्न माध्यों का उपयोग—भारांकित निर्देशांक—जीवन-निर्वाह निर्देशांक—व्यय योग रीति—पारिवारिक आय-व्ययक रीति—जीवन-निर्वाह निर्देशांकों में विभ्रम—फिशर का आदर्श निर्देशांक—समय-उत्क्रमण परीक्षा—तत्व-उत्क्रमण परीक्षा—निर्देशांक निकालने के अन्य सूत्र—अन्य प्रकार के निर्देशांक—औद्योगिक उत्पादन के निर्देशांक—व्यापारिक स्थिति के निर्देशांक—निर्देशांकों की सीमायें—प्रश्न)

निर्देशांक का अर्थ (Meaning of Index Number)

सांख्यिकीय समंक अनेक कारणों से प्रभावित रहते हैं जिसके फलस्वरूप उनके मूल्यों में निरन्तर उच्चावचन (Fluctuations) होते रहते हैं। आर्थिक, व्यावसायिक व कृषि-संबन्धी समंकों में तो ये उच्चावचन विशेषरूप से देखे जाते हैं। सापेक्षिक ढंग से इनका अध्ययन करने के लिए निर्देशांक (Index Numbers) सर्वोपयुक्त समझे जाते हैं। क्रॉक्स्टन व काउडेन के शब्दों में निर्देशांक सम्बन्धित चल-मूल्यों के परिमाण में होने वाले अन्तरों की माप करने के साधन हैं।* वस्तुतः ये एक विशिष्ट प्रकार के माध्य हैं,† जो किसी कालान्तर अथवा स्थानिक माला की केन्द्रीय-प्रवृत्ति पर प्रकाश डालते हैं। निर्देशांकों को सूचनांक भी कहा जाता है क्योंकि ये वस्तुओं के मूल्य, जीवन-स्तर, राष्ट्रीय आय, राष्ट्रीय उत्पादन, आदि अनेक श्रेणी के समंकों की सामान्य गति में होने वाले परिवर्तनों की सूचना देते हैं।

---

*Index Numbers are devices for measuring differences in the magnitude of a group of related variables—**Croxton and Cowden.**

†Index Numbers are a specialized type of average—**Blair.**

निर्देशांकों की रचना करने की रीति को ज्ञात करने का श्रेय कार्ली (Carli)* नामक सांख्यिक को दिया जाता है जिसने सर्वप्रथम १७७४ में मुद्रा की क्रय-शक्ति का पता लगाने के लिए एक अति साधारण मूल्य-निर्देशांक की रचना की, जिसमें उसने अनाज, शराब व तेल इन तीन वस्तुओं को लिया था। मुद्रा की क्रय-शक्ति के ही अध्ययनार्थ अधिकतर विद्वानों ने प्रारम्भ में निर्देशांकों का प्रयोग किया। प्रसिद्ध अर्थशास्त्री मार्शल (Marshall), इरविंग फिशर (Irving Fisher), वाल्श (Walsh), आदि ने भी इसी उद्देश्य से निर्देशांकों की रचना की। आधुनिक समय में तो सभी प्रकार के समंकों के तुलनात्मक अध्ययन के लिए निर्देशांकों का उपयोग किया जाता है।

निर्देशांकों का महत्व (Importance of Index Numbers)

वास्तव में निर्देशांक आर्थिक वायु-मापक (Economic Barometers) के समान हैं। जिस प्रकार वायु-मापक यन्त्र हवा के दबाव व मौसम की स्थिति का अध्ययन करता है, उसी प्रकार निर्देशांक आर्थिक क्षेत्र की गति-विधि का अध्ययन करते हैं। इनकी सहायता से हम यह बड़ी सरलता से जान सकते हैं कि वस्तुओं व सेवाओं के मूल्य में क्या परिवर्तन हुआ है। इनकी सहायता से हमें यह भी ज्ञात हो जाता है कि देश में मुद्रा स्फीति (Inflation) की स्थिति है, अथवा अपस्फीति (Deflation) की स्थिति। सरकार अनेक आर्थिक नीतियों का निर्धारण इन्हीं निर्देशांकों द्वारा प्रस्तुत सूचनाओं के आधार पर करती है। इनका उपयोग उत्पादन, विक्रय, वितरण, व्यापार, आदि में होने वाले परिवर्तनों के अध्ययन के लिये किया जा सकता है। श्रमिकों की मजदूरी व उनके जीवन-स्तर से सम्बन्धित परिवर्तनों की सूचनायें भी निर्देशांकों के द्वारा प्राप्त की जा सकती हैं। स्कन्ध-विपणि (Stock Exchanges) में होने वाले मूल्य-परिवर्तनों को भी निर्देशांकों द्वारा समझा जा सकता है। औद्योगिक व व्यावसायिक गति-विधि तथा राष्ट्रीय आय पर भी निर्देशांकों द्वारा पर्याप्त प्रकाश डाला जा सकता है।

निर्देशांकों की समस्यायें (Problems of Index Numbers)

मूल्य निर्देशांकों की रचना करने के लिये निम्नलिखित समस्याओं पर विचार करने की आवश्यकता पड़ती है :—

*'Index Numbers'—Mudgett.

(१) निर्देशांक का उद्देश्य (Purpose of Index Number)

(२) आधार वर्ष का चुनाव (Selection of the Base Year)

(३) वस्तुओं का चुनाव (Selection of the Commodities)

(४) मूल्य-सूचना (Price Quotations)

(५) माध्य का चुनाव (Selection of the Average)

(६) भार देने का ढंग (System of Weighting)

(१) निर्देशांक का उद्देश्य (Purpose of Index Number)—निर्देशांक की रचना के पूर्व यह भलीभांति समझ लेना चाहिये कि हमारा उद्देश्य क्या है, क्योंकि उद्देश्य को ध्यान में रखते हुये ही हमें अन्य सांख्यिकीय क्रियायें करनी पड़ेंगी। उदाहरण के लिये यदि हमें जीवन-स्तर निर्देशांक की रचना करनी है, तो इस बात का विचार कर लेना चाहिये कि हमें केवल उद्योग-धन्धों में काम करने वाले मजदूरों का ही अध्ययन करना है अथवा ग्रामीण क्षेत्रों में रहने वाले कृषकों का भी। उद्देश्य के ही आधार पर हमें वस्तुओं का चुनाव, माध्यों का प्रयोग व भारों का निर्धारण करना पड़ता है।

(२) आधार वर्ष का चुनाव (Selection of the Base Year)—निर्देशांक की रचना करने के लिये उपयुक्त आधार वर्ष को चुनना अत्यावश्यक है। आधार वर्ष सभी दृष्टियों से एक सामान्य वर्ष होना चाहिये जिसमें साधारणतः कोई विषम घटना न घटी हो। यदि हम किसी ऐसे वर्ष को आधार मानते हैं जिसमें कोई युद्ध, अकाल अथवा आर्थिक तेजी या मन्दी हुई है, तो हमारा निर्देशांक वस्तु-स्थिति की सूचना देने में असमर्थ होगा। उपयुक्त सामान्य वर्ष के अभाव में कभी कभी कई वर्षों के मध्यक मूल्य को आधार मान लिया जाता है। आधार वर्ष के मूल्यों को सर्वदा 100 मान कर अन्य वर्षों के प्रतिशत निकाले जाते हैं, किन्तु शृंखला आधार (Chain Base) पर निर्देशांकों की रचना करने के लिये पिछले वर्ष को क्रमशः अगले वर्ष का आधार माना जाता है। इस दशा में आधार वर्ष निरन्तर परिवर्तित होता रहता है।

(३) वस्तुओं का चुनाव (Selection of Commodities)—निर्देशांक की रचना करने के लिये किन-किन वस्तुओं को और किस मात्रा में चुनना है, इसका भी विचार कर लेना चाहिये। जहाँ तक हो सके इस कार्य के लिये

उन वस्तुओं को चुनना चाहिये जो वर्ग-विशेष की रुचि, स्वभाव व आदत का प्रतिनिधित्व करती हों तथा जिनके आकार-प्रकार व गुण में सहजातीयता (Homogeneity) तथा एकरूपता (Uniformity) हो। यह आवश्यक नहीं कि बहुत अधिक संख्या में वस्तुयें चुनी जायँ क्योंकि इसमें अत्यधिक समय, श्रम व धन का अपव्यय होता है। संख्या के सम्बन्ध में कोई निश्चित नियम नहीं बतलाया जा सकता। संयुक्त राज्य अमेरिका के श्रम-समंक केन्द्र द्वारा निर्मित थोक-मूल्य निर्देशांक (U. S. Bureau of Labour Statistics' Index of Wholesale Prices) की रचना के लिये ४५० वस्तुयें चुनी जाती हैं जब कि भारत में आर्थिक सलाहकार के सामान्य उद्देश्य वाले निर्देशांक (Economic Adviser's General Purpose Index of Wholesale Prices) की रचना केवल ७८ वस्तुओं के आधार पर ही की जाती है।

(४) **मूल्य-सूचना (Price Quotations)**—उचित संख्या में प्रतिनिधि वस्तुओं का चुनाव करने के उपरान्त उनके मूल्यों को ज्ञात करना पड़ता है। यह एक अत्यन्त ही कठिन कार्य है क्योंकि प्रत्येक वस्तु के विभिन्न मूल्य होते हैं, जैसे थोक-मूल्य (Wholesale Price) व खुदरा मूल्य (Retail Price)। इसके अतिरिक्त एक ही वस्तु का मूल्य विभिन्न बाजारों भिन्न-भिन्न होता है। अतः मूल्य सम्बन्धी सूचनायें निर्देशांकों के उद्देश्य के आधार पर एकत्र करनी चाहिये। उदाहरण के लिये यदि केवल वस्तुओं के मूल्य में होने वाले परिवर्तनों का ही अध्ययन करना है, तो उनके थोक-मूल्य लिये जा सकते हैं किन्तु यदि कृषकों के जीवन-स्तर का अध्ययन करने के लिये निर्देशांक की रचना करनी है, तो हमें वस्तुओं के खुदरा-मूल्यों को लेना चाहिये। यदि विभिन्न बाजारों में एक ही वस्तु के मूल्य भिन्न-भिन्न हैं तो ऐसी स्थिति में उन मूल्यों का मध्यक-मूल्य लेना विशेष लाभप्रद होगा। मूल्यों का संकलन करने के लिये किसी विशिष्ट व विश्वसनीय संस्था का सहारा लेना चाहिये, जैसे व्यापारिक संघ (Trade Associations), व्यापार मण्डल (Chambers of Commerce) इत्यादि। पुनः इन मूल्यों की जाँच करने के लिये अन्य सूत्रों का भी सहारा लेना चाहिये। मूल्यों को व्यक्त करने के लिये किसी प्रमाप का निर्धारण भी आवश्यक है, जैसे प्रति मन, प्रति सेर, प्रति गज, आदि।

(५) **माध्य का चुनाव (Selection of the Average)**—निर्देशांक एक विशिष्ट प्रकार का माध्य है अतः उसकी रचना करने के लिये किस

माध्य का प्रयोग किया जाय, यह भी एक विचारणीय प्रश्न है। अध्याय ९ में बतलाया जा चुका है कि मध्यक (Arithmetic Mean), मध्यका (Median), गुणोत्तर मध्यक (Geometric Mean) तथा हरात्मक मध्यक (Harmonic Mean) आदि, सभी माध्यों के अपने निजी गुण-दोष हैं। अतः यह कहना कठिन है कि निर्देशांकों की रचना करने के लिये किस माध्य का प्रयोग करना उचित है। मध्यक माला के सभी मूल्यों को समान महत्व देता है, व मध्यका पर माला के चरम-मूल्यों (Extreme items) का प्रभाव नहीं पड़ता। गुणोत्तर मध्यक मूल्यों के सापेक्षिक परिवर्तनों को विशेष महत्व देता है। इसके अतिरिक्त यह माला के छोटे मूल्यों को अधिक व बड़े मूल्यों को कम भार देता है। निर्देशांकों की रचना के लिये यह माध्य सर्वोपयुक्त समझा जाता है, किन्तु इसकी गणन-क्रिया कठिन होने के कारण इसका उपयोग मध्यक की अपेक्षा कम होता है। हरात्मक मध्यक का उपयोग इस क्षेत्र में अत्यन्त ही सीमित है।

(६) भार देने का ढंग (System of Weighting)—निर्देशांकों का निर्माण करने के लिये अनेक वस्तुयें चुनी जाती हैं जिनका अलग-अलग महत्व होता है। उदाहरण के लिये जीवन-स्तर निर्देशांक में गेहूँ, चावल, वस्त्र, इंधन, तेल, आदि अनेक वस्तुओं को शामिल किया जाता है। किन्तु इंधन व तेल गेहूँ, चावल तथा वस्त्र की अपेक्षा बहुत ही कम महत्व की वस्तुयें हैं। अतः यह आवश्यक है कि अधिक महत्व की वस्तुओं को अधिक व कम महत्व की वस्तुओं को कम महत्व दिया जाय। मूल्यों को भारांकित करने का यही अभिप्राय है। किन्तु वस्तुओं के भार को निश्चित करना एक कठिन कार्य है क्योंकि इसके लिये पर्याप्त सहज बुद्धि व अनुभव की आवश्यकता होती है।

इस सम्बन्ध में भारों को दो श्रेणियों में बाँटा जा सकता है—प्रत्यक्ष भार (Explicit Weight) व अप्रत्यक्ष भार (Implict Weight)। प्रत्यक्ष भार उन्हें कहा जाता है जो अंकों के रूप में दिये जाते हैं, जैसे आधार वर्ष में उस वस्तु के उपभोग की मात्रा अथवा उस पर किया जाने वाला व्यय। किन्तु जब एक ही वस्तु की अनेक किस्में निर्देशांक में शामिल करके उन्हें अप्रत्यक्ष रूप से महत्व देने का प्रयास किया जाता है, तो ऐसे भारों को अप्रत्यक्ष भार कहते हैं।

मूल्य-निर्देशांकों की रचना
(Construction of Price Index Numbers)

निर्देशांकों की विभिन्न समस्याओं का अध्ययन करने के उपरान्त अब हमें उनकी रचना-विधि पर विचार करना है। निर्देशांकों की रचना करने की मुख्यतः दो रीतियाँ हैं :—

स्थिर आधार (Fixed Base)

(१) योग रीति (Aggregative Method)

(२) अनुपात रीति (Relative Method)

योग रीति के अनुसार निर्देशांकों की रचना करने के लिये पहले आधार वर्ष (Base Year) व वर्तमान वर्ष (Current Year) के विभिन्न मूल्यों (साधारणतः आधार वर्ष के मूल्यों को p_o तथा वर्तमान वर्ष के मूल्यों को p_x संकेत दिये जाते हैं) का योग कर लिया जाता है। तत्पश्चात् वर्तमान वर्ष के मूल्यों के योग में आधार वर्ष के मूल्यों के योग से भाग दे कर भागफल में 100 से गुणा कर के उसे प्रतिशत में परिणित कर लिया जाता है। यही प्रतिशत वर्तमान वर्ष का निर्देशांक है। अतः इसका सूत्र हुआ—

$$I = \frac{\Sigma p_x}{\Sigma p_o} \times 100$$

अनुपात रीति से निर्देशांक बनाने के लिये पहले आधार वर्ष के सभी मूल्यों को 100 मान कर उनके आधार पर वर्तमान वर्ष के मूल्यों के क्रमशः प्रतिशत ज्ञात कर लिये जाते। पुनः इन प्रतिशतों का योग करके उसमें वस्तुओं की संख्या से भाग दे दिया जाता है। प्रतिशतों का यह मध्यक (Arithmetic Mean) ही निर्देशांक है। सूत्रानुसार—

$$I = \frac{\Sigma(p_x/p_o \times 100)}{n}$$

जिसमें $(p_x/p_o \times 100)$ मूल्यानुपात (Price Relatives) हैं।

Illustration 1 :—

Find out the index numbers for 1955, 1956 and 1957, taking 1954 as the base year by (i) Aggregative and (ii) relative methods :—

Commodity		1954	1955	1956	1957
A	...	2	5	4	3
B	...	8	11	13	6
C	...	4	5	6	8
D	...	6	4	5	7
E	...	5	4	6	3

Solution :—

CALCULATION OF INDEX NUMBERS FOR 1955, 1956 & 1957 BY AGGREGATIVE AND RELATIVE METHODS

Commodity	1954		1955		1956		1957	
	(p_o)	—	(px_1)	$(p_{x1}/p_o \times 100)$	(px_2)	$(p_{x2}/p_o \times 100)$	(px_3)	$(p_{x3}/p_o \times 100)$
A	2	100	5	250.0	4	200.0	3	150.0
B	8	100	11	137.5	13	162.5	6	75.0
C	4	100	5	125.0	6	150.0	8	200.0
D	6	100	4	66.7	5	83.3	7	116.7
E	5	100	4	80.0	6	120.0	3	60.0
$n=5$	$\Sigma(p_o)=25$		$\Sigma(px_1)=29$	659.2	$\Sigma(p_{x2})=34$	715.8	$\Sigma(p_{x3})=27$	601.7

INDEX MUMBERS BY AGGREGATIVE METHOD

$$I_{1955}=\frac{\Sigma(p_{x1})}{\Sigma(p_o)}\times 100 = \frac{29}{25}\times 100 = 116.0$$

$$I_{1956}=\frac{\Sigma(p_{x2})}{\Sigma(p_o)}\times 100 = \frac{34}{25}\times 100 = 136.0$$

$$I_{1957}=\frac{\Sigma(p_{x3})}{\Sigma(p_o)}\times 100 = \frac{27}{25}\times 100 = 108.0$$

INDEX MUMBERS BY RELATIVE METHOD

$$I_{1955}=\frac{\Sigma\,(p_{x1}/p_o\times100)}{n}=\frac{659.2}{5}=131.84$$

$$I_{1956}=\frac{\Sigma(p_{x2}/p_o\times100)}{n}=\frac{715.8}{5}=143.16$$

$$I_{1957}=\frac{\Sigma\,(p_{x3}/p_o\times100)}{n}=\frac{601.7}{5}=120.34$$

शृङ्खला आधार (Chain Base)

ऊपर के उदाहरण में जो निर्देशांक निकाले गये है उनमें आधार वर्ष को स्थिर (Fixed Base) माना गया है, अर्थात् सभी वर्षों के निर्देशांक 1954 के ही आधार पर निकाले गए हैं। इन निर्देशांकों से यह तो जाना जा सकता है कि 1954 के मूल्यों की तुलना में 1955, 1956 तथा 1957 के मूल्यों में क्या परिवर्तन हुए, किन्तु यह कहना कठिन है कि 1955 की तुलना में 1956 अथवा 1956 की तुलना में 1957 के मूल्यों में क्या परिवर्तन हुआ है। इस कठिनाई को दूर करने के लिए शृंखला आधार निर्देशांक (Chain Base Index Numbers) तैयार किये जाते हैं। इसमें पिछले वर्ष के मूल्यों को 100 मान कर अगले वर्ष के निर्देशांक निकाले जाते हैं। अतः ये निर्देशांक वर्ष-प्रतिवर्ष के मूल्य-परिवर्तनों का अध्ययन करने का अवसर देते हैं। शृंखला आधार पर निर्मित निर्देशांक व्यवसायियों व अर्थशास्त्रिओं के लिये बड़े ही महत्वपूर्ण होते हैं। साथ ही ऐसे निर्देशांकों की रचना करते समय आवश्यकतानुसार नवीन वस्तुओं का समावेश किया जा सकता है व अनुपयोगी वस्तुओं को छोड़ा जा सकता है।

Illustration 2 :—

From the following annual average prices of three commodities given in rupees per unit, find chain index numbers based on 1939 :—

Commodity		1939	1940	1941	1942	1943
A	...	2	3	4	5	6
B	...	8	10	12	16	18
C	...	4	5	8	10	12

(बी० कॉम०, बनारस, १९५६)

Solution :—

CALCULATION OF CHAIN BASE INDEX NUMBERS

Commodity	Relatives (or Link Relatives) based on preceding year									
	1939		1940		1941		1942		1943	
	Rs.	$\%_1$	Rs.	$\%_2$	Rs.	$\%_3$	Rs.	$\%_4$	Rs.	$\%_5$
A	2	100.0	3	150.0	4	133.3	5	125.0	6	120.0
B	8	100.0	10	125.0	12	120.0	16	133.3	18	112.5
C	4	100.0	5	125.0	8	160.0	10	125.0	12	120.0
Total of Link Relatives		300.0		400.0		413.3		383.3		352.5
Average of Link Relatives		100.0		133.3		137.8		127.8		117.5
Chain Indices* (1939 =100)		100.0		133.3		183.7		234.8		275.9

*श्रृंखला आधार पर जो निर्देशांक निकाले गये हैं उनका सूत्र है—

$$\frac{\textit{C. I. of the previous year} \times \textit{Average Link Relative of this year}}{100}$$

स्थिर तथा श्रृंखला आधार निर्देशांकों में सम्बन्ध
(Relation between Fixed and Chain Base Indices)

आवश्यकतानुसार स्थिर आधार पर निर्मित निर्देशांकों को श्रृंखला आधार पर तथा श्रृंखला आधार के निर्देशांकों को स्थिर आधार पर भी परिणित किया जा सकता है। इसका एक उदाहरण लीजिए :—

Illustration 3 :—

(*a*) From the Fixed Base Index Numbers given below, prepare Chain Base Index Numbers :—

Year	...	1953	1954	1955	1956
Index	...	275	325	400	350

(*b*) From the Chain Base Index Numbers given below, prepare Fixed Base Index Numbers :—

Year	...	1953	1954	1955	1956
Index	...	90	105	102	95

Solution :—

COMPUTATION OF CHAIN BASE INDEX NUMBERS FROM FIXED BASE INDEX NUMBERS

Year	Fixed Base Index Nos.	Conversion	Chain Base Index Nos.
1953	275	—	100.0
1954	325	$325 \div 275 \times 100$	118.2
1955	400	$400 \div 325 \times 100$	123.1
1956	350	$350 \div 400 \times 100$	87.5

COMPUTATION OF FIXED BASE INDEX NUMBERS FROM CHAN BASE INDEX NUMBERS

Year	Chain Base Index Nos.	Conversion	Fixed Base Index Nos.
1953	90	...	90.0
1454	105	$\frac{90}{100} \times 105$	94.5
1955	102	$\frac{90}{100} \times \frac{105}{100} \times 102$	96.4
1956	95	$\frac{90}{100} \times \frac{105}{100} \times \frac{102}{100} \times 95$	91.6

निर्देशांक रचना में विभिन्न माध्यों का उपयोग
(Uses of different Averages in Index Numbers)

उपर्युक्त उदाहरणों में निर्देशांक निकालने के लिए साधारण मध्यक (Simple Arithmetic Mean) का प्रयोग किया गया है। मध्यका

(Medin) व गुणोत्तर मध्यक (Geometric Mean) का भी इस कार्य के लिए प्रयोग किया जा सकता है। इसका एक उदाहरण देखिये :—

Illustration 4 :—

Find out the index numbers for 1951, 1952 and 1953 based on 1950, using Arithmetic Mean, Median and Geometric Mean :—

Commodity		1950	1951	1952	1953
A	...	3.75	7.50	5.00	6.00
B	...	2.50	3.00	4.00	3.25
C	...	3.00	4.50	2.00	2.50
D	...	2.00	2.00	3.00	4.00
E	...	4.25	3.75	4.00	5.00

Solution :—

CALCULATION OF INDEX NUMBERS FOR 1951, 1952 & 1953 USING ARITHMETIC MEAN, MEDIAN & GEOMETRIC MEAN

Commodity	1950		1951		1952		1953	
	1950	%0	1951	%1	1952	%2	1953	%3
A	3.75	100	7.50	200.0	5.00	133.3	6.00	160.0
B	2.50	100	3.00	120.0	4.00	160.0	3.25	130.0
C	3.00	100	4.50	150.0	2.00	66.7	2.50	83.3
D	2.00	100	2.00	100.0	3.00	150.0	4.00	200.0
E	4.25	100	3.75	88.2	4.00	94.1	5.00	117.6
Total of Relatives		500		658.2		604.1		690.9
Average of Relatives		100		131.6		120.8		138.2
Median of Relatives		100		120.0		133.3		130.0
G. M. of Relatives		100		125.9		114.8		132.4

इस उदाहरण में दिये हुए मूल्यों के निर्देशांक मध्यक, मध्यका व गुणोत्तर मध्यक द्वारा ज्ञात किये गये हैं। आधार वर्ष 1950 है। मध्यका से निर्देशांक निकालने के लिये मूल्यानुपातों को आरोही (Ascending) अथवा अवरोही (Descending) क्रम में रखना आवश्यक होगा। गुणोत्तर मध्यक से निर्देशांक निकालने के लिये मूल्यानुपातों के लघुगणक निकाल कर पृष्ठ २५१ पर दिये गये सूत्र का प्रयोग किया गया है। यदि हम इन विभिन्न मध्यकों से ज्ञात किये गये निर्देशांकों का तुलनात्मक अध्ययन करें, तो हम देखेंगे कि इस कार्य के लिये गुणोत्तर मध्यक सर्वोत्तम है क्योंकि यह बड़े मूल्यों को कम व छोटे मूल्यों को अधिक भार प्रदान कर रहा है। साथ ही इस बात का भी ध्यान रखना चाहिये कि अनुपातों व प्रतिशतों का मध्यक निकालने के लिये गुणोत्तर मध्यक सब माध्यों में श्रेष्ठ माना जाता है।

भारांकित निर्देशांक (Weighted Index Numbers)

निर्देशांकों की विभिन्न समस्याओं का वर्णन करते समय यह बतलाया जा चुका है कि विभिन्न मूल्यों को भारांकित करना इसलिये आवश्यक होता है कि उपभोग में आने वाली सभी वस्तुयें समान महत्व की नहीं होतीं। अतः उन्हें भारांकित करने के लिये उनके मूल्यों में दिये हुये भारों से गुणा करना पड़ता है। जिस प्रकार साधारण मध्यक से निर्देशांक निकालने की दो रीतियाँ—योग रीति व अनुपात रीति—हैं, उसी प्रकार भारांकित निर्देशांक निकालने की भी यही दो रीतियाँ हैं। प्रथम रीति के अनुसार आधार वर्ष व वर्तमान वर्ष के मूल्यों में तत्सम्बन्धी भारों से गुणा कर लिया जाता है और तब वर्तमान वर्ष के भारांकित मूल्यों के योग में आधार वर्ष के भारांकित मूल्यों के योग से भाग देकर 100 से गुणा कर दिया जाता है। इसका सूत्र है—

$$I=\frac{\Sigma(p_x.w)}{\Sigma(p_o.w)}\times 100 \quad \text{अथवा} \quad I=\frac{\Sigma(p_x q_o)}{\Sigma(p_o q_o)}\times 100$$

जिसमें p_x व p_o क्रमशः वर्तमान व आधार वर्ष के मूल्यों के व w अथवा q_o भार के प्रतीक हैं।

अनुपात रीति से भारांकित निर्देशांक निकालने के लिये पहले आधार वर्ष के मूल्यों को 100 मान कर वर्तमान वर्ष के मूल्यों के प्रतिशत निकाल लिये जाते हैं। तत्पश्चात् इन प्रतिशतों में तत्सम्बन्धी भारों से गुणा करके उनका योग

कर लिया जाता है। इस योग में भारों के योग से भाग देने पर भारांकित निर्देशांक निकल आता है। सूत्रानुसार

$$I=\frac{\Sigma\, p_x/p_o \times 100 . w)}{\Sigma\, w} \quad or \quad I=\frac{\Sigma\,(p_x/p_o \times 100 . q_o)}{\Sigma\, q_o}$$

Illustration 5 :—

Compute the weighted index numbers from the following prices of commodity I, II, and III :—

Commodity		1955	1956	1957	Weight
I	...	5.0	4.0	7.0	5
II	...	4.0	6.0	5.0	3
III	...	6.0	8.0	9.0	2

Solution :—

COMPUTATION OF THE PRICE INDEX NUMBERS BY AGGREGATIVE METHOD

Commodity	Weight (w)	1955		1956		1957	
		(p_o)	($p_o w$)	(p_{x1})	($p_{x2} w$)	(p_{x2})	($p_{x2} w$)
I	5	5.0	25.0	4.0	20.0	7.0	35.0
II	3	4.0	12.0	6.0	18.0	5.0	15.0
III	2	6.0	12.0	8.0	16.0	9.0	18.0
			$\Sigma p_o w$ =49.0		$\Sigma p_{x1} w$ =54.0		$\Sigma p_{x2} w$ =68.0

$$I_{1956}=\frac{\Sigma(p_{x1}w)}{\Sigma(p_o w)}\times 100 \qquad I_{1957}=\frac{\Sigma(p_{x2}w)}{\Sigma(p_o w)}\times 100$$

$$=\frac{54.0}{49.0}\times 100 \qquad =\frac{68}{49}\times 100$$

$$=110.2 \qquad =138.8$$

COMPUTATION OF THE PRICE INDEX NUMBERS BY RELATIVE METHOD

Commodity	Weight (w)	1955		1956			1957		
		(p_o)	$\%_o$	(p_{x1})	$\%_1$	($\%_1 w$)	(p_{x2})	$\%_2$	($\%_2 w$)
I	5	5.0	100	4.0	80.0	400.0	7.0	140.0	700.0
II	3	4.0	100	6.0	150.0	450.0	5.0	125.0	375.0
III	2	6.0	100	8.0	133.3	266.6	9.0	150.0	300.0
	$\Sigma w = 10$					$\Sigma \%_1 w = 1116.6$			$\Sigma \%_2 w = 1375.0$

$$I_{1956} = \frac{\Sigma(p_{x1}/p_o \times 100 . w)}{\Sigma w} = \frac{1,116.6}{10} = 111.66$$

$$I_{1957} = \frac{\Sigma(p_{x2}/p_o \times 100 . w)}{\Sigma w} = \frac{1,375.0}{10} = 137.5$$

जीवन-निर्वाह निर्देशांक (Cost of Living Index Numbers)

समाज में विभिन्न वर्गों के व्यक्ति रहते हैं जिनके रहन-सहन, आय-व्यय, जीवन स्तर आदि में भिन्नता होती है। मूल्य परिवर्तन के फलस्वरूप उनके रहन-सहन के व्यय में कितना और किस दिशा में परिवर्तन हुआ इसकी जानकारी के लिये जो निर्देशांक तैयार किये जाते हैं उन्हें जीवन-निर्वाह निर्देशांक (Cost of Living Index Numbers) कहते हैं। ये किसी वर्ग-विशेष के जीवन-स्तर में परिवर्तन की मात्रा ज्ञात करने के लिये बनाये जाते हैं, अतः इनमें उन्हीं वस्तुओं व सेवाओं का समावेश करना चाहिये जिनका उपभोग उस वर्ग के व्यक्ति अधिकतर करते हों। जीवन-निर्वाह निर्देशांकों की रचना करने की दो रीतियाँ हैं:—

(१) व्यय-योग रीति (Aggregate Expenditure Method)

(२) पारिवारिक आय-व्ययक रीति (Family Budget Method)

व्यय योग रीति (Aggregate Expenditure Method)

इस रीति के अनुसार आधार वर्ष व वर्तमान वर्ष के कुल व्ययों का योग कर के वर्तमान वर्ष के योग में आधार वर्ष के योग से भाग दे दिया जाता है और भागफल में 100 से गुणा करके प्रतिशत में परिणित कर लिया जाता है।

$$I=\frac{\Sigma(p_x q_o)}{\Sigma(p_o q_o)}\times 100$$ (भारांकित निर्देशांक के सूत्र के समान)

दोनों रीतियों से समान उत्तर प्राप्त होता है।

Illustration 6 :—

Construct the Cost of Living Index Number for 1940 on the basis of 1939, using Aggregate Expenditure Method :—

Articles	Quantity consumed in 1939	Unit	1939 Rs. as. p.	1940 Rs. as. p.
Rice ...	6 mds.	md.	5 12 0	6 0 0
Wheat ...	6 mds.	md.	5 0 0	8 0 0
Gram ...	1 md.	md.	6 0 0	9 0 0
Arhar ...	6 mds.	md.	8 0 0	10 0 0
Ghee ...	4 srs.	sr.	2 0 0	1 8 0
Sugar ...	1 md.	md.	20 0 0	15 0 0
Oil ...	20 srs.	md.	20 8 0	18 0 0
Salt ...	12 srs.	md.	4 0 0	4 12 0
Fuel ...	12 mds.	md.	0 12 0	1 0 0
Cloth ...	50 yds.	yd.	0 8 0	0 12 0
House Rent	—	House	10 0 0	12 0 0

(बी० कॉम०, आगरा, १९५३)

Solution :—

CONSTRUCTION OF COST OF LIVING INDEX NUMBER BY AGGREGATE EXPENDITURE METHOD

Articles	Qty. consumed (q_o)	Unit	1939 (p_o) Rs.	1940 (p_x) Rs.	($p_o q_o$)	($p_x q_o$)
Rice	6 mds.	md.	5.75	6.00	34.50	36.00
Wheat	6 mds.	md.	5.00	8.00	30.00	48.00
Gram	1 md.	md.	6.00	9.00	6.00	9.00
Arhar	6 mds.	md.	8.00	10.00	48.00	60.00
Ghee	4 srs.	sr.	2.00	1.50	8.00	6.00
Sugar	1 md.	md.	20.00	15.00	20.00	15.00
Oil	20 srs.	md.	20.50	18.00	10.25	9.00
Salt	12 srs.	md.	4.00	4.75	1.20	1.425
Fuel	12 mds.	md.	0.75	1.00	9.00	12.00
Cloth	50 yds.	yd.	0.50	0.75	25.00	37.50
H. Rent	—	H.	10.00	12.00	10.00	12.00
					$\Sigma p_o q_o =$ 201.95	$\Sigma p_x q_o =$ 245.925

$$I_{1940} = \frac{\Sigma(p_x q_o)}{\Sigma(p_o q_o)} \times 100$$

$$= \frac{245.925}{201.95} \times 100$$

$$= 121.77$$

पारिवारिक आय-व्ययक रीति (Family Budget Method)

व्यय-योग रीति से जीवन-निर्वाह निर्देशांक की गणना करने के लिने यह कल्पना की गई है कि आधार वर्ष व वर्तमान वर्ष में उपभोग की जाने वाली वस्तुओं की मात्रा समान रही है। पारिवारिक आय-व्ययक रीति में वस्तुओं के मूल्य को भारांकित करने के लिये एक दूसरी विधि अपनाई जाती है। इसके अनुसार भारों का निर्धारण प्रत्येक वस्तु पर किये जाने वाले व्यय के आधार पर किया जाता है। फिर यहाँ मूल्यों को भारांकित करके योग

निकालने के बजाय सर्वप्रथम उनके मूल्यानुपात निकाल लिये जाते हैं और तब उन मूल्यों को कथित भारों से गुणा करके भागफल में उनके योग का भाग दे दिया जाता है—

$$I_{1940}=\frac{\Sigma(p_x/p_o\times 100.w)}{\Sigma w}$$ (पूर्वोक्त सूत्र के ही समान, किन्तु $w=p_oq_o$)

Illustration 7 :—

Using the data given in Illustration No. 5, compute the Cost of Living Index Number by Family Budget Method :—

Solution :—

COMPUTATION COST OF LIVING INDEX NUMBER BY FAMILY BUDGET METHOD

Articles	Qty. consumed 1939	Unit	1939 (p_o) Rs.	1940 (p_x) Rs.	$p_x/p_o \times 100$	Values consumed 1939(w) Rs	$\frac{p_x}{p_o}\times 100.w$
Rice	6 mds.	md.	5.75	6.00	104.3	34.50	3,600.00
Wheat	6 mds.	md.	5.00	8.00	160.0	30.00	4,800.00
Gram	1 md.	md.	6.00	9.00	150.0	6.00	900.00
Arhar	6 mds.	md.	8.00	10.00	125.0	48.00	6,000.00
Ghee	4 srs.	sr.	2.00	1.50	75.0	8.00	600.00
Sugar	1 md.	md.	20.00	15.00	75.0	20.00	1,500.00
Oil	20 srs.	md.	20.50	18.00	87.8	10.25	900.00
Salt	12 srs.	md.	4.00	4.75	118.7	1.20	142.50
Fuel	12 mds.	md.	0.75	1.00	133.3	9.00	1,200.00
Cloth	50 yds.	yd.	0.50	0.75	150.0	25.00	3,750.00
H. Rent	—	H.	10.00	12.00	120.0	10.00	1,200.00
						201.95	24,592.50

$$I_{1940}=\frac{\Sigma\,(p_x/p_o\times 100\,w)}{\Sigma\,w}$$

$$=\frac{24{,}592.50}{201.95}$$

$$=121.77$$

जीवन-निर्वाह निर्देशांकों में विभ्रम
(Errors in Cost of Living Index Numbers)

जीवन-निर्वाह निर्देशांकों में अनेक विभ्रम होने की संभावना रहती है। वस्तु, मूल्य व भार के गलत चुनाव के कारण जो निर्देशांक तैयार किये जाते हैं वे परिवार-व्यय के वास्तविक परिवर्तन का चित्रण नहीं कर पाते। वस्तुओं की माँग व उनके मूल्य में होने वाले परिवर्तनों की उपेक्षा करने पर भी निर्देशांक त्रुटिपूर्ण हो जाते हैं। भारों के निर्धारण में तो विशेष सतर्कता रखनी चाहिये। इसके लिये समय-समय पर पारिवारिक आय-व्ययकों (Family Budgets) का संकलन करके उनका विश्लेषणात्मक अध्ययन करना आवश्यक होता है, जिससे केवल प्रतिनिधि वस्तुओं का ही समावेश करने के साथ ही उनके मूल्य में होने वाले परिवर्तनों को भी महत्व दिया जा सके।

फिशर का आदर्श निर्देशांक (Fisher's Ideal Index Number)

ऊपर के उदाहरणों में जो भारांकित निर्देशांक तैयार किये गये हैं उनमें आधार वर्ष के भारों को ही वर्तमान वर्ष के लिये उपयोग में लाया गया है। इसका अर्थ यह हुआ कि आधार वर्ष में वस्तुओं का जो महत्व था वही वर्तमान वर्ष में भी है। किन्तु यह कल्पना करना भूल है। मनुष्यों की आवश्यकतायें निरन्तर बदलती रहती हैं। अतः प्रो० फिशर ने एक ऐसे सूत्र का उल्लेख किया है जिसके अनुसार आधार वर्ष के मूल्यों (p_o) को आधार वर्ष के भार (q_o) से व वर्तमान वर्ष के मूल्यों (p_x) को वर्तमान वर्ष के भार (q_x) से भारांकित किया जाता है। सूत्र है—

$$I = \sqrt{\frac{\Sigma p_x q_o}{\Sigma p_o q_o} \times \frac{\Sigma p_x q_x}{\Sigma p_o q_x}} \times 100$$

इस सूत्र के आधार पर ज्ञात किये जाने वाले निर्देशांक को आदर्श निर्देशांक इसलिये कहते हैं कि इसमें निर्देशांकों के निम्न दो गुण पूर्णतया पाये जाते हैं:—

(१) **समय अथवा काल उत्क्रमण परीक्षा (Time Reversal Test)**

(२) **तत्व-उत्क्रमण परीक्षा (Factor Reversal Test)**

समय-उत्क्रमण परीक्षा (Time Reversal Test)

प्रो० फिशर के कथनानुसार प्रत्येक निर्देशांक में सबसे पहला गुण यह होना चाहिये कि वह समय अथवा काल-उत्क्रमण परीक्षा में खरा उतरे। कहने का तात्पर्य यह है कि यदि किसी वर्ष (1939) को आधार वर्ष मान किसी अन्य वर्ष (1956) का मूल्य निर्देशांक निकाला जाय, और फिर उसी रीति से द्वितीय वर्ष (1956) को आधार वर्ष मान कर प्रथम वर्ष (1939) का निर्देशांक निकाला जाय, तो दोनों निर्देशांक एक दूसरे के व्युत्क्रम (Reciprocal) होने चाहिये,* अर्थात् यदि दोनों का पारस्परिक गुणनफल निकाला जाय तो वह एक के बराबर हो। उदाहरण के लिये यदि 1956 का निर्देशांक यह सूचित करता है कि मूल्य दूने हो गये हैं, तो 1956 के निर्देशांक को यह सूचित करना चाहिये कि 1956 की तुलना में मूल्य आधे थे। अतः

$$I_{1956} \times I_{1939} = 1$$

तत्व-उत्क्रमण परीक्षा (Factor Reversal Test)

निर्देशांकों में दूसरा गुण यह होना चाहिये कि यदि मूल्य (Price) में होने वाले परिवर्तनों को मात्रा (Quantity) अथवा भार में होने वाले परिवर्तनों से गुणा किया जाय, तो वह मूल्य में होने वाले सम्पूर्ण परिवर्तन के बराबर होना चाहिए, क्योंकि यदि ध्यानपूर्वक देखा जाय तो किसी विशेष समय पर होने वाला मूल्य का कुल परिवर्तन मूल्य व मात्रा के परिवर्तनों के गुणनफल के बराबर होता है।† उदाहरण के लिये यदि 1956 में मूल्य दुगुने हो जायँ व मात्रा बढ़कर तिगुनी हो जाय, तो 1939 की अपेक्षा 1939 के मूल्य में छः गुना परिवर्तन हो जायगा। अतः इस परीक्षा के लिए पहले दिये हुए मूल्यों व मात्राओं के क्रमशः अलग अलग निर्देशांक निकाल लिये जाते हैं और तब उन्हें

---

†The test is that the formula for calculating an index number should be such that it will give the same ratio between one point of comparison and the other, no matter which of the two is taken as base—**Fisher.**

†Just as each formula should permit inter-change of two items without giving inconsistent results, so it ought to permit interchanging the price and quantities without giving inconsistent results, i. e., the two results multiplied together should give true value ratio—**Fisher.**

गुणा करके यह देखा जाता है कि गुणनफल $\frac{\Sigma p_x q_x}{\Sigma p_o q_o}$ के बराबर है अथवा नहीं।

$$I_p \times I_q = \frac{\Sigma\, p_x q_o}{\Sigma\, p_o q_o} \text{ (True Value Ratio)}$$

Illustration 8 :—

From the following data construct Fisher's Ideal Index, and show how it satisfies Time and Factor Reversal Tests :—

Commodity		Base Year Price	Base Year Quantity	Current Year Price	Current Year Quantity
A	...	6	50	10	56
B	...	2	100	2	120
C	...	4	60	6	60
D	...	10	30	12	24
E	...	8	40	12	36

(एम० कॉम०, इलाहाबाद, १९४६ तथा बी० कॉम०, दिल्ली, १९५३)

Solution :—

CONSTRUCTION OF FISHER'S IDEAL INDEX NO.

Commodity	Base Year		Current Year		$(p_o q_o)$	$(p_o q_x)$	$(p_x q_o)$	$(p_x q_x)$
	(p_o)	(q_o)	(p_x)	(q_x)				
A	6	50	10	56	300	336	500	560
B	2	100	2	120	200	240	200	240
C	4	60	6	60	240	240	360	360
D	10	30	12	24	300	240	360	288
E	8	40	12	36	320	288	480	432
					$\Sigma p_o q_o$ =1,360	$\Sigma p_o q_x$ =1,344	$\Sigma p_x q_o$ =1,900	$\Sigma p_x q_x$ =1,880

$$I = \sqrt{\frac{\Sigma\, p_x q_o}{\Sigma\, p_o q_o} \times \frac{\Sigma\, p_x q_x}{\Sigma\, p_o q_x}} \times 100$$

$$= \sqrt{\frac{1{,}900}{1{,}360} \times \frac{1{,}880}{1{,}344}} \times 100$$

$$= 139.9$$

अब हमें यह देखना कि फिशर का निर्देशांक किस प्रकार समय उत्क्रमण परीक्षा तथा तत्व-उत्क्रमण परीक्षा में खरा उतरता है। सरलता के लिए यदि हम 100 को छोड़ दें, तो प्रथम परीक्षा तब पूर्ण समझी जायगी जब—

$$I_1 \times I_2 = \sqrt{\frac{\Sigma p_x q_o}{\Sigma p_o q_o} \times \frac{\Sigma p_x q_x}{\Sigma p_o q_x}} \times \sqrt{\frac{\Sigma p_o q_o}{\Sigma p_x q_o} \times \frac{\Sigma p_o q_x}{\Sigma p_x q_x}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma p_x q_o}{\Sigma p_o q_o} \times \frac{\Sigma p_x q_x}{\Sigma p_o q_x} \times \frac{\Sigma p_o q_o}{\Sigma p_x q_o} \times \frac{\Sigma p_o q_x}{\Sigma p_x q_x}} = \sqrt{1} = 1$$

अतः यह सिद्ध होता है कि यदि उपर्युक्त तालिका में ज्ञात किए गए मूल्यों को इस सूत्र में आदिष्ट किया जाय, तो भी दोनों निर्देशांक एक दूसरे के व्युत्क्रम (Reciprocal) होंगे।

तत्व-उत्क्रमण परीक्षा के लिये यह आवश्यक है कि मूल्य व मात्रा के निर्देशांकों का गुणनफल बराबर $\Sigma p_x q_x / \Sigma p_o q_o$ के हो। अत:—

$$I_p \times I_q = \sqrt{\frac{\Sigma p_x q_o}{\Sigma p_o q_o} \times \frac{\Sigma p_x q_x}{\Sigma p_o q_x}} \times \sqrt{\frac{\Sigma q_x p_o}{\Sigma q_o p_o} \times \frac{\Sigma q_x p_x}{\Sigma q_o p_x}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma p_x q_o}{\Sigma p_o q_o} \times \frac{\Sigma p_x q_x}{\Sigma p_o q_o} \times \frac{\Sigma q_x p_o}{\Sigma q_o p_o} \times \frac{\Sigma q_x p_x}{\Sigma q_o p_x}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\Sigma p_x q_x)^2}{(\Sigma p_o q_o)^2}} = \frac{\Sigma p_x q_x}{\Sigma p_o q_o}$$

अतः इस उदाहरण से यह स्पष्ट हो जाता है कि प्रो० फिशर का सूत्र अन्य सूत्रों की अपेक्षा श्रेष्ठ है। यह गुणोत्तर मध्यक पर आधारित है, इसलिए वस्तुओं के मूल्य को उपयुक्त भार प्रदान करता है।

निर्देशांक निकालने के अन्य सूत्र
(Other Formulæ for Index Numbers)

निर्देशांकों की गणना करने के लिये समय-समय पर सांख्यिकों व अर्थशास्त्रिओं ने अनेक सूत्रों का प्रतिपादन किया है। उनमें से कुछ सूत्रों का यहाँ उल्लेख किया जा रहा है :—

(*i*) LASPEYRES FORMULA

$$I = \frac{\Sigma p_x q_o}{\Sigma p_o q_o}$$

(*ii*) PAASCHE'S FORMULA

$$I = \frac{\Sigma p_x q_x}{\Sigma p_o q_x}$$

प्रथम सूत्र में आधार व वर्तमान वर्ष के मूल्यों को आधार वर्ष के भारों से जब कि दूसरे सूत्र में उन्हें वर्तमान वर्ष के भारों से भारांकित करने का संकेत है।

(*iii*) DROBISCH AND BOWLEY FORMULA

$$I=\frac{\Sigma p_x q_o}{\Sigma p_o q_o}+\frac{\Sigma p_x q_x}{\Sigma p_o q_x}\div 2$$

यह सूत्र प्रथम व द्वितीय सूत्रों का साधारण मध्यक है।

(*iv*) MARSHALL–EDGEWORTH FORMULA

$$I=\frac{\Sigma\,(q_o+q_x)\,p_x}{\Sigma\,(q_o+q_x)\,p_o}$$

(*v*) WALSH FORMULA

$$I=\frac{\Sigma\sqrt{q_o\,(q_x p_x)}}{\Sigma\sqrt{q_o\,(q_x p_o)}}$$

चतुर्थ सूत्र में मूल्यों को आधार व वर्तमान वर्ष के भारों के योग से गुणा करने का संकेत है। अन्तिम सूत्र में आधार वर्ष के भारों से वर्तमान व आधार वर्ष के कुल मूल्यों में गुणा कर के गुणन फल का वर्गमूल निकालने का संकेत है।

औद्योगिक उत्पादन के निर्देशांक
(Index of Industrial Production)

किसी देश के औद्योगिक उत्पादन में किसी वर्ष-विशेष की अपेक्षा कितनी वृद्धि अथवा ह्रास हुआ है, इसकी जानकारी के लिये भी निर्देशांक बनाये जा सकते हैं। औद्योगिक उत्पादन के निर्देशांकों की रचना करने के लिये हमें उत्पादन के सभी क्षेत्रों के आँकड़े एकत्र करने पड़ते हैं। खनन (Mining) उद्योग, धातु-परीक्षण (Mettalurgical) उद्योग, यांत्रिक (Mechanical) उद्योग, वस्त्र (Textiles) उद्योग, उत्पत्ति-कर (Excise Duty) देने वाले उद्योग, जैसे, चीनी, तम्बाकू, चाय, आदि, तथा अन्य सभी उद्योगों के उत्पादन सम्बन्धी आँकड़ों का ऐसे निर्देशांक में समावेश किया जाता है। तदुपरान्त साधारण निर्देशांकों की रचना के समान ही इनमें भी मूल्यानुपातों के प्रतिशत निकाल कर उन्हें भारांकित किया जाता है। भार के लिये प्रत्येक उद्योग के उत्पादन का कुल मूल्य अथवा उद्योगों का राष्ट्रोन्नति में जो महत्व है उसे लिया जा सकता है। भारांकित मूल्यानुपातों का यदि गुणोत्तर मध्यक निकाला जाय, तो ऐसे निर्देशांक अधिक विश्वसनीय होते हैं।

व्यापारिक स्थिति के निर्देशांक (Index of Business Activity)

जिस प्रकार औद्योगिक उत्पादन में होने वाले परिवर्तनों के अध्ययनार्थ निर्देशांक तैयार किये जाते हैं, उसी प्रकार व्यापारिक स्थिति के भी निर्देशांक तैयार किये जाते हैं। किन्तु इसके लिये असंख्य वस्तुओं के मूल्यों का संकलन करना आवश्यक होता है क्योंकि किसी देश की व्यापारिक दशा पर उस देश की सभी वस्तुओं के उत्पादन व मूल्यों का प्रभाव पड़ता रहता है। व्यापारिक स्थिति के निर्देशांकों के आधार पर हम यह कह सकते हैं कि देश में समृद्धि है अथवा संकट। भविष्य में व्यापारिक स्थिति में होने वाले परिवर्तनों की संभावनाओं पर इन निर्देशांकों द्वारा प्रकाश डाला जा सकता है। प्रसिद्ध अर्थशास्त्री प्रो० पीगू ने इंग्लैंड की व्यापारिक स्थिति में होने वाले परिवर्तनों के अध्ययनार्थ निम्नलिखित को चुना था :—

(१) बेकारी का प्रतिशत, (२) कच्चे लोहे का उपभोग, (३) इंग्लैंड में मूल्य, (४) त्रैमासिक बिलों पर वट्टे की दरें (Rates of Discount), (५) निर्मित वस्तुओं का परिमाण, (६) कृषि-उत्पादन, (७) देश की प्रमुख नौ फसलों का प्रति एकड़ उत्पादन, (८) खानों के उत्पादन निर्देशांक (९) लंदन के परिशोधन गृह (Clearing House) के भुगतान, (१०) बैंक साख में होनी वाली वृद्धि (Increase of Bank Credit), (११) अदत्त उधार (Credits Outstanding), (१२) कुल नकद मज़दूरी में वार्षिक वृद्धि, (१३) वास्तविक मज़दूरी की दर (१४) सामान्य सामूहिक उपभोग, तथा (१५) बैंक ऑफ इंग्लैंड की संरक्षित निधि व उसके दायित्व का अनुपात (Proportion of reserve to liabilities of the Bank of England)।

उपर्युक्त सभी वस्तुओं व साधनों के आधार तथा वर्तमान कालीन समंकों का संकलन कर के उनके मूल्यानुपात निकाल लिये जाते हैं जिन्हें भारांकित कर के व्यापारिक स्थिति के निर्देशांक की गणना कर ली जाती है।

निर्देशांकों की सीमायें (Limitations of Index Numbers)

यद्यपि निर्देशांकों की सहायता से हम मूल्य, उत्पादन, बेकारी, मज़दूरी व जीवन-स्तर, आदि अनेक आर्थिक व व्यवसायिक समंकों में होने वाले परिवर्तनों पर प्रकाश डाल सकते हैं, फिर भी उनकी अनेक सीमायें हैं।

निर्देशांक केवल परिवर्तनों का अनुमान बतला सकते हैं, उनकी वास्तविक मात्रा अथवा परिणाम की स्पष्ट सूचना नहीं दे सकते। निर्देशांक-रचना की अनेक समस्यायें होती हैं। यदि इन समस्याओं में से किसी समस्या के प्रति लापरवाही हो जाती है, तो निर्देशांक भ्रामक सूचनायें प्रस्तुत कर सकते हैं। इसके अतिरिक्त इस बात का भी ध्यान रखना आवश्यक होता है कि एक ही निर्देशांक अनेक उपायोगों के लिये प्रयुक्त नहीं किये जा सकते।

प्रश्न

1. 'Index Numbers are devices for measuring differences in the magnitude of a group of related variables'. Elucidate. Also discuss the important uses of Index Numbers.

'निर्देशांक सम्वन्धित चल-मूल्यों के परिणाम में होने वाले अन्तरों की माप करने के साधन हैं'। व्याख्या कीजिये। निर्देशांकों के महत्वपूर्ण उपयोगों का वर्णन भी कीजिये।

(एम० कॉम०, राजपूताना, १९५६)

2. 'Index Numbers are economic barometers'. Explain this statement and mention what precautions should be taken in making use of published index numbers.

'निर्देशांक आर्थिक वायु-मापक मंत्र के समान हैं'। इस कथन की व्याख्या करते हुये वतलाइये कि प्रकाशित निर्देशांकों का उपयोग करते समय किन सावधानियों का ध्यान रखना चाहिये।

(बी० कॉम०, इलाहाबाद १९५२ तथा बनारस, १९५३)

3. Explain the meaning of 'Economic Barometers'. How are such barometers constructed and how far have they been used successfully in forecasting economic events?

'आर्थिक वायु-मापकों' का अर्थ समझाइयें। इन वायु-मापकों की रचना किस प्रकार की जाती है तथा आर्थिक घटनाओं का पूर्वानुमान करने में ये कहां तक सफल होते हैं ?

(एम० ए०, राजपूताना, १९५६)

4. Define an 'Index Number'. Distinguish between the Fixed Base and Chain Base Methods of constructing index numbers and discuss their relative merits.

'निर्देशांक' की परिभाषा दीजिये। निर्देशांक बनाने की स्थिर व श्रृंखला आधार रीतियों की तुलना करते हुये उनके गुण-दोष का वर्णन कीजिये।

(बी०, कॉम०, बनारस, १९५७)

5. Explain the uses of Index Numbers. Describe the procedure followed in the preparation of general and cost of living index numbers.

निर्देशांकों की उपयोगिता का वर्णन कीजिये। सामान्य व जीवन-निर्वाह निर्देशांकों की रचना करने के लिये जिस प्रक्रिया का आपको अनुसरण करना पड़ेगा उसकी व्याख्या कीजिये।

(बी०, कॉम०, आगरा, १९४२)

6. Define an index number. Explain the role of weights in the construction of an index of a general price level.

निर्देशांक की परिभाषा दीजिये। सामान्य मूल्य-स्तर निर्देशांक की रचना में भारों के महत्व की व्याख्या कीजिये।

(एम० ए०, राजपूताना, १९५०)

7. What points would you take into consideration in choosing the base and determining the weights in the preparation of cost of living index numbers.

जीवन-निर्वाह निर्देशांकों की रचना करते समय आप आधार का चुनाव तथा भारों का निर्धारण करने के लिये किन-किन बातों का ध्यान रखेंगे ?

(बी० कॉम०, बनारस, १९५४ तथा आगरा, १९४८)

8. Discuss the Ideal Formula for preparing index numbers given by Fisher.

निर्देशांकों की रचना करने के लिये फिशर ने जो आदर्श सूत्र बतलाया है उसका विवेचन कीजिये।

(एम०, कॉम, आगरा, १९५६)

9. (*a*) What are Base and Factor Reversal tests in the index number theory? Do you consider these properties as essential requisites of an index number?

निर्देशांक के सिद्धान्त में आधार-उत्क्रमण व तत्व-उत्क्रमण परीक्षाओं का क्या तात्पर्य है? क्या आप के विचारानुसार ये गुण किसी निर्देशांक में अनिवार्य रूप से पाये जाने चाहिये?

(*b*) Compute the index number of unemployment for 1950, using 1947 figures as the base :—

Year		Total population	No. unemployed
1947	...	34×10^7	5×10^7
1950	...	42×10^7	9×10^7

(एम० कॉम, बनारस, १९५३)

(*Unemployment Index for 1950=180*)

10. Use the following data of industrial production in India to compare the annual fluctuations in Indian industrial activity by the *chain base method* :—

Year	Index No.	Year	Index No.
1919—20	120	1926—27	149
—21	122	—28	156
—22	116	—29	137
—23	120	—30	162
—24	120	—31	149
—25	137	—32	160
—26	136	—33	160

(एम० कॉम०, लखनऊ, १९५३)

(*Chain Indices—100, 101.7, 95.1, 103.4, 100, 114.2, 99.3, 109.6, 104.7, 87.8, 118.2, 91.9, 107.4 and 100*)

11. From the fixed base index numbers given below, prepare chain base index numbers :—

1935	1936	1937	1938	1939	1940
94	98	102	95	98	100

(बी० कॉम०, आगरा, १९४३)

(*Chain Indices=94, 97.8, 101.7, 94.6, 97.4, 99.3*)

12. From the following data, calculate a price index for the year 1938 by using simple geometric mean :—

Commodity	Average price, 1930 (base year)	Average price, 1938
A	16.1	14.2
B	9.2	8.7
C	15.1	12.5
D	5.6	4.8
E	11.7	13.4
F	100.0	117.0

Now reverse the process, taking 1938 as base year and 1930 as current year, and show that the two results are strictly consistent.

(बी० कॉम, बनारस, १९५१)

(*I. for 1938=104.0 and I. for 1930=96.2*)

13. The following table shows the index numbers of wholesale prices of certain commodities in 1927 and 1937 (July, 1941, being taken as 100). Discuss critically how you would compare the average ratio of prices in 1937 to those in 1927, commenting on the relative advantages and disadvantages of alternative methods which may be used for this purpose :—

Commodity	Index Number of Prices 1927	1937
Jute raw	93	56
Jute manufacturers ...	146	67
Cotton raw	167	89
Cotton manufactures ...	159	117
Wool and silk	126	126

(*1927 : by a—138.2, by M—146.0 and by G—135.2*
1937 : by a—91.0, by M—89.0 and by G—86.7)

14. Prepare index numbers of prices for three years with the average price as base :—

	Rate per rupee		
	Wheat	Cotton	Oil
1st year ...	10 seers	4 seers	3 seers
2nd year ...	9 ,,	$3\frac{1}{2}$,,	3 ,,
3rd year ...	9 ,,	3 ,,	$2\frac{1}{2}$,,

(बी० कॉम०, आगरा, १९४१)

(I. for 1st yr.=90.97, 2nd yr.=98.1 and 3rd yr.=109.9)

15. Prepare index number of prices for three years with the average prices as base :—

	Rate per rupee (in seers)		
Year ...	Wheat	Cotton	Oil
1st year ...	4	2	2
2nd year ...	3	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$
3rd year ...	$2\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{4}$

(बी०, कॉम०, सागर, १९५८)

(I. for 1st yr.=67.5, 2nd yr.=95.0 and 3rd yr.=137.5)

16. The following are the group index numbers and the group weights of an average working class family's budget. Construct the Cost of Living Index Number by assigning the given weights :—

Group		Index No. for 1942	Weights
Food	...	352	48
Fuel & Lighting	...	220	10
Clothing	...	230	8
House Rent	...	160	12
Miscellaneous	...	190	15

(बी०, कॉम०, बनारस, १९४६ तथा आई० ए० एस०, १९५०)

(Index Number=276.4)

17. From the following group average prices, prepare Index Numbers with a view to determine the amount of wages :—

Group	1913	1914	1915	1916
	Rs. as.	Rs. as.	Rs. as.	Rs. as.
(1) Food per md. ...	4 0	4 8	5 0	6 0
(2) Rent per room ...	2 0	2 0	3 0	4 0
(3) Cloth per yd. ...	0 6	0 8	0 12	0 14
(4) Misc. per unit ...	2 0	2 8	3 4	3 8

Take the prices of 1913 as the base and give four groups weightage in the proportion of 8, 5, 3 and 2.

(बी० कॉम०, आगरा, १९४७)

(*I. for 1914 : 113.9, 1915 : 148.6 and 1916 : 180.6*)

18. An enquiry into the budgets of the middle class families in a city in England gave the following information :—

Expenses on	Food	Rent	Clothing	Fuel	Misc.
	35%	15%	20%	10%	20%
Prices (1928)	£150	£30	£75	£25	£40
Prices (1929)	£145	£30	£65	£23	£45

What changes in cost of living figures of 1929 as compared with that of 1928 are seen ?

(बी०, कॉम०, लखनऊ, १९४४)

(*Index Number for 1929=97.87*)

19. From the information given below, prepare cost of living index numbers for 1948 and 1949, taking the average prices of 1947 as base :—

Groups of Articles	1947	1948	1949
	Rs.	Rs.	Rs.
1. Food per md.	20/-	24/-	21/-
2. Clothing per yd.	1/4/-	1/8/-	1/-
3. Rent per room	5/-	8/-	8/-
4. Miscellaneous	2/-	2/4/-	2/2/-

Give weights to the four groups as 4, 3, 2, 1 respectively.

(बी० कॉम०, आगरा, १९५१)

(*I. for 1948=124 and I. for 1949=109.8 by Agg. Method*)

20. From the following data, prepare a weighted index number for the food group for 1949 with 1939 as the base period :—

Items in food group		Weights	Price per sr. in 1939 Rs. as. p.	Price per sr. in 1949 Rs. as. p.
1. Wheat	...	40	0 1 3	0 7 6
2. Rice	...	20	0 2 0	0 10 0
3. Gram	...	15	0 1 0	0 5 6
4. Arhar Dal	...	5	0 2 3	0 9 0
5. Milk	...	6	0 2 6	0 10 0
6. Mustard Oil	...	10	0 5 0	2 8 0
7. Sugar	...	3	0 4 0	0 14 0
8. Salt	...	1	0 1 0	0 3 0

(एम०, कॉम०, लखनऊ, १९५०)

(*I. for 1949=560 by Relative Method*)

21. An average family of industrial workers in a town consumed during August 1939, 1.5 maunds of food-grains, 10 yards of cloth, 2 maunds of fuel and 1 tin of kerosene oil and paid Rs. 15/- as house rent. Food-grains then sold at an average price of Rs. 6 per maund, cloth at -/8/- per yard, and fuel at Rs. 2/4/- per maund, while a tin of kerosene oil at Rs. 5/-. By August 1943, the average prices of food-grains and cloth had risen to three times and 2½ times the pre-war average, respectively, fuel rose to Rs. 5/- per maund and house rent to Rs. 20/-. The solitary exception was kerosene oil whose price fell by -/8/- per tin.

Express in quantitative terms the rise that took place in the cost of living of industrial workers in August 1943 as compared with August 1939, making clear your method of approach.

(एम० कॉम०, आगरा, १९४७)

(*Cost of Living Index No. for August 1943=224.7*)

22. Construct the Cost of Living Index Number for 1956 on the basis of 1947 from the following data using (i) Aggregate Expenditure Method and (ii) Family Budget Method :—

Articles		Qty. consumed in 1947	Unit	Prices in 1947 Rs.	as.	p.	Prices in 1956 Rs.	as.	p.
Wheat	...	6 maunds	md.	10	0	0	16	0	0
Rice	...	4 maunds	md.	15	0	0	20	0	0
Gram	...	2 maunds	md.	6	0	0	12	0	0
Arhar	...	3 maunds	md.	8	0	0	12	0	0
Ghee	...	6 seers	sr.	3	0	0	5	0	0
Gur	...	2 maunds	md.	5	0	0	10	0	0
Salt	...	16 seers	md.	6	0	0	9	0	0
Oil	...	5 seers	sr.	1	4	0	2	8	0
Clothing	...	50 yds.	yd.	0	8	0	0	10	0
Firewood	...	8 maunds	md.	0	12	0	1	4	0
Kerosene	...	1 tin	tin	3	8	0	7	0	0
House Rent	...	—	H.	10	0	0	15	0	0

(*I. for 1956 by Aggregate Expenditure Method and by Family Budget Method=154.06*)

23. Explain Fisher's Ideal Formula for preparing Index Number. What are Time Reversal and Factor Reversal Tests ? Prepare Index Number for 1904 on the basis of 1902, where the following information is given :—

	Article I		Article II		Article III	
Year	Price	Quantity	Price	Quantity	Price	Quantity
1902	5	10	8	6	6	3
1904	4	12	7	7	5	4

(एम० कॉम०, आगरा, १९४७)

(*Fisher's Ideal Index for 1904=83.6*)

24. Construct with the help of data given below, Fisher's Ideal Index and show how it satisfies the factor reversal test :—

	Produce in thousand tons in district Saran		Harvest Price per maund in district Saran	
	1931-32	1932-33	1931-32	1932-33
			Rs. as.	Rs. as.
Winter Rice	17	26	3 8	3 2
Barley	107	83	2 0	1 14
Maize	62	48	2 9	1 12

(एम० ए०, पटना, १९४२)

(*Fisher's Ideal Index for 1932-33=84*)

25. Given the following data, what index numbers would you use for purposes of comparison ? Give reasons.

	Rice		Wheat		Jowar	
Year	Price	Quantity	Price	Quantity	Price	Quantity
1927	9.3	100	6.4	11	5.1	5
1934	4.5	90	3.7	10	2.7	3

(एम० ए०, कलकत्ता, १९३७)

(*Fisher's Ideal Index for 1934=49.1*)

26. What is Fisher's Ideal Formula for preparing Index Numbers ? What are 'Time Reversal and 'Factor Reversal' tests ? Compute an appropriate index number for purposes of comparison from the following data :—

Year	Rice		Wheat		Jowar	
	Price	Quantity	Price	Quantity	Price	Quantity
1935	4	50	3	10	2	5
1945	10	40	8	8	4	4

(Prices and quantities are stated in arbitrary units)

(आई० ए० एस०, १९५६)

(*Fisher's Ideal Index for 1945=250*)

अध्याय १८

आन्तर-गणन तथा बाह्य-गणन
(Interpolation and Extrapolation)

(आन्तर-गणन तथा बाह्य-गणन का अर्थ—आन्तर-गणन तथा बाह्य-गणन का महत्व—आन्तर-गणन तथा बाह्य-गणन की परिकल्पनायें—आन्तर-गणन तथा बाह्य-गणन की परिशुद्धता—आन्तर-गणन तथा बाह्य-गणन की रीतियाँ—बिन्दु-रेखीय रीति—बीजगणितीय रीतियाँ—वक्र अन्वायोजन रीति—न्यूटन की परिमित अथवा प्रगामी अन्तर रीति—द्विपद विस्तार रीति—लैग्रेंज की रीति—प्रश्न)

आन्तर-गणन तथा बाह्य-गणन का अर्थ
(Meaning of Interpolation and Extrapolation)

आन्तर-गणन वह सांख्यिकीय क्रिया है जिसके द्वारा किसी समंक माला के ज्ञात समंकों के आधार पर किसी भूतकालीन अथवा वर्तमान कालीन अज्ञात समंक का अनुमान लगाया जाता है। इसके विपरीत बाह्य-गणन उस सांख्यिकीय क्रिया को कहते हैं जिसके द्वारा ज्ञात समंकों के आधार पर भविष्यकालीन समंक का पूर्वानुमान किया जाता है। इन दोनों क्रियाओं का भेद निम्नलिखित तालिका से स्पष्ट हो जायगा :—

Age in years	10	15	20	25	30	35
Expectation of life	35.4	32.2	29.1	26.0	23.1	20.4

उपरोक्त तालिका में यह दिखालाया गया है कि विभिन्न आयुओं पर मनुष्यों की जीवन-आशा कितने वर्ष है। यदि हम यह जानना चाहें कि किसी ऐसे व्यक्ति के जीवन की आशा कितने वर्ष होगी जो इस समय 12, 18, 22 अथवा 34 वर्ष का है, तो हमें जो सांख्यिकीय क्रिया प्रयोग में लानी पड़ेगी वह 'आन्तर-गणन' है। किन्तु यदि हमें किसी ऐसे व्यक्ति के जीवन की आशा ज्ञात करना हो जो इस समय 35 वर्ष से अधिक है, तो हमें 'बाह्य-गणन' करना पड़ेगा।

आन्तर-गणन तथा बाह्य-गणन का महत्व
(Importance of Interpolation and Extrapolation)

समंकों के आधार पर किसी समस्या का विश्लेषण तथा उसका निर्वचन तभी सफलतापूर्वक किया जा सकता है जब वे सब प्रकार से पूर्ण हों तथा समंक माला का कोई भाग रिक्त न हो। अनुसंधान करते समय अनेक ऐसी परिस्थितियाँ उत्पन्न होती हैं जब उपयुक्त समंकों के अभाव में कार्य में शिथिलता आ जाती है। कभी-कभी कुछ भूतकालीन समंक एकत्र ही नहीं हुये रहते या वे इतने अपर्याप्त होते हैं कि उन्हें काम में ही नहीं लाया जा सकता। फिर अनेक समंक किसी कारणवश नष्ट हो गये रहते हैं। यद्यपि उनकी पूर्ति नवीन अनुसंधानों द्वारा पुनः की जा सकती है किन्तु इसके लिये अत्यधिक धन, श्रम तथा समय लगाना पड़ता है। आन्तर-गणन की क्रिया ऐसी दशा में बड़ी सहायक होती है क्योंकि इस क्रिया द्वारा बड़ी सुगमता से उन समंकों के संभावित मूल्यों को ज्ञात किया जा सकता है। फिर एक दूसरी कठिनाई और है। कभी-कभी अनुसंधानकर्ता को समंक-संकलन की निश्चित तिथियों के बीच की किसी तिथि पर समंकों की आवश्यकता पड़ सकती है, जैसे यह जानने की आवश्यकता हो कि १९४७ में भारतवर्ष की जनसंख्या क्या थी। कठिनाई इसलिये होगी कि हमारे देश में जन-गणना प्रत्येक दशक (Decade) के बाद होती है। इसी प्रकार बाह्य-गणन द्वारा भविष्य में प्राप्त होने वाले समंकों की संभावित प्रवृत्ति की भी जानकारी प्राप्त की जा सकती है, जैसे बाह्य-गणन द्वारा आज हम ज्ञात कर सकते हैं कि १९५९–१९६० में भारतवर्ष की जनसंख्या संभवतः क्या होगी।

आन्तर-गणन तथा बाह्य-गणन की क्रियायें सभी श्रेणियों के अनुसंधान कर्त्ताओं के लिये उपयोगी हैं। व्यापारी एवं उद्योगपति भूतकालीन उत्पादन तथा माँग के आधार पर भविष्य में होने वाले उत्पादन और माँग की जानकारी प्राप्त कर सकते हैं। अर्थशास्त्री इन क्रियाओं के आधार पर यह बतला सकता है कि अमुक वर्ष में मूल्य-स्तर क्या था और क्या होगा। राजनीतिज्ञ बाह्यगणन द्वारा यह ज्ञात कर सकता है कि अगले वर्ष में राज्य की आय क्या होगी, और इस आधार पर वह अपनी कर-नीति का निर्धारण कर सकता है। पिछले अध्यायों में यह बतलाया जा चुका है कि आन्तर-गणन द्वारा भूयिष्ठक (Mode), मध्यका (Median), चतुर्थांश (Quartiles),

दशांश (Deciles) तथा शतांश (Percentiles), आदि का अनुमान कितनी सरलता से किया जा सकता है ।

आन्तर-गणन तथा बाह्य-गणन की परिकल्पनायें
(Assumptions underlying Interpolation and Extrapolation)

आन्तर-गणना तथा बाह्य-गणन की क्रियाओं द्वारा समंकों का अनुमान करते समय निम्नलिखित दो परिकल्पनायें करनी पड़ती हैं :—

(१) ज्ञात समंकों की घटने-बढ़ने की प्रवृत्ति में समानता है (There in uniformity in the changes of known figures) । उदाहरण के लिये यदि हम १९२५ की जनसंख्या का अनुमान लगा रहे हों, तो यह कल्पना करनी पड़ेगी कि १९२५ के पूर्व और उसके पश्चात् की जनसंख्या समान दर से बढ़ती रही है ।

(२) ज्ञात समंकों की तिथियों के बीच किसी भी समय कोई प्रतिकूल परिस्थिति नहीं है (There is no violent or disturbing situation in the intervening period) । यदि किसी वर्ष में जन-संख्या अकाल, बाढ़, युद्ध, आदि के कारण घट गई है, तो उस जनसंख्या के आधार पर किया गया आन्तर-गणन भ्रामक परिणाम देगा । ऐसी दशा में विशेष सावधानी रखने की आवश्यकता पड़ती है ।

आन्तर-गणन तथा बाह्य-गणन की परिशुद्धता
(Accuracy of Interpolation and Extrapolation)

यद्यपि इन क्रियाओं द्वारा भूतकालीन तथा वर्तमान कालीन समंकों का अनुमान लगाया जा सकता है, फिर भी यह ध्यान रखना चाहिये कि उपलब्ध समंक पूर्णतया शुद्ध नहीं होते : वे तो केवल वास्तविक समंकों के संभावित अनुमान मात्र होते हैं । प्राप्त समंकों की परिशुद्धता मुख्यत: दो बातों पर निर्भर रहती है—(अ) प्राप्त समंकों के उच्चावचन (fluctuations) का ज्ञान, तथा (ब) प्राप्त होने वाले समंक से सम्बन्धित महत्वपूर्ण घटनाओं का ज्ञान । इसके अतिरिक्त इस बात का भी ध्यान रखना आवश्यक है कि किस परिस्थिति में आन्तर-गणन अथवा बाह्य-गणन की किस रीति का प्रयोग करना श्रेयस्कर होगा ।

आन्तर-गणन तथा बाह्य-गणन की रीतियाँ
(Methods of Interpolation and Extrapolation)

आन्तर-गणन तथा बाह्य-गणन की मुख्यत: दो रीतियाँ हैं :—

(१) बिन्दुरेखीय रीति (Graphic Method);

(२) बीज-गणितीय रीति (Algebraic Method)

बिन्दुरेखीय रीति (Graphic Method)

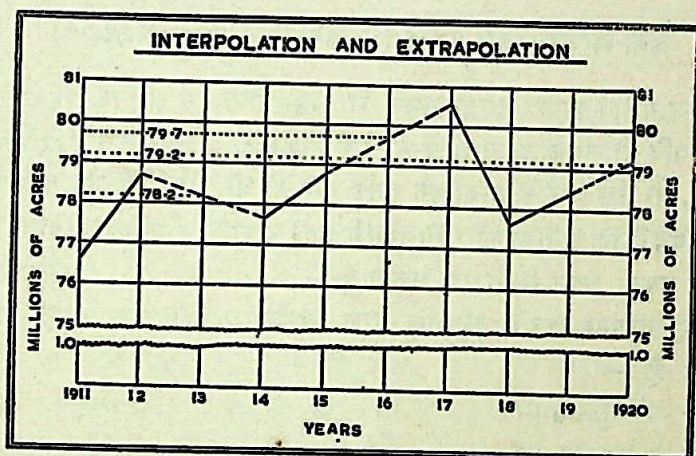
बिन्दुरेख अथवा रेखा-चित्र द्वारा आन्तर-गणन अथवा बाह्य-गणन करना बहुत सरल है। उपलब्ध समंकों को पहले एक बिन्दुरेखीय पत्र (Graph Paper) पर प्रांकित कर लिया जाता है और फिर भुजाक्ष (Abscissa) पर लम्ब (Perpendicular) डाल कर अज्ञात समंकों का अनुमान लगा लिया जाता है।

Illustration 1:—

The following table shows the cultivation of rice on millions of acres :—

Year	1911	1912	1913	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920
Acres	76.6	78.7	?	77.7	78.7	?	80.6	77.6	78.4	?

इस उदाहरण में यह अज्ञात है कि 1913, 1916 तथा 1920 में कितने एकड़ भूमि पर चावल की खेती की गई। बिन्दुरेखीय रीति से इसका अनुमान लगाने के लिये सर्वप्रथम हमें इन समंकों को एक बिन्दुरेखीय पत्र पर प्रांकित करना पड़ेगा। यद्यपि अज्ञात समंकों के कारण विभिन्न बिन्दुओं को क्रमशः मिला कर एक सतत (Continuous) वक्र नहीं बनाया जा सकता, फिर भी ऐसी दशा में ज्ञात बिन्दुओं को ही मिला कर रेखाचित्र का निर्माण कर लेना चाहिये। अब 1913 तथा 1916 पर लम्ब डाल कर देखिये कि वे वक्र को कहाँ स्पर्श करते हैं। जिन स्थानों पर वे स्पर्श करें वहाँ से पुनः कोटि अक्ष (Ordinate) पर लम्ब डालिये। कोटि-अक्ष पर के स्पर्श-स्थल 1913 तथा 1916 के अज्ञात समंकों का अनुमानित मूल्य सूचित करेंगे। इसी

प्रकार 1920 का अज्ञात समंक भी निकाला जायगा किन्तु इसके लिये वक्र के दाहिने सिरे को उसी उच्चावचन के साथ आगे वढ़ाना पड़ेगा।

चित्र का निरीक्षण करने से स्पष्ट हो जायगा कि 1913 में 78.2 एकड़, 1916 में 79.7 एकड़ तथा 1920 में 79.2 एकड़ भूमि पर चावल की खेती हुई होगी।

बिन्दुरेखीय रीति से आन्तर-गणन अथवा बाह्य-गणन करने से जो मूल्य हमें प्राप्त होते हैं वे वास्तविक मूल्यों से थोड़े ही कम या अधिक होते हैं। अतः विभ्रम (Error) का परिमाण भी बहुत कम होता है। यदि वक्र बनाते समय उपलब्ध समंकों के उतार-चढ़ाव का पूरा-पूरा ध्यान रखा जाय अथवा वक्र को गणितीय रीतियों से बनाया जाय, तो विभ्रम का परिमाण और भी कम किया जा सकता है। गणितीय रीतियोंसे वक्र बनाना कठिन है, अतः साधारणतः इनका प्रयोग कम किया जाता है।

बीजगणितीय रीतियाँ (Algebraic Methods)

बीज गणित की सहायता से भी आन्तर-गणन और बाह्य-गणन किया जा सकता है। इस अध्याय में निम्नलिखित रीतियों का वर्णन किया जायगा :—

(१) वक्र-अन्वायोजन रीति (Parabolic Curve Method);

(२) न्यूटन की परिमित अथवा प्रगामी अंतर रीति (Newton's Method of Finite or Advancing Differences);

(३) द्विपद-विस्तार रीति (Binomial Expansion Method);
(४) लैग्रेंज की रीति (Lagrange's Method)

वक्र-अन्वायोजन रीति (Parabolic Curve Method)

बीज गणित द्वारा आन्तर-गणन की यह रीति इस आधार पर बनी हुई है कि यदि दो समंक मालाओं में से एक माला का कोई चल (Variable) ज्ञात है, तो उस चल से सम्वन्धित दूसरे चल को भी ज्ञात किया जा सकता है। कारण यह है कि समीकरणों (Equations) द्वारा बीज गणित में दोनों चलों को इस प्रकार प्रकट किया जा सकता है—

यह कल्पना करते हुये कि एक समंक य (x) तथा दूसरा समंक र (y) है :—

$$y=a+bx$$
$$y=a+bx+cx^2$$
$$y=a+bx+cx^2+dx^3$$
$$y=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$$
$$y=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\ldots\ldots nx^n$$

इन समीकरणों में $a, b, c, d, e\cdots$ इत्यादि अचल पद (Constants) हैं जिन्हें ज्ञात करने की आवश्यकता होती है। इन समीकरणों के सभी विन्दुओं में से एकेन्द्र वक्र (Parabola) खींचा जा सकता हैं, इसलिये इनको हल करके किसी भी समंक य (x) से सम्बन्धित दूसरे समंक र (y) का अनुमान लगाना सरल है। किन्तु किस प्रश्न में किस घात (Degree) वाला एकेन्द्र वक्र लगाना है, इसका ज्ञान होना आवश्यक है। यदि प्रश्न में ज्ञात पद दो हैं तो एक घात वाला, यदि तीन हैं तो दो घात वाला, और यदि चार हैं तो तीन घात वाला वक्र लगाना पड़ेगा, क्योंकि हर दशा में समीकरण ज्ञात पद-संख्या से एक पद अधिक तक स्वयं बढ़ जाता है, और हमें साधारणतः किसी एक पद का ही अनुमान करना रहता है। अतः इस आधार पर यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि जब 'न' (n) पद दिये हुये हों, तो एकेन्द्र वक्र का घात ($n-1$) होगा। उपरोक्त समीकरण पहले, दूसरे, तीसरे, चौथे और 'न' वें (n th) घात वाले हैं। वक्र-अन्वायोजन रीति से आन्तर-गणन करने का ढंग निम्नलिखित उदाहरण में समझाया जा रहा है।

Illustration 2 :—

The following table gives the production of wheat in thousands of tons. Estimate the production in the year 1935 :—

Year (x)	1920	1930	1940	1950
Production (y)	12.0	14.4	17.9	23.2

Solution :—

आन्तर-गणन की परिकल्पनाओं (Assumptions) का ध्यान रखते हुये कि 1935 में उत्पादन पर प्रभाव डालने वाले कोई कारण नहीं थे तथा गेहूँ का उत्पादन साधारण ढंग से बढ़ता जा रहा है, हम इस बात पर विचार करेंगे कि प्रस्तुत प्रश्न को हल करने के लिये कितने घात वाले एकेन्द्र वक्र का समीकरण लेना चाहिये। चूंकि यहाँ ज्ञात-पद चार हैं, इसलिये तीन घात वाले एकेन्द्र वक्र का समीकरण लेना आवश्यक होगा। अतः,

$$y=a+bx+cx^2+dx^3$$

इस समीकरण में a, b, c और d ये चार अज्ञात पद (Constants) हैं जिनको ज्ञात करने के लिये हम दिये हुये चारो ज्ञात मूल्यों का प्रयोग करेंगे।

समीकरण का निर्धारण करने के उपरान्त अब हमें जिस वर्ष के उत्पादन का अनुमान लगाना है, उस वर्ष से अन्य दिये हुये वर्षों के विचलन (Deviation) निकालने हैं। ये विचलन निम्नलिखित तालिका में दिये गये हैं :—

(x)	1920 (—15)	1930 (—5)	1935 (0)	1940 (+5)	1950 (+15)
(x)	—3	—1	0	+1	+3
(y)	12.0	14.4	y_0	17.9	23.2

अब हमें x के विभिन्न मूल्यों को अपने वक्र वाले समीकरण ($y=a+bx+cx^2+dx^3$) में प्रयुक्त करते हुये पाँच समीकरण बनाने हैं जो इस प्रकार होंगे :—

$$12.0 = a - 3b + 9c - 27d \quad \ldots \quad \text{(i)}$$
$$14.4 = a - b + c - d \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$
$$y_0 = a \quad \ldots \quad \text{(iii)*}$$
$$17.9 = a + b + c + d \quad \ldots \quad \text{(iv)}$$
$$23.2 = a + 3b + 9c + 27d \quad \ldots \quad \text{(v)}$$

उपरोक्त समीकरणों का अध्ययन करने से ज्ञात होता है कि 1935 में उत्पादन y_0 होगा जो a के बराबर है। यदि सभी समीकरणों को हल करके a का मूल्य ज्ञात कर लिया जाय, तो यही 1935 का अनुमानित उत्पादन होगा।

अब इन युगपत समीकरणों (Simultaneons Equations) को हल करने के लिये निम्नलिखित क्रिया करनी पड़ेगी :—

सरलता का ध्यान रखते हुये समीकरण (ii) और (iv) को पहले जोड़िये क्योंकि ये एक से ज्ञात होते हैं—

$$14.4 = a - b + c - d \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$
$$17.9 = a + b + c + d \quad \ldots \quad \text{(iv)}$$
$$32.3 = 2a + 2c \quad \ldots \quad \text{(vi)}$$

फिर समीकरण (i) और (v) को जोड़िये—

$$12.0 = a - 3b + 9c - 27d \quad \ldots \quad \text{(i)}$$
$$23.2 = a + 3b + 9c + 27d \quad \ldots \quad \text{(v)}$$
$$35.2 = 2a + 18c \quad \ldots \quad \text{(vii)}$$

इस प्रकार अब हमें दो नये समीकरण (vi) और (vii) प्राप्त होते हैं। चूँकि हमें a का मूल्य ज्ञात करना है, इसलिये हम इन दोनों समीकरणों में से c काटने का प्रयास करेंगे। किन्तु समीकरण (vi) में $2c$ है, जब कि (vii) में $18c$। अतः दोनों को समान करने के लिये समीकरण (vi) में 9 का गुणा करना यथेष्ट होगा। 9 से गुणा करने पर समीकरण (vi) का नया रूप यह होगा—

$$290.7 = 18a + 18c \quad \ldots \quad \text{(viii)}$$

*इस समीकरण में (x) बराबर o के है इसलिये समीकरण के दूसरे, तीसरे और चौथे पद भी गुणा करते ही शून्य हो जायंगे। केवल (a) बच जायगा।

अब समीकरण (viii) में से समीकरण (vii) को घटा कर a का मूल्य ज्ञात किया जा सकता है—

$$290.7 = 18a + 18c \quad \ldots \quad \text{(viii)}$$
$$35.2 = -2a - 18c \quad \ldots \quad \text{(vii)}$$
$$255.0 = 16a \quad \ldots \quad \text{(ix)}$$

अत: $a = 255 \div 16$

$= 15.94$, अथवा $y_0 = 15.94$ (thousands of tons)

इस प्रकार वक्र-अन्वायोजन रीति से यह ज्ञात होता है कि 1935 में गेहूँ का उत्पादन लगभग 15. 94 हजार टन रहा होगा।

जब किसी समंक माला के मध्य में आन्तर-गणन करना रहता है, तो उपरोक्त रीति सरल होती है, किन्तु यदि उसके किसी अन्य भाग में करना हो, तो यह रीति अत्यन्त कठिन पड़ जाती है—क्योंकि a का मूल्य ज्ञात करने के लिये अनेक समीकरणों को हल करना पड़ेगा।

न्यूटन की परिमित अथवा प्रगामी अन्तर रीति
(Newton's Method of Finite or Advancing Differences)

न्यूटन की परिमित अथवा प्रगामी अन्तर रीति द्वारा आन्तर-गणन तथा बाह्य-गणन दोनों किया जा सकता है। यह रीति वस्तुतः द्विपद प्रमेय (Binomial Theorem) पर ही आधारित है। इस रीति को परिमित अथवा प्रगामी अन्तर रीति इसलिये कहते हैं कि इसमें र (y) के मूल्यों का पारस्परिक अन्तर निकालने के बाद उन अन्तरों के भी पारस्परिक अन्तर तब तक निकाले जा सकते हैं जब तक केवल एक अन्तर न रह जाय। ये अन्तर हमेशा बीज-गणितीय ढंग से अगले मूल्य में से पिछले मूल्य को घटा कर निकाले जाते हैं तथा उन्हें लिखते समय धन (+) और ऋण (—) चिन्हों का प्रयोग आवश्यक होता है। समस्त अन्तरों को निकालने के पश्चात निम्नलिखित सूत्र द्वारा आन्तर-गणन अथवा बाह्य-गणन किया जाता है :—

$$y_x = y_0 + x\Delta^1{}_0 + \frac{x(x-1)}{1\times2}\Delta^2{}_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\times2\times3}\Delta^3{}_0 +$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\times2\times3\times4}\Delta^4{}_0 + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1\times2\times3\times4\times5}\Delta^5{}_0$$

इस सूत्र का प्रयोग करने के पूर्व इसमें प्रयुक्त संकेताक्षरों (Symbols) का अर्थ समझ लेना उचित होगा :—

y_x उस मूल्य का प्रतीक है जिसका अनुमान लगाना है;

x एक चल-मूल्य है जिसे इस सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है :—

$$x = \frac{\text{Item } (x) \text{ to be interpolated} - \text{Item } (x) \text{ at origin}}{\text{Difference between adjoining } x\text{'s}}$$

अर्थात् जिस x के लिये आन्तर-गणन करना है उसमें से x के प्रथम मूल्य को घटा कर उसमें एक x से दूसरे x तक के अन्तर से भाग देने पर प्राप्त होने वाला मूल्य; तथा Δ^1_0, Δ^2_0, Δ^3_0, Δ^4_0, Δ^5_0 इत्यादि पारस्परिक अन्तरों को निकालते समय विभिन्न कालमों में प्राप्त होने वाले प्रथम अन्तर जो इस प्रकार निकाले जाते हैं :—

TABLE SHOWING FINITE OR ADVANCING DIFFERENCES

X	Y	Finite or Advancing Differences							
		First Differences Δ^1		Second Differences Δ^2		Third Differences Δ^3		Fourth Differences Δ^4	
x_0	y_0								
x_1	y_1	$y_1 - y_0$	Δ^1_0						
x_2	y_2	$y_2 - y_1$	Δ^1_1	$\Delta^1_1 - \Delta^1_0$	Δ^2_0				
x_3	y_3	$y_3 - y_2$	Δ^1_2	$\Delta^1_2 - \Delta^1_1$	Δ^2_1	$\Delta^2_1 - \Delta^2_0$	Δ^3_0		
x_4	y_4	$y_4 - y_3$	Δ^1_3	$\Delta^1_3 - \Delta^1_2$	Δ^2_2	$\Delta^2_2 - \Delta^2_1$	Δ^3_1	$\Delta^3_1 - \Delta^3_0$	Δ^4_0

विद्यार्थियों को पारस्परिक अन्तर निकालते समय अत्यधिक सावधान रहना चाहिये क्योंकि एक अन्तर अशुद्ध होने पर अगले सब अन्तर अशुद्ध हो जायँगे। यद्यपि सूत्रानुसार हमें प्रत्येक कालम के केवल प्रथम अन्तर की ही आवश्यकता पड़ती है, किन्तु उनकी शुद्धता अन्य अन्तरों की शुद्धता पर ही निर्भर है।

Illustration 4 :—

The following table gives the population of a State in India. Find out the population for 1936 :—

Year		Population in lakhs
1911	...	120
1921	...	128
1931	...	139
1941	...	153
1951	...	168

(बी० कॉम० बनारस, १९५७)

Solution:—

TABLE SHOWING FINITE OR ADVANCING DIFFERENCES

Year (x)		Population in lakhs (y)		Finite or Advancing Differences							
				Δ^1		Δ^2		Δ^3		Δ^4	
1911	x_0	120	y_0								
1921	x_1	128	y_1	8	Δ^1_0						
1931	x_2	139	y_2	11	Δ^1_1	3	Δ^2_0				
1941	x_3	153	y_3	14	Δ^1_2	3	Δ^2_1	0	Δ^3_0		
1951	x_4	168	y_4	15	Δ^1_3	1	Δ^2_2	—2	Δ^3_1	—2	Δ_0^4

न्यूटन की परिमितान्तर रीति के अनुसार—

$$y_x=y_0+x\Delta^1_0+\frac{x(x-1)}{1\times2}\Delta^2_0+\frac{x(x-1)(x-2)}{1\times2\times3}\Delta^3_0$$

$$+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\times2\times3\times4}\Delta^4_0$$

इस उदाहरण में x का मूल्य इस प्रकार ज्ञात किया जायगा :—

$$x=\frac{x \text{ to be interpolated}-x \text{ at origin}}{\text{Difference between adjoining } x\text{'s}}$$

$$=\frac{1936-1911}{10}$$

$$=2.5$$

सूत्र में प्रयुक्त होने वाले अन्तरों (Δ) का मूल्य उपरोक्त तालिका में निकाला जा चुका है, अर्थात $\Delta^1_0=8$; $\Delta^2_0=3$; $\Delta^3_0=0$; तथा $\Delta^4_0=-2$। इन सब मूल्यों को सूत्र में आदिष्ट करने पर

$$y_x=120+2.5\times 8+\frac{2.5(2.5-1)}{1\times 2}\times 3+\frac{2.5(2.5-1)(2.5-2)}{1\times 2\times 3}\times 0$$

$$+\frac{2.5(2.5-1)(2.5-2)(2.5-3)}{1\times 2\times 3\times 4}\times(-2)$$

$=120+20.0+5.625+0+0.078125$

$=145.703125$

$=146$ lakhs (approximately), being the population for 1936.

आवृत्ति वितरण में आन्तर-गणन

(Interpolation in a Frequency Distribution)

कभी कभी आवृत्ति वितरण में भी आन्तर-गणन करने की आवश्यकता पड़ती है। न्यूटन की प्रगामी रीति से ऐसी दशा में आन्तर-गणन करने के पूर्व आवृत्तियों को संचयी आवृत्तियों (Cumulative Frequencies) में बदल लेना आवश्यक होता है। शेष क्रिया उसी प्रकार की जाती है।

Illustration 5 :—

Estimate the number of persons whose incomes are between Rs. 400 and Rs. 500 from the following figures :—

Income in rupees	Below 200	200—400	400—600	600—800	800—1,000
No. of persons in thousands	120	145	200	250	150

(एम० कॉम०, आगरा, १९४२ तथा बी० कॉम०, बनारस, १९५६)

Solution :—

TABLE SHOWING FINITE OR ADVANCING DIFFERENCES

Income in rupees (x)		No. of persons in thousands (y)		Finite or Advancing Differences Δ^1		Δ^2		Δ^3		Δ^4	
Below											
„ 200	x_0	120	y_0								
„ 400	x_1	265	y_1	145	Δ^1_0						
„ 600	x_2	445	y_2	200	Δ^1_1	55	Δ^2_0				
„ 800	x_3	715	y_3	250	Δ^1_2	50	Δ^2_1	—5	Δ^3_0		
„ 1,000	x_4	865	y_4	150	Δ^1_3	—100	Δ^2_2	—150	Δ^3_1	—145	Δ^4_0

न्यूटन की प्रगामी अन्तर रीति के अनुसार—

$$y_x = y_0 + x\Delta^1_0 + \frac{x(x-1)}{1\times2}\Delta^2_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\times2\times3}\Delta^3_0 + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\times2\times3\times4}\Delta^4_0$$

जिसमें $x = \dfrac{x \text{ to be interpolated} - x \text{ at origin}}{\text{Difference between adjoining } x\text{'s}}$

$$= \frac{500-200}{200} = 1.5;$$

तथा $\Delta^1_0 = 145$; $\Delta^2_0 = 55$, $\Delta^3_0 = (-5)$; तथा $\Delta^4_0 = (-145)$ । अब इन सब मूल्यों को उपरोक्त सूत्र में प्रयोग करने पर,

$$y_x = 120 + 1.5\times145 + \frac{1.5(1.5-1)}{1\times2}\times55 + \frac{1.5(1.5-1)(1.5-2)}{1\times2\times3}\times(-5) + \frac{1.5(1.5-1)(1.5-2)(1.5-3)}{1\times2\times3\times4}\times(-145)$$

$$= 120 + 217.5 + 20.625 + 0.3125 - 3.3984375$$

$$= 355.0390625$$

$$= 355 \text{ thousands (approximately)}$$

अतः यह ज्ञात हो गया कि करीब 355 हजार व्यक्ति ऐसे हैं जिनकी आय 500 रुपये से कम है। परन्तु प्रश्न में यह पूछा गया है कि 400 रुपये तथा 500 रुपये के बीच आय वाले कितने व्यक्ति हैं। अतः,

$$\left\{\begin{matrix}\text{Persons earning}\\ \text{less than Rs. 500}\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\text{Persons earning}\\ \text{less than Rs. 400}\end{matrix}\right\}$$

$=(355-265)$ thousands

$=90$ thousands (approximately)

न्यूटन की रीति के प्रयोग को शर्तें
(Conditions for applying Newton's Method)

(१) समंक माला के x के मूल्यों में समान अन्तर हो;

(२) जिस x का आन्तर-गणन करना है वह समान अन्तर वाले x मूल्यों के बाहर का कोई मूल्य हो, अन्यथा समस्त प्रगामी अन्तरों को ज्ञात करना असम्भव हो जायगा।

(३) जहाँ तक सम्भव हो सके इस रीति का प्रयोग समंक माला के पूर्वार्द्ध में किसी x का मूल्य निकालने के लिये करना चाहिये।

(४) इस रीति से किसी भी x का बाह्य-गणन किया जा सकता है किन्तु प्राप्त अनुमान विशेष संतोषजनक नहीं होता।

द्विपद-विस्तार रीति
(Binomial Expansion Method)

द्विपद विस्तार द्वारा भी आन्तर-गणन तथा वाह्य-गणन किया जा सकता है। यह रीति न्यूटन की प्रगामी अन्तर रीति (Newton's Method of Advancnig Differenes) से सुगम है क्योंकि इसमें न तो x के अन्तर देखे जाते हैं और न तो y के प्रगामी अन्तर ही निकाले जाते हैं। न्यूटन की रीति द्वारा अन्तर निकालते समय हम देख चुके हैं कि जब y के पाँच मूल्य दिये रहते हैं तो चतुर्थ अन्तर (Δ^4) वाले कालम में केवल एक ही अन्तर प्राप्त होता है, और इसके पश्चात पुनः कोई दूसरा अन्तर नहीं निकाला जा सकता है। अब यह कल्पना करते हुये कि पाँचवाँ प्रमुख अन्तर ($\Delta^5{}_0$) बराबर शून्य के है, हम द्विपद-विस्तार इस प्रकार कर सकते हैं :—

$$\Delta^5{}_0=0 \text{ अथवा } y_5-5y_4+10y_3-10y_2+5y_1-y_0=0$$

इस द्विपद-विस्तार के समीकरण में y के ज्ञात मूल्यों को आदिष्ट कर के हम बड़ी सरलता से अज्ञात y के मूल्य को ज्ञात कर सकते हैं। द्विपद-विस्तार करते समय निम्न नियमों का पालन किया जाता है :—

(क) प्रथम पद y का वह मूल्य होता है जो प्रमुख अन्तर (Δ_0) का संकेत है; (ख) क्रम से एक पद धनात्मक (+) तथा दूसरा ऋणात्मक (−) होता है; (ग) प्रत्येक अगले y का मूल्य-संकेत पिछले y के मूल्य-संकेत से एक कम होता है; (घ) प्रत्येक अगले y का आधार (Base) निकालने के लिये इस सूत्र को प्रयोग में लाया जाता है :—

$$\frac{\textit{Base of the previous } y \times \textit{Subscript of the previous } y}{\textit{Position of the previous } y \textit{ in the Equation.}}$$

तथा (ङ) पद-माला में कुल पदों की संख्या प्रमुख अन्तर से एक अधिक होती है।

द्विपद विस्तार रीति के प्रयोग की शर्तें

(Conditions for applying Binomial Expansion Method)

(१) दी हुई समंक माला के x के मूल्यों में समान अन्तर हो;

(२) इन्हीं x मूल्यों के समक्ष का कोई y मूल्य अज्ञात हो।

इस रीति से बाह्य-गणन भी किया जा सकता है किन्तु इसके लिये यह आवश्यक है कि उसी क्रम में आने वाले केवल अन्तिम x के बाद का मूल्य अज्ञात हो।

निम्नलिखित उदाहरण द्वारा इस रीति का प्रयोग बतलाया जा रहा है :—

Illustration 6 :—

Below are given weighted index numbers of cost of living of labourers in an industrial centre in India. Interpolate the missing index number for 1933 :—

Year			Index
1930	...	...	173
1931	...	...	149
1932	...	...	145
1933	...	...	—
1934	...	...	131
1935	...	...	141

Solution :—

इस प्रश्न को द्विपद-विस्तार रीति से हल किया जा सकता है क्योंकि यहाँ x-पदों के बीच के अन्तर समान हैं, और पद माला का एक ही समंक अज्ञात है।

ESTIMATION OF THE INDEX NO. FOR 1933

Year (x)	Index (y)	
1930	173	y_0
1931	149	y_1
1932	145	y_2
1933	—	y_3
1934	131	y_4
1935	141	y_5

चूँकि यहाँ y के पाँच मूल्य ज्ञात हैं, इसलिये

$\triangle^5{}_0=0$ अथवा $y_5-5y_4+10y_3-10y_2+5y_1-y_0=0$

उपरोक्त y मूल्यों को इस समीकरण में आदिष्ट करने पर।

$$141-5\times131+10y_3-10\times145+5\times149-173=0$$

अथवा $141-655+10y_3-1,450+745-173=0$

अथवा $-10y_3=-141+655+1,450-745+173$

अथवा $10y_3=1392$

$\therefore$ y_3 (Index No. for 1933)$=139.2$ (approximately)

लैग्रेंज की रीति द्वारा आन्तर-गणन तथा बाह्य-गणन
(Lagranges' Method for Interpolation and Extrapolation)

आन्तर-गणन तथा बाह्य-गणन की जितनी रीतियों का ऊपर वर्णन किया गया है उन्हें सभी प्रकार के प्रश्नों में कार्यान्वित नहीं किया जा सकता क्योंकि प्रत्येक के प्रयोग की अपनी निजी सीमायें हैं। किन्तु फ्रांस के लैग्रेंज नामक एक सांख्यिक द्वारा ज्ञात की गई प्रस्तुत रीति किसी भी दशा में आन्तर-गणन तथा बाह्य-गणन के लिये प्रयोग में लायी जा सकती है। इसका सूत्र है :—

$$y_x = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\ldots\ldots(x_0-x_n)}$$

$$+ y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\ldots\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots\ldots(x_1-x_n)}$$

$$+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\ldots\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots\ldots(x_2-x_n)}$$

$$+ y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_n)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)\ldots\ldots(x_3-x_n)}\ldots\ldots$$

इस सूत्र की वनावट देखने में तो जटिल प्रतीत होती है किन्तु वास्तव में अत्यन्त ही सरल है। सूत्र में कितने पद होंगे इसका पता y के ज्ञात मूल्यों से लगाया जा सकता है। प्रत्येक पद में x के अन्तरों वाली एक लम्बी भिन्न से गुणा करना पड़ता है जिसका क्रम इस प्रकार निश्चित किया जाता है :—

(क) भिन्न के अंशों (Numerators) के सब अन्तर केवल x-मूल्य से ही ज्ञात किये जाते हैं।

(ख) भिन्न के हरों (Denominators) के अन्तर सर्वदा उस संकेत वाले x से ज्ञात किये जाते हैं जो उस पद के ज्ञात y का संकेत है। उदाहरण के लिये प्रथम पद में हर के सभी अन्तंर x_0 से निकाले गये हैं क्योंकि उस पद में y_0 है।

(ग) अंशों व हरों में x के अन्तर ज्ञात करते समय यह ध्यान रखना आवश्यक होता है कि कोई भी अन्तर शून्य न हो जाय अन्यथा सम्पूर्ण पद ही शून्य हो जायगा। यही कारण है जिसकी वजह से अंश में कहीं भी x को नहीं घटाया गया है और न तो हर में उस पद के y के संकेत वाले x को घटाया गया है। ऐसी दशा में हमें x का अगला सांकेतिक रूप लेना पड़ता है। सूत्र के द्वितीय पद के हर में x_1 में से x_0 घटाने के पश्चात् हमें x_1 में से x_2 घटाना पड़ता है क्योंकि x_1 में से x_1 घटाने पर शून्य आ जायगा।

(घ) x के विभिन्न सांकेतिक मूल्यों को घटाने का क्रम तब तक चालू रखना पड़ता है जब तक दिये हुये x-मूल्यों के अन्तिम संकेत न आ जायें। फलतः प्रत्येक पद में अंश व हर में घटने वाले x के संकेतों में समानता दृष्टिगोचर होने लगती है। जैसे प्रथम पद में अंश व हर में घटने वाले दोनों के x क्रमशः x_1, x_2 तथा x_3 आदि हैं।

Illustration 7 :—

Determine by Lagrange's formula the percentage number of criminals under 35 years :—

Age	% number of criminals
Under 25 years	52.0%
,, 30 ,,	67.3%
,, 40 ,,	84.1%
,, 50 ,,	94.4%

(एम० ए०, आगरा, १९३४)

Solution :—

ESTIMATION OF % NUMBER OF CRIMINALS UNDER 35 YEARS BY LAGRANGE'S METHOD

Age in years (X)		No. of Criminals (Y)	
Under 25	x_0	52.0	y_0
,, 30	x_1	67.3	y_1
,, 40	x_2	84.1	y_2
,, 50	x_3	94.4	y_3

इस उदाहरण में हमें यह ज्ञात करना है कि 35 वर्ष से कम उम्र के कितने प्रतिशत अपराधी हैं। अतः $x=35$ लिया जायगा। अब चूंकि y के चार मूल्य ज्ञात हैं, इसलिये लैंग्रेज के सूत्र में हमें निम्नलिखित चार पद लेने की आवश्यकता पड़ेगी :—

$$y_x=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$

$$+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

$$+y_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

उपर्युक्त सूत्र में x व y के विभिन्न मूल्यों को आदिष्ट करने पर ।

$$y_x = 52.0\,\frac{(35-30)\,(35-40)\,(35-50)}{(25-30)\,(25-40)\,(25-50)}$$

$$+67.3\,\frac{(35-25)\,(35-40)\,(35-50)}{(30-25)\,(30-40)\,(30-50)}$$

$$+84.1\,\frac{(35-25)\,(35-30)\,(35-50)}{(40-25)\,(40-30)\,(40-50)}$$

$$+94.4\,\frac{(35-25)\,(35-30)\,(35-40)}{(50-25)\,(50-30)\,(50-40)}$$

अथवा $y_x = 52\,\frac{(5)\times(-5)\times(-15)}{(-5)\times(-15)\times(-25)} + 67.3\,\frac{(10)\times(-5)\times(-15)}{(5)\times(-10)\times(-20)}$

$$+84.1\,\frac{(10)\times(5)\times(-15)}{(15)\times(10)\times(-10)} + 94.4\,\frac{(10)\times(5)\times(-5)}{(25)\times(20)\times(10)}$$

अथवा $y_x = -10.4 + 50.475 + 42.05 - 4.72$

$$= 77.4\%$$

अतः 35 वर्ष से कम उम्र के अपराधियों की संख्या 77.4% है ।

प्रश्न

1. Discuss the utility of interpolation and extrapolation to a businessman. What are the different methods known to you for interpolation ?

किसी व्यापारी के लिये आन्तर-गणन व बाह्य-गणन की जो उपयोगिता है उसका वर्णन कीजिये । आन्तर-गणन की कौन सी विभिन्न रीतियाँ आपको ज्ञात हैं ।

(एम० कॉम०, इलाहाबाद, १९५०)

2. Give a few examples of the use of interpolation in Business Statistics.

व्यावसायिक सांख्यिकी में आन्तर-गणन के उपयोग के कुछ उदाहरण दीजिये ।

(एम० कॉम०, लखनऊ, १९४२)

3. Distinguish between 'Interpolation' and 'Extrapolation'. What are the assumptions underlying interpolation ?

'आन्तर-गणन' व 'बाह्य-गणन' का अन्तर बतलाइये । आन्तर-गणन की क्या परिकल्पनायें है ।

4. A life assurance company advertises the following immediate life annuities per £ 100 paid :—

Age in years	50	60	65	70
Annuity—£ s. d.	6–5–0	8–6–0	9–18–0	12–2–0

By graphical means or otherwise, estimate the corresponding values for ages 62 and 67 years. What is the justification for the procedure you have adopted ?

(बी० कॉम०, बनारस, १९५५)

(*Annuity for age 62=£8 18s., and for 67=£10 14s.*)

5. In an expriment, the following values were found for *P* and *F*. Assuming that errors of observation occur only in *F*, find the value of *F* by interpolation when *P* is equel to *12* lbs.

P (lb.)	11	13	15	17	19	21
F (lb.)	2.5	2.8	3.0	3.5	3.9	4.3

(बी० कॉम०, बनारस, १९५०)

(*By Newton's formula, F=2.7 lbs. when P is 12*)

6. From the following data, estimate the expectation of life at the age of 16 years :—

Age in years			Expectation of life
10	...	...	35.4 years
15	...	...	32.3 ,,
20	...	...	29.2 ,,

25	...	...	26.0	,,
30	...	...	23.2	,,
35	...	...	20.4	,,

(बी० कॉम०, बनारस, १९५१)

(*By Newton's formula, Expectation of life at age 16=31.7 yrs.*)

7. Estimate by Newton's method of interpolation, the expectation of life at age 22 from the following data, stating the assumptions underlying the formula used by you :—

Age in years	10	15	20	25	30	35
Expectation of life in years	35.4	32.2	29.1	26.0	23.1	20.4

(आई० ए० एस०, १९४९ तथा एम० कॉम०, आगरा, १९५४)

(*By Newton's formula, Expectation of life at age 22=27.85 yrs.*)

8. What do you understand by Interpolation ? How does it differ from Extrapolation ?

The following table shows the value of Life Annuity upon a single life aged 20 at rates of interest varying from 2.5% to 5.0%. Estimate by Newton's method the Annuity Value at 2.75% :—

Rate of Int.	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
A. Value	24.145	22.043	20.225	18.644	17.262	16.047

(एम० कॉम०, बनारस, १९५५)

(*Annuity value at 2.75%=23.055*)

9. State Newton's formula for interpolation for equal intervals and the assumptions underlying it. Use it to find the annual net premium at age 25 from the table given below :—

Age		Annual Net Premium
20 ...	...	0.01427
24 ...	...	0.01581
28 ...	...	0.01772
32 ...	...	0.01996

(एम० ए०, आगरा, १९५६ तथा आई० ए० एस०, १९५०)

(By Newton's formula, Premium at age 25=0.01625)

10. Find out from the following data the number of workers earning Rs. 24 or more but less than Rs. 25 :—

Earning less than		Number of workers
Rs. 20 ...	...	296
25 ...	...	599
30 ...	...	804
35 ...	...	918
40 ...	...	966

(बी० कॉम०, बनारस, १९५४ तथा एम० कॉम०, आगरा, १९५६)

(By Newton's formula, no. of workers=53)

11. Interpolate the probable number of persons earning beteween 20 and 25 rupees from the following figures :—

Income in Rs.		No. of persons
Less than 10 ...	...	150
10—20 ...	...	170
20—30 ...	...	200
30—40 ...	...	250
40—50 ...	...	180

(बी० कॉम०, बनारस, १९४७)

(By Newton's formula, no. of persons=91.41)

12. From the following data estimate the number of *persons* earning between 60 and 70 rupees :—

Wage in rupees			No. of persons in thousands
Below 40	...	...	250
40—60	...	...	120
60—80	...	...	100
80—100	...	...	70
100—120	...	...	50

(एम० कॉम०, आगरा, १९५१ तथा बी० कॉम०, बनारस, १९५३)

(*By Newton's formula, no. of persons=53.6 thousands*)

13. From the following table, find the number of students who obtained less than 45 marks :—

Marks			Number of Students
30—40	...	...	31
40—50	...	...	42
50—60	...	...	51
60—70	...	...	35
70—80	...	...	31

(एम० कॉम०, आगरा, १९५७ तथा इलाहाबाद, १९५२)

(*By Newton's formula, no. of students=48*)

14. Estimate the number of persons having incomes between Rs. 1,000 and Rs. 1,500 in the table given below in the groups *A* and *B* :—

Income in Rs.		No. of persons Group *A*	No. of persons Group *B*
Below 500	...	6,000	5,000
500—1,000	...	4,250	4,500
1,000—2,000	...	3,600	4,800
2,000—3,000	...	1,500	2,200
3,000—4,000	...	650	1,500

(बी० कॉम०, आगरा, १९४७)

(*By Newton's formula, no. of persons in Group A : 2,141, and Group B : 2,844*)

15. The age of mothers and the average number of children born per mother are given in the table below. Interpolate the average number of children born per mother *aged* 30-34.

Age of mother in years		No. of children born
15—19	...	0.7
20—24	...	2.1
25—29	...	3.5
30—34	...	—
35—39	...	5.7
40—44	...	5.8

(एम० कॉम०, इलाहाबाद, १९४६ तथा पी० सी० एस०, १९४३)

(*By Binomial Expansion Method, no. of children=4.8*)

16. Interpolate the missing figure in the following table with the help of a suitable formula :—

1911	...	...	1331
1912	...	...	1728
1913	...	...	2197
1914	...	...	—
1915	...	...	3375
1916	...	...	4096
1917	...	...	4913

(एम० ए०, दिल्ली, १९५३)

(*Missing figure for 1914=2,744 by Binomial Method*)

17. Using any interpolation method other than graphical, find the likely index number for 1953 from the following table :—

Year	1951	1952	1953	1954	1955
Index No.	100	107	—	157	212

(एम० कॉम०, बनारस, १९५७)

(*By Binomial Method, I. for 1953=124*)

18. Discuss briefly the nature and suitability of the chief methods of interpolation. Estimate the annual sales of cloth for 1935 from the following data :—

Year		Sale of cloth in lakhs of yards
1920	...	250
1925	...	285
1930	...	328
1940	...	444

(एम० ए०, आगरा, १९५७)

(*By Lagrange's formula, sales for 1935=380.5*)

19. The following table gives the number of income-tax assesses in the Uttar Pradesh :—

Income not exceeding			No. of assesses
Rs. 2,500	...	...	7,166
Rs. 3,000	...	...	10,576
Rs. 5,000	...	...	17,200
Rs. 7,500	...	...	20,505
Rs. 10,000	...	...	21,975

Estimate the number of assesses with incomes not exceeding Rs. 4,000.

(*By Lagrange's formula, no. of assesses=14,898*)

20. Explain the methods used in forecasting the growth of population. The population of a certain town is given below in the years mentioned. Estimate it for the year 1957.

Year			Population
1921	...	...	22,000
1931	...	...	27,000
1941	...	...	34,000
1947	...	...	39,000
1951	...	...	42,000

(एम० कॉम, आगरा, १९५५)

(*By Lagrange's Formula, population for 1957=44,560*)

अध्याय १६

भारतीय समंक

(Indian Statistics)

(भारत में समंक-संकलन का इतिहास—भारत में सांख्यिकीय संगठन की रूपरेखा—केन्द्र में सांख्यिकीय व्यवस्था—राज्यों में सांख्यिकीय व्यवस्था—भारत में जनगणना—भारत में जनगणना की रीति—१९५१ की जनगणना—१९५१ की जनगणना की प्रमुख विशेषतायें—भारतीय जनगणना के दोष—जन्म-मरण सम्बन्धी समंक—कृषि-समंक—क्षेत्रफल समंक—फसल-समंक—पशु-समंक—कृषि-समंकों का प्रकाशन—कृषि-समंकों के मुख्य दोष व सुधार के उपाय—भारत में औद्योगिक समंक—मजदूरी-समंक—मूल्य-समंक—भारतीय निर्देशांक—व्यापार समंक—भारत की राष्ट्रीय आय—राष्ट्रीय न्यादर्श अनुसंधान—प्रश्न)

भारत में समंक-संकलन का इतिहास

(History of the Collection of Statistics in India)

प्राचीन काल से ही भारतवर्ष में समंक-संकलन का कार्य होता आ रहा है। इतिहास इस बात का साक्षी है कि आज से दो-ढाई हजार वर्ष पूर्व भी हमारे देश में समंकों का संकलन किया जाता था। कौटिल्य के अर्थ-शास्त्र में भूमि, मूल्य, जनसंख्या, आदि से सम्बन्धित समंकों का उल्लेख मिलता है। प्रसिद्ध यूनानी यात्री मेगैस्थनीज (Megasthanese) ने भी अपने वर्णन में लिखा है कि चन्द्रगुप्त मौर्य के राज्यकाल में शासन-प्रबन्ध की सुविधा के लिए अनेक प्रकार के समंकों का संकलन किया जाता था। इसी प्रकार के वर्णन हमें अबुल फजल द्वारा रचित आइन-ए-अकबरी में भी मिलता है। ईस्ट इंडिया कम्पनी (East India Company) ने भी समय-समय पर समंक-संकलन का कार्य किया। किन्तु ये समंक केवल कृषि व आयात-निर्यात से सम्बन्धित थे। अब तक जो भी समंक एकत्र किये जाते थे उनका मुख्य उद्देश्य राजकीय नीतियों को निर्धारित करने में सहायता पहुँचाना था। समंक-संकलन के लिए कोई सांख्यिकीय संगठन नहीं था, अतः उन्हें आवश्यकता-

नुसार ही एकत्र किया जाता था। अंग्रेजों ने व्यवस्थित ढंग से समंक-संकलन का कार्य १८६८ में प्रारम्भ किया जब Statistical Abstract relating to British India नामक वार्षिक पत्रिका प्रकाशित की गई। भारतीय अकाल आयोग (Indian Famine Commission) के प्रतिवेदनों के आधार पर एक उच्च कर्मचारी की नियुक्ति कृषि-विभाग में की गई व कई प्रान्तों में कृषि-विभाग खोले गये जिससे अकाल की रोक-थाम की जा सके। इसी समय १८८१ में Imperial Gazetteer of India का प्रकाशन हुआ जिसमें कृषि व अर्थ सम्बन्धी आंकड़े प्रकाशित किये गये। इसी वर्ष भारत की प्रथम जनगणना (Census) की गई (यद्यपि प्रथम जनगणना १८७२ में की गई थी किन्तु उसमें अनेक अशुद्धियाँ होने के कारण उसे मान्यता नहीं दी गई)। भारत सरकार ने १८९५ में एक सांख्यिकीय ब्यूरो (Statistical Bureau) की स्थापना की जिसने वित्त व वाणिज्य सम्बन्धी समंकों का संकलन तथा समन्वय (Coordination) का कार्य प्रारम्भ किया। भारत में व्यवस्थित ढंग से समंक संकलन का कार्य यहीं से प्रारम्भ होता है। १९०५ में जब व्यावसायिक ज्ञान विभाग (Department of Commercial Intelligence) की स्थापना हुई तो यह ब्यूरो उसमें सम्मिलित कर दिया गया। इसी विभाग से Indian Trade Journal का सर्वप्रथम १९०६ में प्रकाशन हुआ। १९२२ में इस विभाग का नाम 'व्यावसायिक ज्ञान व समंक के डाइरेक्टर जेनेरल का कार्यालय' (Office of the Director-General of Commercial Intelligence and Statistics) रक्खा गया जो कलकत्ता में स्थापित हुआ।

१९२२ के पश्चात् समंक-संकलन की ओर सरकार ने बहुत ध्यान दिया। १९२५ में आर्थिक जाँच समिति (Economic Enquiry Committee), १९२९ में 'रॉयल कमीशन ऑन एग्रिकल्चर' (Royal Commission on Agriculture), १९३१ में 'रॉयल कमीशन ऑन लेबर' (Royal Commission on Labour) तथा १९३४ में बाउले-राबर्टसन कमिटी (Bowley-Robertson Committee) आदि ने अपने-अपने प्रतिवेदनों में सांख्यिकीय समंकों की आवश्यकता व उनके दोष-रहित संकलन पर विशेष-रूप से जोर दिया। इन्हीं प्रतिवेदनों के आधार पर १९३३ में एक सांख्यिकीय अनुसंधान ब्यूरो (Statistical Research Bureau) की स्थापना की गई जो १९३८ में भारत के आर्थिक सलाहकार का कार्यालय (Office of the

Economic Adviser to the Government of India) स्थापित होने पर उसमें सम्मिलित कर लिया गया।

१९३९ में जब द्वितीय विश्वयुद्ध छिड़ा तो समंक-संकलन के कार्य में विशेष तत्परता दिखलाई पड़ने लगी क्योंकि एक ओर तो सरकार को युद्ध सम्बन्धी आवश्यकताओं की पूर्त्ति करनी थी, और दूसरी ओर देश में अन्न-वस्त्र के वितरण की व्यवस्था पर ध्यान देना था। अतः १९४२ में औद्योगिक समंक अधिनियम (Industrial Statistics Act) पास किया गया जिसके अनुसार राज्य सरकारों को औद्योगिक समंक एकत्र करने का अधिकार मिल गया। १९४६ में सर्वप्रथम औद्योगिक उत्पादन की गणना (Census of Manufactures) की गई। श्रम विभाग ने भी अनेक जीवन-निर्वाह निर्देशांकों (Cost of Living Index Numbrs) की रचना करने का भार उठाया। भारत सरकार के सभी विभागों ने अपने क्षेत्र से सम्वन्धित समंकों के संकलन व विश्लेषण का कार्य सुचारुरूप से करना प्रारम्भ कर दिया।

१९४७ में जब अपना देश स्वतन्त्र हुआ तो सरकार ने शुद्ध समंकों के संकलन, समन्वय, विश्लेषण एवं निर्वचन के कार्य में तीव्रता लाने के लिये अक्टूबर १९४८ में विभागीय सांख्यिकों की एक समिति वनाई जिसके अध्यक्ष श्री पी० सी० महलानोबिस थे। समंकों का विधिवत समन्वय करने के उद्देश्य से १९४९ में केन्द्रीय सांख्यिकीय इकाई (Central Statistical Unit) की स्थापना की गई और इसी वर्ष जनगणना (Census) व जन्म-मरण सम्वन्धी समंक (Vital Statistics) के विभागों को स्थायी बना दिया गया। १९४९ में ही श्री महलानोविस की अध्यक्षता में राष्ट्रीय आय समिति की स्थापना हुई जिसके अन्य सदस्य डा० वी० के० आर० वी० राव व प्रो० डी० आर० गाडगिल थे। भारत की अर्थ-व्यवस्था के सही रूप का अध्ययन करने के लिये जनवरी १९५० में राष्ट्रीय न्यादर्श अनुसंधान (National Sample Survey) का प्रारम्भ किया गया। १९५१ में केन्द्रीय सांख्यिकीय संघटन (Central Statistical Organization) की स्थापना की गई है जो समंकों के संकलन व समन्वय पर ध्यान देने वाली देश की सर्वोच्च संस्था है। भारत सरकार को देश के विभिन्न क्षेत्रों में समंक संग्रहीत करने का अधिकार देने के लिये १९५३ में एक समंक-संकलन अधिनियम (Collection of Statistics Act) भी पास किया गया है।

इसी बीच भारत में अनेक महत्वपूर्ण अनुसंधान हुये हैं जिनमें अखिल भारत-वर्षीय कृषि-श्रम जाँच (All India Agricultural Labour Enquiry) तथा अखिल भारतवर्षीय ग्रामीण-साख अनुसंधान (All India Rural Credit Survey) विशेष उल्लेखनीय हैं।

भारत में सांख्यिकीय संगठन की रूपरेखा

(Outline of Statistical Organization in India)

शासन-प्रबन्ध की सुविधा को ध्यान में रखते हुये भारतीय संविधान ने धारा २४६ के अन्तर्गत विभिन्न विषयों को तीन भागों में बाँट दिया है। कुछ विषय जैसे रेलवे, विदेशी व्यापार, जनसंख्या, मुद्रा एवं अधिकोषण, आदि विषय केन्द्रीय सरकार के हाथ में हैं, शिक्षा तथा कृषि आदि राज्य सरकारों के हाथ में हैं तथा कुछ विषय जैसे, उद्योग, दोनों सरकारों के अधीन हैं। अतः समंक संकलन के कार्य का विभाजन भी इन्हीं विषयों के अनुसार किया गया है। केन्द्रीय मंत्रि-परिषद (Cabinet Secretariat) स्थित केन्द्रीय सांख्यिकीय संघटन (C. S. O.) सभी समंकों के समन्वय का कार्य करता है।

केन्द्र में सांख्यिकीय व्यवस्था

(Statistical Organization at the Centre)

(१) केन्द्रीय सांख्यिकीय संघटन (Central Statistical Organisation)

भारत सरकार के सभी मंत्रणालय अपने-अपने विषयों से सम्बन्धित समंकों का संकलन एवं उपयोग करते हैं। केन्द्रीय सांख्यिकीय संघटन (C. S. O.) इन मंत्रणालयों द्वारा आवश्यक समंक प्राप्त करता रहता है। इस संस्था के मुख्य कार्य ये हैं—राज्यों द्वारा संग्रहीत समंकों का समन्वय करना, विभिन्न सांख्यिकीय अनुसंधानों की योजना बनाना, उपयोगी समंकों का प्रकाशन करना, संयुक्त राष्ट्र संघ (U. N. O) तथा अन्य देशों को आवश्यक समंक भेजना तथा केन्द्रीय सरकार को आवश्यक सुझाव एवं परामर्श देना।

(२) वित्त मंत्रणालय (Ministry of Finance)

(क) राष्ट्रीय आय इकाई (National Income Unit), (ख) राष्ट्रीय न्यादर्श अनुसंधान कार्यालय (Directorate of National

Sample Survey), (ग) आर्थिक सलाहकार का कार्यालय (Office of the Economic Adviser), (घ) प्रमंडल अधिनियम समंक शाखा (Company Law Statistics), (ङ) समंक एवं ज्ञान शाखा (Statistics and Intelligence Branch), (च) रिजर्व बैंक का अनुसंधान विभाग (Research Section of the Reserve Bank of India)

(३) वाणिज्य एवं उपभोग–उद्योग मंत्रणालय (Ministry of Commerce and Consumer Industries)

(क) व्यावसायिक ज्ञान व समंक कार्यालय (Department of Commercial Intelligence and Statistics), (ख) भारत सरकार के आर्थिक सलाहकार का कार्यालय (Office of the Economic Adviser to the Government of India), (ग) औद्योगिक समंक कार्यालय (Directorate of Industrial Statistics)

(४) श्रम मंत्रणालय (Ministry of Labour)

(क) श्रम ब्यूरो (Labour Bureau), (ख) पुनर्वास एवं नौकरी कार्यालय (Office of the Director-General of Resettlement and Employment), (ग) कृषि-श्रम अनुसंधान शाखा (Agricultural Labour Enquiry Branch), (घ) खानों के प्रमुख निरीक्षक के कार्यालय का सांख्यिकीय विभाग (Statistical Section of the Office of the Chief Inspector of Mines)

(५) गृह मंत्रणालय (Ministry of Home Affairs)

(क) जनगणना आयुक्त तथा रजिस्ट्रार जेनेरल का कार्यालय (Office of the Census Commissioner and Registrar-General of India)

(६) कृषि मंत्रणालय (Ministry of Agriculture)

(क) अर्थ एवं समंक विभाग (Directorate of Economics and Statistics), (ख) भारतीय कृषि अनुसंधान परिषद (Indian Council of Agricultural Research)

राज्यों में सांख्यिकीय व्यवस्था
(Statistical Organization in States)

जैसा ऊपर बतलाया जा चुका है भारतीय संविधान के कुछ विषय जैसे शिक्षा, वन, कृषि, आदि से सम्बन्धित समंकों के संकलन व उनके उपयोग का अधिकार राज्य सरकारों को है। इसके लिए अनेक राज्यों में सांख्यिकीय ब्यूरो (Statistical Bureaus) की स्थापना की गई है जो समंकों के गुण (Quality) में वृद्धि लाने का प्रयास करने के साथ ही उनके समन्वय की ओर विशेष रूप से तत्पर हैं। फिर भी उनकी कार्य-प्रणाली केन्द्र के समान सन्तोषजनक नहीं है क्योंकि उसमें एकरूपता का अभाव है। केन्द्रीय सांख्यिकीय संघठन समय-समय पर उन्हें आवश्यक सलाह प्रदान करता रहता है।

भारत में जनगणना (Census of Population in India)

जनगणना किसी देश के इतिहास में एक अत्यन्त ही महत्वपूर्ण घटना है। इससे सरकार को ही लाभ नहीं होता, सर्वसाधारण भी इससे अनेक लाभ उठाते हैं, क्योंकि जनगणना में केवल व्यक्तियों की संख्या को ही नहीं गिना जाता बल्कि उनके सभी आर्थिक, सामाजिक एवं राजनैतिक विषयों पर विचार किया जाता है। जनगणना द्वारा प्राप्त सूचनाओं का विश्लेषण कर के अनेक महत्वपूर्ण निष्कर्ष निकाले जाते हैं जिनके आधार पर राज्य की अनेक नीतियों का निर्धारण किया जाता है।

भारत में जनगणना की रीति (Method of Census in India)

भारत में प्रथम जनगणना १८७२ में की गई थी किन्तु प्राप्त समंकों में एकरूपता न होने के कारण उसे महत्व नहीं दिया गया। इसके ९ वर्ष बाद १८८१ में पुनः जनगणना की गई जो भारत की प्रथम जनगणना कहलाती है। तब से प्रत्येक दस वर्ष के बाद अपने देश में जनगणना होती आ रही है। अन्तिम जनगणना १९५१ में हुई जो आठवीं थी।

प्रत्येक जनगणना की तिथि के पूर्व सरकार एक जनगणना अधिनियम (Census Act) पास करती है जिसके आधार पर एक जनगणना आयुक्त (Census Commissioner) की नियुक्ति की जाती है जो सम्पूर्ण देश की गणना का निरीक्षण करता है। उसकी सहायता के लिये निरीक्षकों (Superintendents) की भी नियुक्तियाँ की जाती हैं। ये निरीक्षक

एक-एक प्रान्त अथवा राज्य की जनगणना का निरीक्षण करते हैं। तत्पश्चात् ये निरीक्षक ही जिला जनगणना अधिकारी (District Census Officers) की नियुक्ति करते हैं। प्रत्येक जिला कई जनगणना-क्षेत्रों में वितरित कर दिया जाता है जिसमें जनगणना करने के लिए क्षेत्र-निरीक्षक, पर्यवेक्षक (Supervisors) व अनुसंधानकर्ताओं (Investigators or Enumerators) को नियुक्त किया जाता है। अनुसंधानकर्ता ही वास्तविक समंकों का संकलन करते हैं। समंक-संकलन के लिये शहरों में म्युनिसिपल बोर्ड तथा देहातों में तहसीलदार या जिला वोर्डों की सहायता ली जाती है। जनगणना की निश्चित तिथि के कुछ दिन पूर्व अनुसंधानकर्ता अपने-अपने क्षेत्र में अनुसूचियाँ (Schedules) ले कर जाते हैं और निरीक्षकों या पर्यवेक्षकों के निरीक्षण में आवश्यक सूचनाओं को एकत्र करने का अभ्यास करते हैं। जनगणना के लिये निश्चित की गई रात्रि को इसी ढंग से सारे देश भर में समंक-संकलन किया जाता है। ये सूचनायें जनगणना-आयुक्त के पास भेज दी जाती हैं जो उनके आधार पर अनेक महत्वपूर्ण निष्कर्ष निकालने का प्रयास करता है। १८८१ से १९३१ तक की जनगणनायें इसी ढंग से की गई थीं।

किन्तु १९४१ में कुछ परिवर्तन किये गये। एक रात की जनगणना रीति के बजाय अब एक अवधि (Period) की रीति को अपनाया गया क्योंकि एक रात में सम्पूर्ण देश की जनगणना करना तथा साथ ही उसकी जाँच भी कर लेना एक कठिन कार्य था। इसमें प्रगणकों व अनुसंधानकर्ताओं को मनमानी करने का भी अवसर मिलता था। प्रथम रीति के अनुसार जो व्यक्ति रात को जहाँ भी मिलता था उसकी गणना कर ली जाती थी, किन्तु दूसरी रीति को लागू करने पर निवासस्थान को प्रमुखता मिल गई। साथ ही अब अनुसूचियों के बजाय छोटी-छोटी पर्चियों (Enumeration Slips) का प्रयोग होने लगा जिससे मुद्रण व्यय कम होने के साथ ही समंकों के सारणीयन (Tabulation) में भी विशेष सुविधा होने लगी। जनगणना की अवधि बढ़ जाने से अब उतने अधिक प्रगणकों की भी आवश्यकता नहीं रह गई। अतः इस रीति से जनगणना करना अधिक मितव्ययी हो गया।

१९५१ की जनगणना (Census of 1951)

ऊपर बतलाया गया है कि १९४१ तक जनगणना करने के पूर्व सरकार विभिन्न अधिकारियों की नियुक्ति करती थी। इन अधिकारियों के पद

अस्थायी होते थे और जनगणना का कार्य समाप्त होते ही उनका कार्यकाल भी समाप्त हो जाता था। किन्तु स्वतन्त्रता के उपरान्त सरकार ने १९४८ में एक स्थायी जनगणना अधिनियम (Census Act) पास किया जिसके अनुसार गृह मंत्रणालय (Ministry of Home Affairs) के अन्तर्गत एक जनगणना आयुक्त तथा रजिस्ट्रार जेनेरल ऑफ इंडिया की स्थायी नियुक्ति की गई। अब जनगणना सम्बन्धी सम्पूर्ण यंत्र को स्थायी बना दिया गया जिसकी अत्यधिक आवश्यकता थी।

१९५१ की जनगणना के लिये सरकार ने श्री आर० ए० गोपालस्वामी को जनगणना-आयुक्त नियुक्त किया जिनके अधीन १६ निरीक्षक व करीब ६,००,००० प्रगणक थे जिन्होंने सम्पूर्ण देश की जनसंख्या का प्रगणन किया। इस कार्य के लिये ९ फरवरी १९५१ से १ मार्च १९५१ तक की अवधि चुनी गई। साथ ही तीन दिन समंकों की अन्तिम जाँच के लिये भी रक्खे गये। इस अवधि के पूर्व ही देश भर के सभी निवासस्थानों को अनुक्रमांक प्रदान कर दिये गये थे जिनके आधार पर यह अनुमान लगा लिया गया कि करीब ६,४०,००,००० परिवारों को जनगणना में सम्मिलित करना है। यह जनगणना अन्य जनगणनाओं की अपेक्षा अत्यन्त ही विशाल थी क्योंकि इसमें काश्मीर को छोड़ कर उन स्थानों को भी शामिल किया गया जो स्वतन्त्रता के पूर्व भारतीय रियासत थे।

इस जनगणना में अन्य अवसरों की भाँति जाति, धर्म, सम्प्रदाय, आदि विषयों को प्रमुखता देने के बजाय जीविका के साधनों (Means of Livelihood) को विशेष महत्व दिया गया। सम्पूर्ण जनसंख्या का वर्गीकरण भी इसी आधार पर किया गया। जनगणना की पर्ची (Enumeration Slip)* में कुल १४ प्रश्न रक्खे गये जो अन्य वर्षों के प्रश्नों की अपेक्षा अधिक स्पष्ट व सरल थे, यद्यपि उनके द्वारा अनेक महत्वपूर्ण आर्थिक व सामाजिक समंकों का संकलन किया जा सका। यह पहला अवसर था जब परिवारों के आकार व गठन की सूचनाओं को प्राप्त करने के साथ ही उनके सदस्यों की जीविका से सम्बन्धित अनेक बातों की जानकारी प्राप्त की गई। पर्ची के १४ प्रश्नों में १३ वां प्रश्न प्रत्येक राज्य के लिये वैकल्पिक था।

---

* इसका प्रारूप इस पुस्तक के पृष्ठ ५८ पर दिया जा चुका है।

उत्तर प्रदेश में यह प्रश्न बेकारी-सम्बन्धी समंकों का संकलन करने के लिये रक्खा गया।

१९५१ की जनगणना की प्रमुख विशेषतायें

(Essential Features of the Census of 1951)

१९५१ की जनगणना के आधार पर प्रकाशित की गई रिपोर्ट वास्तव में सरकार, अर्थशास्त्रियों, राजनीतिज्ञों, व्यवसायियों व समाज सुधारकों के लिये एक अनुपम भेंट है। इससे देश की जनसंख्या से सम्बन्धित अनेक महत्वपूर्ण विषयों पर प्रकाश पड़ता है :—

(१) १९५१ की जनगणना के अनुसार १ मार्च १९५१ को भारतवर्ष की जनसंख्या (सिक्किम व जम्मू तथा काश्मीर की अनुमानित जनसंख्या को सम्मिलित करते हुए किन्तु आसाम के ख भागों को छोड़ कर) ३६. १२ करोड़ थी, यद्यपि जिन व्यक्तियों की वास्तविक गणना की गई उनकी संख्या ३५. ६९ करोड़ थी।

(२) भारतवर्ष की जनसंख्या विश्व की जनसंख्या की करीब १/७ थी।

(३) पिछले ६० वर्षों में भारत की जनसंख्या में करीब ५०% की वृद्धि पाई गई। १९४१ व १९५१ के बीच यह वृद्धि १३·३% थी।

(४) इस जनसंख्या में करीब ८३% ग्रामीण पाये गये जिनमें ७०% खेतिहर थे। शहरी व ग्रामीण जनसंख्या में ८३ : १७ का अनुपात था।

(५) राज्यों में सबसे अधिक जनसंख्या उत्तर प्रदेश की थी (लगभग ६. ३२ करोड़)।

(६) भारत में जनसंख्या का घनत्व ३०३ व्यक्ति प्रति वर्ग मील पाया गया। दिल्ली का घनत्व (३,०१७ व्यक्ति प्रति वर्ग मील) अन्य शहरों की तुलना में सबसे अधिक था।

(७) भारत में ७५ शहर ऐसे पाये गये जिनकी जनसंख्या एक लाख से अधिक थी जब कि १९४१ में ऐसे शहरों की संख्या ४८ थी। इनमें बम्बई शहर की जनसंख्या सबसे अधिक थी—२. ८४ करोड़। इसके पश्चात् कलकत्ता का स्थान था—२. ५५ करोड़।

(८) भारत में कुल ३,०१८ नगर थे जिनमें रहने वाले व्यक्तियों की

संख्या ६ करोड़ १९ लाख थी। इसके विपरीत गाँवों की कुल संख्या ५. ५८ करोड़ थी जिनमें लगभग २९. ५ करोड़ व्यक्ति निवास कर रहे थे।

(९) कुल जनसंख्या में पुरुषों की संख्या स्त्रियों की अपेक्षा १ करोड़ अधिक थी, अर्थात् प्रति १००० पुरुषों में ९४७ स्त्रियाँ थीं। मद्रास, कच्छ, मनीपुर, उड़ीसा तथा ट्रावनकोर-कोचीन में स्त्रियों की संख्या पुरुषों से अधिक पाई गई। नगरों में प्रति हजार पुरुषों में ८६० व गाँवों में ९६६ स्त्रियाँ थीं।

(१०) भारत में ३०. ३ करोड़ हिन्दू, ३. ५ करोड़ मुसलमान, ०. ८ करोड़ ईसाई व ०. ६ करोड़ सिक्ख थे। परिगणित जाति के व्यक्तियों की संख्या लगभग ५. १ करोड़ थी।

(११) देश में लगभग १६. ६% व्यक्ति शिक्षित व ८३. ४% अशिक्षित थे। पुरुषों में २४. ९% तथा स्त्रियों में ७. ९% शिक्षित थे।

(१२) पाकिस्तान से भारत में आये हुये शरणार्थियों की संख्या करीब ७४. ७ लाख थी।

(१३) देश की ३५. ६६ करोड़ जनसंख्या में २१. ४३ करोड़ (६०. १%) व्यक्ति पूर्णतः आश्रित (Non-earning Dependents), ३. ७९ करोड़ (१०. ६%) अंशतः आश्रित (Earning Dependents) तथा १०. ४४ करोड़ (२९. ३%) व्यक्ति स्वयं जीविकोपार्जन करने वाले (Self-Supporting) थे।

(१४) स्वयं जीविकोपार्जन करने वाले व्यक्तियों में ७. १० करोड़ (६८. १%) कृषक व ३. ३४ करोड़ (३१.९%) अकृषक थे। कृषकों में ४. ५७ करोड़ (६४. ४%) ऐसे किसान थे जो अपनी भूमि के स्वयं मालिक थे और स्वयं जोतते थे, ०. ८८ करोड़ (१२. ३%) ऐसे थे जो दूसरों की भूमि जोतते थे जिस पर उनका स्वामित्व नहीं था, १.४९ करोड़ (२१%) खेतिहर मजदूर थे, तथा ०. १६ करोड़ (२. ३%) व्यक्ति अपनी भूमि पर दूसरों से खेती करा के लगान वसूल करते थे।

(१५) ३. ३४ करोड़ व्यक्ति जो कृषि के अतिरिक्त अन्य साधनों से जीविकोपार्जन करते थे, उनमें ०. ११ करोड़ (३. ३%) मालिक, १. ६५ करोड़ (४९. ४%) स्वयं रोजगार करने वाले, १. ४८ करोड़ (४४. ३%) नौकरी पेशा वाले तथा १. ० करोड़ (३%) किराया, पेंशन आदि पर निर्भर रहने वाले थे।

इस जनगणना में करीब १३ करोड़ रुपये व्यय हुये। अतः यह व्यय प्रति हजार व्यक्तियों पर ४१.७५ रुपये पड़ा। अन्य जनगणनाओं की अपेक्षा यह जनगणना सरकार के लिये अधिक मितव्ययी रही। जनगणना सम्बन्धी समंकों का प्रकाशन १७ ग्रन्थों में हुआ है जो ६३ भागों में विभक्त हैं। इसके अतिरिक्त प्रत्येक जिलाधीश के कार्यालय में उस जिले के निवासियों की समस्त गोपनीय (Confidential) सूचनायें रखने के लिये 'नागरिकों के राष्ट्रीय रजिस्टर' (National Register of Citizens) का भी निर्माण किया गया है। राजकीय आधार पर निर्मित ये रजिस्टर शायद विश्व के सबसे वृहद गोपनीय प्रलेख हैं।

भारतीय जनगणना के दोष
(Short-comings of Indian Census)

यद्यपि १९४१ व १९५१ की जनगणनाओं में अनेक सुधार किये गये हैं, फिर भी उनमें अनेक दोष हैं :—

(१) जनगणना सम्बन्धी समंकों में लोगों की अज्ञानता, उदासीनता व रुचि के अभाव के कारण अनेक अशुद्धियाँ पाई जाती हैं। उदाहरण के लिये उम्र सम्बन्धी समंकों को लिया जा सकता है। साधारणतः लोगों को अपनी वास्तविक उम्र का ज्ञान नहीं होता, अतः वे अनुमान मात्र बतला देते हैं। यह देखा जाता है कि ग्रामीण जनता स्त्रियों की उम्र कम व पुरुषों की अधिक वतलाती है। फिर सामाजिक रीति-रिवाजों के कारण विवाह-योग्य लड़कियों की उम्र साधारणतः कम वतलाई जाती है। गरीब जनता को अपनी वास्तविक आर्थिक दशा वतलाने में संकोच होता है, जव कि धनी वर्ग के लोग अपनी वास्तविक दशा इस डर से छिपाते हैं कि कहीं उन्हें कोई कर आदि न देना पड़े।

(२) जनगणना करने के लिये जिन व्यक्तियों को रक्खा जाता है वे विशेष अनुभवी, शिक्षित व कार्यकुशल नहीं होते। इस काय के लिये उन्हें बहुत ही कम पारिश्रमिक दिया जाता है या कभी-कभी नहीं भी दिया जाता। यदि उन्हें इस कार्य के लिये ठीक से शिक्षित किया जाय, तथा पर्याप्त पारिश्रमिक दिया जाय, तो समंकों में और भी पूर्णता लाई जा सकती है।

(३) जनगणना करने वाले प्रगणकों (Enumerators) का कार्यकाल अस्थायी होता है। अतः एक बार अनुभव प्राप्त किये हुये व्यक्तियों

के अनुभव का लाभ दूसरी बार नहीं उठाया जा सकता। १९५१ की जनगणना के पूर्व तो शीर्षस्थ अधिकारियों के पद भी अस्थायी होते थे।

(४) भारतीय जनगणना में एक साथ ही अनेक बातों की जानकारी प्राप्त करने का प्रयास किया जाता है। इसमें अत्यधिक धन व समय लगता है फिर भी सब सूचनायें ठीक-ठीक नहीं मिल पातीं।

(५) विभिन्न जनगणनाओं में समंकों के वर्गीकरण व सारणीयन में अनुरूपता न होने के कारण उनका तुलनात्मक अध्ययन नहीं किया जा सकता।

(६) स्त्रियों के विषय में एकत्र किये गये समंकों का विश्वास करना कठिन है क्योंकि अपने देश की अधिकतर स्त्रियाँ पर्दे में रहती हैं। जनगणना सम्वन्धी सूचनायें देने के लिये वे स्वयं पर्दे से बाहर नहीं आ सकतीं। अतः संतति विषयक समंकों का ठीक-ठीक अनुमान करना कठिन हो जाता है। इन समस्याओं की पूछ-ताछ के लिये स्त्री प्रगणकों को नियुक्त करना विशेष लाभप्रद होगा।

(७) जनगणना द्वारा उपलब्ध समंकों की शुद्धता की जाँच करने के साधनों की भी कमी है। १९४१ व १९५१ की जनगणनाओं में निदर्शन प्रणाली का उपयोग किया गया था किन्तु उसमें भी पूर्ण वैज्ञानिकता की अभी कमी है।

जन्म-मरण सम्बन्धी समंक

(Vital or Demographical Statistics)

किसी देश में रहने वाले निवासियों की संख्या जन्म-मरण सम्बन्धी समंकों के आधार पर भी जानी जा सकती है। जनगणना द्वारा तो हम केवल एक निश्चित तिथि पर ही जनसंख्या के रुख का पता लगा पाते हैं, किन्तु जन्म-मरण सम्बन्धी समंकों द्वारा किसी भी समय जनसंख्या के रुख को देखा जा सकता है। इन समंकों से जन्म-दर (Birth Rate), मृत्यु-दर (Death Rate), विभिन्न बीमारियों के कारण होने वाली मृत्यु-संख्या, जन-स्वास्थ्य, आदि अनेक बातें जानी जा सकती हैं। यदि ये समंक शुद्ध व विश्वसनीय हों, तो देश में जनगणना कराये बिना ही सरकार जनसंख्या सम्बन्धी अनेक अनुमान लगा सकती है। इसके अतिरिक्त जन्म-मरण के समंक जनगणना द्वारा प्राप्त परिणामों की शुद्धता की जाँच करने के लिये भी प्रयोग में लाये जा सकते हैं। सामाजिक कुरीतियों के निवारण, बीमारियों की रोक-थाम, मज़दूरों की कार्य-क्षमता, स्वस्थ्य जन-जीवन के निर्माण, आदि में तो ये समंक

अत्यन्त ही लाभदायक सिद्ध होते हैं। जीवन-बीमा करने वाली कम्पनियाँ मृत्यु-सम्बन्धी समंकों के ही आधार पर अपने कार्य-क्रम निर्धारित करती हैं। मरण-तालिकायें (Mortality Tables) इन्हीं समंकों के आधार पर निर्मित की जाती हैं।

भारत में जन्म-मरण सम्बन्धी समंकों की स्थिति अत्यन्त सी शोचनीय है क्योंकि ये समंक अशुद्ध, भ्रमात्मक व सांख्यिकीय विश्लेषण की दृष्टि से पूर्णतया अनपयुक्त हैं। इनका संकलन नगरों में म्युनिस्पल बोर्ड व गाँवों में चौकीदारों द्वारा किया जाता है, जो इन समंकों के महत्व को नहीं समझते। इस कार्य के लिये उन्हें कोई अतिरिक्त पारिश्रमिक भी नहीं दिया जाता। फिर प्रत्येक राज्य में इनके संकलन का कोई निश्चित ढंग नहीं है। अतः इनके स्वरूप में कोई सहजातीयता व एकरूपता नहीं पाई जाती।

भारतवर्ष में जन्म व मृत्यु दोनों की दरें विश्व में सबसे अधिक हैं। १९३१ व १९४१ के अन्तर्गत ये दरें क्रमशः ३३.८ व २३.० प्रति हजार थीं। १९४१ व १९५१ के अन्तर्गत ये ४० व २७ प्रति हजार पाई गईं। भारत में बाल-मृत्यु-दर भी अन्य देशों की अपेक्षा अधिक है।

कुछ वर्षों के पहले जन्म-मरण के समंक स्वास्थ्य सम्बन्धी सेवाओं के संचालक (Director-General of Health Services) की वार्षिक रिपोर्ट में प्रकाशित किये जाते थे किन्तु अब इनका प्रकाशन गृह मंत्रणालय के रजिस्ट्रार जनरल व जनगणना आयुक्त (Registrar-General and Census Commissioner of India) के कार्यालय से किया जाता है। इससे इन समंकों के वर्गीकरण व सारणीयन में शुद्धता होने की आशा है।

कृषि-समंक (Agricultural Statistics)

भारतवर्ष एक कृषि प्रधान देश है, अतः यहाँ कृषि-समंकों का भी अत्यधिक महत्व है। प्राचीन समय से ही अपने देश में कृषि-समंकों का संकलन होता आ रहा है, फिर भी उनके संकलन का एकमात्र उद्देश्य लगान सम्बन्धी नियमों को लागू करना था। ईस्ट इंडिया कम्पनी ने भी अकाल की रोक-थाम करने के लिये कृषि-समंकों के संकलन पर जोर दिया। वर्तमान समय में तो ये समंक अर्थशास्त्रियों, राजनीतिज्ञों व समाज सुधारकों के लिये अत्यधिक महत्व की वस्तु हैं। देश की समस्त आर्थिक व व्यापारिक नीतियाँ इन्हीं समंकों

के आधार पर निर्धारित की जाती हैं। भारतवर्ष में पाये जाने वाले कृषि-समंकों को हम तीन मुख्य वर्गों में बाँट सकते हैं :—

(१) क्षेत्रफल-समंक (Area Statistics)

(२) फ़सल-समंक (Crop Statistics)

(३) पशु-समंक (Livestock Statistics)

क्षेत्रफल-समंक (Area Statistics)

क्षेत्रफल-समंक के संकलन का मुख्य उद्देश्य कृषि में उपयोग की जाने वाली भूमि का विस्तृत अध्ययन करना है। देश में कितनी एकड़ भूमि पर कृषि-पदार्थों का उत्पादन किया गया है, कितनी एकड़ भूमि पर जंगल व बाग हैं, कितनी एकड़ भूमि बंजर है, आदि अनेक बातों की जानकारी क्षेत्रफल समंकों द्वारा प्राप्त की जा सकती है। इनकी सहायता से जनसंख्या का घनत्व, भूमि का वितरण, विभिन्न प्रकार की भूमियों के गुण, आदि का भी अध्ययन किया जा सकता है।

जिन राज्यों में रैयतवारी अथवा अस्थायी प्रवन्ध (Temporary Settlement) है, जैसे उत्तर प्रदेश, मद्रास, पंजाब, आदि, वहाँ क्षेत्रफल समंकों का संकलन गाँव के लेखपालों द्वारा किया जाता है। ये समंक लगान-निर्धारण के मुख्य स्रोत हैं, अतः इनका संकलन सरकार के मालगुजारी अधिकारियों की देख-रेख में ही होता है। तहसीलदारों की आज्ञानुसार ये लेखपाल अपने क्षेत्र के खेतों का व्यक्तिगत निरीक्षण करते रहते हैं और फसल तैयार होते समय क्षेत्रफल सम्बन्धी सूचनायें मालगुजारी-अधिकारियों के समक्ष प्रस्तुत करते हैं। किन्तु लेखपालों की अशिक्षा, लापरवाही, कार्य के प्रति उदासीनता, आदि के कारण इन समंकों में अनेक दोष पाये जाते हैं। मिश्रित फसलों (Mixed Crops) के कारण भी इन समंकों में दोष आ जाते हैं।

इसके विपरीत जिन राज्यों में स्थायी प्रवन्ध (Permanent Settlement) है, जैसे विहार, उड़ीसा, आदि, वहाँ इन समंकों का संकलन करने के लिये कोई सरकारी अधिकारी नहीं होता। गाँव के चौकीदार अथवा अध्यक्ष इन्हें एकत्र करके जिलाधीश के पास भेज देते हैं। अतः ये समंक अत्यधिक दूषित होते हैं। सरकार आजकल इन क्षेत्रों में भी शुद्ध समंकों की गणना कराने के लिये आवश्यक संगठन कर रही है।

१९५० के पूर्व क्षेत्रफल सम्बन्धी समंकों का संकलन इन पाँच शीर्षकों के अन्तर्गत किया जाता था—(क) वन, (ख) कृषि के लिये अप्राप्य भूमि, (ग) वर्तमान परती को छोड़कर वह भूमि जिस पर खेती नहीं की गई, (घ) वर्तमान परती तथा (ङ) वह भूमि जिस पर वास्तव में खेती की गई। किन्तु क्षेत्रफल सम्बन्धी समंकों का यह वर्गीकरण कृषि-नियोजन के लिये अनुपयुक्त समझा गया। अतः वर्तमान समय में इनका संकलन इन शीर्षकों के अन्तर्गत किया जाता है—(क) वन, (ख) कृषि के अतिरिक्त अन्य उपयोगों में लगी हुई भूमि, (ग) बंजर व कृषि के अयोग्य भूमि, (घ) स्थायी चरागाह, (ङ) वृक्ष व कुंज, (च) जोतने योग्य भूमि किन्तु किसी कारणवश छोड़ दी गई, (छ) वर्तमान परती, (ज) अन्य परती भूमि तथा (झ) वह भूमि जिस पर वास्तव में खेती की गई।

फसल-समंक (Crop Statistics)

फसल-सम्बन्धी समंक भी व्यापारियों व उपभोक्ताओं के दृष्टिकोण से महत्वपूर्ण होते हैं क्योंकि फसल के परिमाण पर ही समस्त आर्थिक क्रियायें निर्भर है। फसल-समंकों को ही पैदावार समंक (Yield Statistics) भी कहते हैं। इन्हें एकत्र करने के लिये साधारणतः दो रीतियों का प्रयोग किया जाता है :—

(१) **प्राचीन रीति (Traditional Method)**—इस रीति के अनुसार फसल का अनुमान लगाने के लिये निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता था—

उपज = क्षेत्रफल × प्रसामान्य उपज × वास्तविक दशा

प्रसामान्य उपज का अर्थ है—किसी सामान्य लक्षण वाले वर्ष में सामान्य लक्षण वाली भूमि पर की जाने वाली सामान्य उपज (Average outturn on average soil in a year of average character)। यदि ध्यानपूर्वक देखा जाय तो प्रसामान्य उपज की यह परिभाषा अत्यन्त ही अस्पष्ट व संदिग्ध है। 'Average' शब्द का प्रयोग इस परिभाषा की संदिग्धता को और भी बढ़ा देता है। प्रसामान्य उपज सम्बन्धी समंकों का अनुमान लगाने के लिये कृषि विभाग के कर्मचारी अपनी देख-रेख में फसल काटने के प्रयोग (Crop Cutting Experiments) कराते हैं। ऐसे प्रयोग पाँच वर्षों तक किये जाते हैं, और इन्हीं प्रयोगों द्वारा उपलब्ध प्रसामान्य उपज का उपयोग अगले पाँच वर्षों तक उपज-समंक का अनुमान लगाने के लिये किया

जाता है। यह रीति वास्तव में अत्यन्त ही दोषपूर्ण है क्योंकि फसल काटने के प्रयोग वैज्ञानिक ढंग पर नहीं किये जाते, और न तो कृषि विभाग के अधिकारी ही अन्य कार्यों की अधिकता के कारण इस ओर विशेष ध्यान दे पाते हैं।

क्षेत्रफल व प्रसामान्य उपज के पश्चात वास्तविक दशा (Condition Factor) का भी तात्पर्य समझ लेना चाहिये। वास्तविक दशा प्रसामान्य उपज की तुलना में किसी वर्ष-विशेष का अनुमान है। प्रसामान्य उपज तथा इस अनुमान को साधारणतः आनों में व्यक्त किया जाता है। प्रसामान्य उपज को पहले कुछ निश्चित आमों के बराबर मान लिया जाता है और तब यह अनुमान लगाया जाता है कि वर्ष-विशेष की वास्तविक दशा उसकी तुलना में कितने आने के बराबर है। फसल को आनों में व्यक्त किये जाने के कारण इस रीति को आनावारी रीति भी कहते हैं। ये अनुमान चौकीदार या लेखपालों द्वारा लगाये जाते हैं, अतः इनकी भी शुद्धता संदेहजनक होती है। तहसीलदार तथा जिलाधीश के कार्यालयों में भी इन अनुमानों के आधार पर ही तहसील अथवा जिले भर के लिये अनुमान लगाये जाते हैं। प्रसामान्य उपज तो पाँच वर्षों के लिये निश्चित की जाती है किन्तु वास्तविक दशा वर्ष प्रति-वर्ष बदलती रहती है।

(२) दैव निदर्शन रीति (Random Sampling Method)—इस रीति के अनुसार प्रत्येक तहसील में से कुछ गाँव दैव निदर्शन से चुन लिये जाते हैं। इसके पश्चात इन गाँवों में से कुछ खेत, और फिर इन खेतों में से कुछ टुकड़े (३३′×१६½′) उसी ढंग से चुन लिये जाते हैं। इन्हीं टुकड़ों की उपज के आधार पर सम्पूर्ण क्षेत्र की उपज का अनुमान लगा लिया जाता है। प्रत्येक न्यादर्श (Sample) में मिट्टी, खाद, सिंचाई, आदि की एकरूपता का ध्यान रक्खा जाता है। इस पुस्तक के अध्याय ४ में दी गई दैव निदर्शन की विशेषताओं को ध्यान में रखते हुये यह कहा जा सकता है कि यह रीति प्रथम रीति की अपेक्षा अत्यधिक विश्वसनीय परिणाम देती है। इसमें प्रसामान्य उपज व वास्तविक दशा के आगणन की कठिनाइयाँ नहीं उठानी पड़ती। आनावारी रीति में हम विभ्रम की मात्रा को भी नहीं जान सकते, जब कि इस रीति से उसका अनुमान लगाया जा सकता है।

इस रीति से फसल का अनुमान लगाने के लिये 'इंडियन काउन्सिल ऑफ एग्रिकल्चरल रिसर्च' (Indian Council of Agricultural Research)

नामक संस्था ने पंजाब व उत्तरप्रदेश में रवी की फसल गेहूँ पर १९४३-४४ में तथा उड़ीसा, मद्रास, बम्बई व मध्यप्रदेश में खरीफ़ की फसल धान पर १९४४-४५ में प्रयोग किये। खाद्यान्न के अतिरिक्त जूट, कपास, तिलहन आदि फसलों का अनुमान लगाने के लिये भी अब यही रीति उपयोग में लाई जाती है। कलकत्ता स्थित इंडियन स्टैटिस्टिकल इंस्टीट्यूट (Indian Statistical Institute) भी इस दिशा में महत्वपूर्ण कार्य कर रहा है।

पशु-समंक (Livestock Statistics)

भारत जैसे कृषि-प्रधान देश में पशुओं से सम्बन्धित समंकों का भी अत्यधिक महत्व है। किन्तु इन समंकों की शुद्धता पर अभी तक बहुत ही कम ध्यान दिया जाता है। इन समंकों का संकलन १९२० से प्रत्येक पाँच वर्षों के बाद किया जाता है, और उनका प्रकाशन 'इंडियन लाइवस्टॉक स्टैटिस्टिक्स' (Indian Livestock Statistics) नामक पत्रिका में होता है। स्वतन्त्रता के पूर्व इनका प्रकाशन 'इंडियन एग्रिकल्चरल स्टैटिस्टिक्स' (Indian Agricultural Statistics) में होता था। घी, दूध, मक्खन, माँस, चमड़ा, खेती के औजार, आदि से सम्बन्धित समंकों का भी प्रकाशन इस पत्रिका में किया जाता है। पशु समंकों का संकलन गाँव के ही कर्मचारी करते हैं, अतः उनमें भी अनेक दोष पाये जाते हैं। फिर उनके स्वरूप में भी इतनी भिन्नता है कि विभिन्न गणनाओं के समंकों का तुलनात्मक अध्ययन नहीं किया जा सकता।

कृषि-समंकों का प्रकाशन
(Publications on Agricultural Statistics)

कृषि समंकों का प्रकाशन मुख्यतः निम्न पत्र-पत्रिकाओं में किया जाता है :—

(१) The Agricultural Statistics of India—यह एक वार्षिक पत्रिका है जो दो भागों में प्रकाशित की जाती है। इसमें उपज के क्षेत्रफल, पशुओं, व कृषि के औजारों, आदि से सम्बन्धित समंकों का संकलन रहता है।

(२) The Summary Tables of Agricultural Statistics—यह भी एक वार्षिक पत्रिका है। इसमें उपर्युक्त पत्रिका के समंकों का सारणियों द्वारा प्रदर्शन किया जाता है।

(३) Estimates of Area and Yield of Principal Crops in India—यह पत्रिका भी वार्षिक है। इसमें भारत तथा अन्य देशों की

प्रमुख फसलों का क्षेत्रफल, व उनकी उपज सम्बन्धी समंकों का प्रकाशन किया जाता है।

(४) The Crop Atlas of India—इसमें क्षेत्रफल, फसलों की उपज, तथा कृषि सम्बन्धी अन्य समंकों का चित्रों द्वारा प्रदर्शन किया जाता है।

(५) The Statistical Abstract of India—इसमें भी प्रमुख फसलों के क्षेत्रफल व उपज सम्बन्धी समंको का राज्यानुसार वर्गीकरण दिखलाया जाता है। कृषि के अतिरिक्त खनिज पदार्थों से सम्बन्धित समंकों का प्रदर्शन भी इस पत्रिका में किया जाता है।

कृषि सम्बन्धी समंकों का प्रकाशन 'क्रॉप फोरकास्ट्स' (Crop Forecasts), 'इंडियन ट्रेड जर्नल' (Indian Trade Journal), 'इंडियन फॉरेस्ट स्टैटिस्टिक्स' (Indian Forest Statistics), 'इंडियन फूड स्टैटिस्टिक्स' (Indian Food Statistics), आदि पत्रिकाओं में भी किया जाता है।

कृषि-समंकों के मुख्य दोष व सुधार के उपाय

(Main Defects of Agricultural Statistics ; Suggestions for Reform)

भारत में कृषि-समंकों के निम्नलिखित दोष हैं :—

(१) प्रमुख फसलों को छोड़ कर अन्य फसलों के समंकों का अभाव,

(२) कृषि-समकों को एकत्र करने वाले व्यक्तियों की उदासीनता,

(३) समंकों के वर्गीकरण व सारणीयन में वैज्ञानिक ढंगों का अभाव,

(४) उपलब्ध समंकों में इकाई की भिन्नता के कारण एकरूपता का अभाव,

(५) समंकों के प्रकाशन में आवश्यकता से अधिक विलम्ब,

(६) कृषि-समंकों के समन्वय के साधनों की कमी।

इन दोषों को दूर करने के लिए सरकार प्रयत्नशील है। १९१९ में कृषि-समंक समन्वय कमेटी (Agricultural Statistics Coordination Committee) तथा १९५२ में राज्यों के कृषि-मंत्रियों की बैठक में यह सर्वसम्मति से निश्चय किया गया है कि देश के कृषि-कार्य में लगी हुई समस्त भूमि की माप कराई जाय व शीघ्र से शीघ्र सभी राज्यों में दैव निदर्शन प्रणाली का उपयोग किया जाय। लेखपाल व गाँवों के अन्य कर्मचारियों के सांख्यिकीय कार्यों का बोझ कम किया जाय जिससे वे शुद्ध समंकों के संकलन

की ओर ध्यान दें। संयुक्त राष्ट्र संघ (U.N.O.) तथा खाद्य व कृषि संगठन (F.A.O.) की सहायता से भारत में शिक्षा केन्द्र भी खोले गये। भारतीय कृषि अनुसंधान कौंसिल भी इस दिशा में प्रयत्नशील है।

भारत में औद्योगिक समंक
(Industrial Statistics in India)

किसी देश की औद्योगिक उन्नति के लिये औद्योगिक-समंकों का संकलन एवं प्रकाशन अत्यन्त ही आवश्यक है। किन्तु भारत में कृषि-समंकों के समान ही ये समंक भी अधूरे व दोषयुक्त हैं। कृषि-समंकों का संकलन तो बहुत पहिले से ही होता आ रहा है किन्तु औद्योगिक-समंकों का विधिवत संकलन १९४२ के पश्चात से हो सका है जब भारतीय औद्योगिक समंक अधिनियम (Indian Industrial Statistics Act) पास हुआ। इस अधिनियम द्वारा राज्य-सरकारों को यह अधिकार प्रदान कर दिया गया है कि वे अपने क्षेत्र के किसी भी उद्योग-धन्धे से सम्बन्धित समंकों की सूचनायें प्राप्त कर सकती हैं तथा इसके लिये आवश्यक नियमों का निर्माण भी कर सकती हैं। यद्यपि यह अधिनियम १९४२ में पास हुआ किन्तु इसको व्यवहार में १९४५ से लाया जा सका है, जब केन्द्र में 'डाइरेक्टरेट ऑफ इंडस्ट्रियल स्टैटिस्टिक्स' (Directorate of Industrial Statistics) की स्थापना की गई। उसी वर्ष भारत सरकार ने 'औद्योगिक निर्माण संगणना नियम' (Census of Manufacturing Industries Rules) बनाये जिनके अनुसार देश के प्रमुख उद्योगों की संगणना १९४६ में की गई। समंक-संकलन के लिये राज्य-सरकारों ने प्रश्नावली निर्गमित की और प्राप्त समंको का वर्गीकरण करके 'डाइरेक्टरेट' को प्रेषित किया। इस कार्य के लिये प्रत्येक राज्य में सांख्यिकीय अधिकारियों की नियुक्तियाँ भी की गईं। संगणना की प्रश्नावली में निम्न-लिखित छः भाग हैं :—

(१) भाग अ—उद्योग (जिसमें कम से कम २० व्यक्ति हों) व उसके स्वामी का नाम व पता, (२) भाग ब—प्रदत्त एवं उत्पादक पूंजी, (३) भाग स—कर्मचारियों की संख्या, कार्य के घन्टे, वेतन व मज़दूरी, (४) भाग द—ईंधन, विद्युत, कोयला, पानी, आदि के क्रय व उपयोग का परिमाण व मूल्य, (५) भाग इ—अन्य वस्तुओं के क्रय व उपयोग का परिमाण व मूल्य, तथा (६) भाग फ—उत्पादन एवं सहउत्पादन का परिमाण व मूल्य।

इन समंकों का प्रकाशन 'सेंसस ऑफ मैनुफैक्चर्स' (Census of Manufactures) नामक पत्रिका में किया जाता है। १९४६ के वाद से प्रति वर्ष औद्योगिक समंकों का संकलन व प्रकाशन होता आ रहा है। साधारणतः उद्योगपतियों के पास प्रश्नावली की तीन प्रतियाँ, व आवश्यक सूचनायें न देने पर जुर्माने एवं दंड का सूचनापत्र नवम्बर में भेज दिया जाता है और उनसे फरवरी के अन्त तक वापस कर देने की प्रार्थना की जाती है।

१९५४ की गणना के अनुसार देश में पंजीकृत औद्योगिक संस्थाओं की संख्या ७०६७ थी जिनमें से ६६३७ संस्थाओं ने प्रश्नावली भर कर भेजा। इन संस्थाओं में कुल ७८७.८ करोड़ रुपये पूंजी लगी थी जिसमें ३५५.६ करोड़ रुपये अचल (Fixed) व ४३२.२ करोड़ रुपये चल (Working) पूंजी थी। १७.१५ लाख व्यक्ति इन संस्थाओं में काम करते थे जिनमें मज़दूरों की संख्या १५.३४ लाख थी जिन्हें लगभग १७१.२ करोड़ रुपये मज़दूरी दी गई। मज़दूरी के अतिरिक्त ९१४.७ करोड़ रुपये अन्य व्यय हुये जिसमें ८८३.४ करोड़ कच्चे माल पर व्यय किया गया। इन औद्योगिक संस्थाओं ने कुल १,२७७.४ करोड़ रुपये मूल्य का विक्रय योग्य उत्पादन तथा सहउत्पादन किया।

औद्योगिक समंकों की सहायता से देश के प्रमुख उद्योग धन्धों की गतिविधि का अनुमान लगाने के साथ ही साथ उनके द्वारा होने वाली राष्ट्रीय आय में वृद्धि की मात्रा का भी अध्ययन किया जा सकता है। औद्योगिक समंकों के ही आधार पर सरकार सफल औद्योगिक व कर नीति का निर्धारण कर सकती है। किन्तु इन संगणनाओं द्वारा हम देश के प्रमुख २९ उद्योग-धन्धों के अतिरिक्त अन्य छोटे-पैमाने पर कार्य करने वाले धन्धों के वारे में कोई सूचना प्राप्त नहीं कर सकते। अपने देश में कुटीर उद्योगों का भी महत्व कम नहीं है। १९५३ में समंक संकलन अधिनियम (Collection of Statistics Act) के पास हो जाने से अब व्यापारों के समंक भी एकत्र होने लगे हैं किन्तु व्यवसायियों में यथार्थ तथ्यों को छिपाने की आदत के कारण उनकी शुद्धता संदेहजनक समझी जाती है। फिर समंकों के प्रकाशन में भी बड़ा विलम्ब होता है। उदाहरण के लिये १९५० की संगणना का फल १९५५ में प्रकाशित किया गया।

विस्तृत ढंग से औद्योगिक-उत्पादन सम्वन्धी समंकों को प्रकाशित करने में जो समय लगता है उसे ध्यान में रखते हुये सरकार ने उद्योगपतियों के सहयोग

से मासिक समंकों का प्रकाशन करना प्रारम्भ कर दिया है, जिससे अल्पकालीन नीतियों का निर्धारण किया जा सके। ये समंक Monthly Statistics of the Production of selected Industries of India में १९४९ से प्रति मास प्रकाशित किये जाते हैं। ये समंक ९० उद्योगों से सम्बन्ध रखते हैं जिन्हें तीन वर्गों में विभक्त किया गया है—(क) खनन (Mining and Quarrying), (ख) औद्योगिक निर्माण (Manufacturing) तथा (ग) विद्युत एवं शक्ति (Electric Light and Power)।

औद्योगिक समंकों का प्रकाशन निम्न पत्रिकाओं में भी होता है :—

(१) **Statistics of Factories ;**

(२) **Large Industrial Establishments in India ;**

(३) **Report on the Working of Joint Stock Companies ;**

(४) **Statistical Abstract of India ;**

(५) **Monthly Survey of Business Conditions in India ;**

(६) **Journal of Industry and Trade.**

मज़दूरी-समंक (Wage Statistics)

विभिन्न उद्योग-धन्धों में लगे हुऐ मजदूरों की मज़दूरी से सम्बन्धित समंकों का संकलन करना भी औद्योगिक दृष्टि से अत्यन्त ही महत्वपूर्ण कार्य है, क्योंकि मज़दूरी पर ही अनेक औद्योगिक समस्यायें निर्भर हैं। मज़दूरी देने के ढंग, उसकी दर, विभिन्न स्थानों एवं पेशों में उनकी दरों की विभिन्नता, पुरुष व स्त्रियों की मज़दूरी में अन्तर, आदि से सम्बन्धित समंकों के संकलन व विश्लेषण के आधार पर ही श्रम-नीतियों का निर्धारण सम्भव है। कल्याण-कारी राज्यों में तो इन समंकों का विशेष महत्व होता है क्योंकि सरकार श्रमिकों की भलाई के लिये किसी नियम को तभी बना सकती है जब उसे सन्तोषजनक समंक प्राप्त हो सकेंगे।

भारत में दो प्रकार के मज़दूरी-समंक एकत्र किये जाते हैं—औद्योगिक मज़दूरी समंक व कृषि-मज़दूरी समंक। कृषि-मज़दूरी से सम्बन्धित समंकों का संकलन सर्वप्रथम १८५९ में किया गया था। १८७३ के उपरान्त इनका अर्द्ध-वार्षिक प्रकाशन राज्य के गजटों (Gazettes) में तथा वार्षिक प्रकाशन

'भारत में मूल्य तथा मज़दूरी' (Prices and Wages in India) में होने लगा। १९०५ में केन्द्रीय सरकार ने अर्द्ध-वार्षिक प्रकाशनों को समाप्त करके राज्य-सरकारों को पंच-वर्षीय मज़दूरी-संगणना करने का आदेश दिया। यू० पी०, पंजाब, मद्रास, आदि ने कथित संगणनायें कराईं परन्तु उपलब्ध समंक अत्यन्त ही दोषयुक्त थे। १९१९ में संगणना की रीतियों में कुछ सुधार अवश्य किये गये जिनसे उनके अनेक दोष दूर किये जा सके। औद्योगिक-मज़दूरी से सम्बन्धित समंकों का संकलन करने के लिये सर्वप्रथम बम्बई में कई अनुसंधान किये गये। ऐसे ही अनुसंधान अन्य राज्यों में भी हुये। सरकार ने १९३६ में जो 'मज़दूरी-भुगतान अधिनियम' (Payment of Wages Act) पास किया था उसके अन्तर्गत भी मज़दूरी सम्बन्धी समंकों का संकलन किया गया। इन्हीं समंकों के आधार पर १९५३ से लेबर ब्यूरो (Labour Bureau) 'भारत के कारखानों में काम करने वाले श्रमिकों की आय का निदशांक' (Index Number of Earnings of Factory Workers in India) तैयार करता है। भारतीय लेबर गजट (Indian Labour Gazette) में इन समंकों का विधिवत प्रकाशन किया जाता है।

अन्य प्रकार के समंकों की भांति मज़दूरी के समंकों की दशा भी अपने देश में निराशाजनक ही है। यद्यपि १९३१ में श्रम आयोग (Royal Commission on Labour), १९४४ में श्रम अनुसंधान समिति (Labour Investigation Committee), तथा यू० पी०, कानपुर, बिहार, आदि की श्रम-जाँच समितियों ने इस विषय पर बहुत जोर दिया है, फिर भी उपलब्ध समंकों में अनेक त्रुटियाँ हैं तथा उनमें एकरूपता का अभाव है। इसका मुख्य कारण यह है कि हमारे देश के कारखानों की वेतन सारणियाँ (Pay Rolls) हीं त्रुटिपूर्ण हैं और उनकी बनावट में अनेक विषमतायें पाई जाती हैं। फिर मज़दूरी देने की पद्धतियों में भी बड़ा अन्तर है। मज़दूरों की कार्यक्षमता, योग्यता तथा पेशे की विभिन्नता के कारण भी समंकों में समानता दृष्टिगोचर नहीं होती। कृषकों की मज़दूरी के समंक तो और भी दोषपूर्ण हैं।

कृषि-मज़दूरी से सम्बन्धित समंकों का वैज्ञानिक संकलन करने के लिये भारत सरकार ने राज्य सरकारों की सहायता से १९४९ में एक कृषि-श्रम अनुसंधान (Agricultural Labour Enquiry) कराया। इस अनुसंधान का मुख्य उद्देश्य न्यूनतम मज़दूरी निर्धारित करने का विचार भी

था। दैव-निदर्शन (Random Sampling) के आधार पर यह अनुसंधान भारत के ८१३ गाँवों में किया गया। इस अनुसंधान से कृषकों की मज़दूरी से सम्बन्धित अनेक समस्याओं पर प्रकाश पड़ता है। राष्ट्रीय न्यादर्श अनुसंधान (National Sample Survey) से भी हमें अनेक महत्वपूर्ण समंक प्राप्त हुये हैं। कृषि-मज़दूरी समंकों के वैज्ञानिक संकलन में खाद्य एवं कृषि मंत्रालय (Ministry of Food and Agriculture) का कार्य भी सराहनीय है।

मूल्य-समंक (Price Statistics)

किसी देश की आर्थिक दशा के अध्ययन में मूल्य-समंकों का भी अत्यन्त ही महत्वपूर्ण स्थान है। इनके आधार पर कृषक, व्यापारी एवं उपभोक्ता सभी अपनी आर्थिक क्रियाओं का निर्धारण करते हैं, क्योंकि मूल्य-परिवर्तन के फलस्वरूप समाज के सभी वर्गों पर प्रभाव पड़ता है। भारत में मूल्य-समंक साधारणतः दो श्रेणियों में पाये जाते हैं—वस्तुओं के मूल्यों के रूप में अथवा निर्देशांकों (Index Numbers) के रूप में। पुनः ये मूल्य भी अनेक प्रकार के हैं—कटती फसल के मूल्य (Harvest Prices), थोक मूल्य (Wholesale Prices), खुदरा मूल्य (Retail Prices), आदि।

भारत में मूल्य-समंकों का प्रकाशन 'भारतीय मूल्य तथा मज़दूरी' (Indian Prices and Wages) नामक पत्रिका तथा भारत सरकार के गजटों में किया जाता था। किन्तु ये समंक अत्यन्त ही दोषयुक्त थे। तत्पश्चात् इनका प्रकाशन व्यावसायिक ज्ञान एवं समंक विभाग की ओर से 'इंडियन ट्रेड जर्नल' (Indian Trade Journal) तथा 'होलसेल प्राइसेस ऑफ सर्टेन सेलेक्टेड आर्टिकिल्स ऑफ ट्रेड ऐट सेलेक्टेड स्टेशन्स इन इंडिया' (Wholesale Prices of Certain Selected Articles of Trade at Selected Stations in India) में होने लगा। भारत के आर्थिक सलाहकार (Economic Adviser to the Government of India) के कार्यालय से भी 'मंथली सर्वे ऑफ बिज़नेस कंडीशन्स इन इंडिया' (Monthly Survey of Business Conditions in India) नामक मासिक पत्रिका निकलती थी जिसमें मूल्य-समंक दिये जाते थे। आजकल 'उद्योग-व्यापार पत्रिका' (Journal of Industry and Trade), 'बुलेटिन ऑफ एग्रिकल्चरल प्राइसेस' (Bulletin of Agricultural Prices), 'इंडियन

एग्रिकल्चरल प्राइस स्टैटिस्टिक्स' (Indian Agricultural Price Statistics), 'रिजर्व बैंक ऑफ इंडिया बुलेटिन' (Reserve Bank of India Bulletin), आदि में भी मूल्य-समंकों का विधिवत प्रकाशन किया जाता है।

यद्यपि भारत में मूल्य-समंकों का प्रकाशन करने वाली अनेक पत्रिकायें हैं किन्तु इनमें एक ही स्थान अथवा एक ही वस्तु के मूल्य भिन्न-भिन्न पाये जाते हैं। फसलों की कटाई के समय के मूल्यों (Harvest Prices) में तो ये अन्तर और भी अधिक दिखलाई पड़ते हैं। केवल उपभोक्ता मूल्यों (Consumer's Prices) में, जिनके आधार पर जीवन-निर्वाह निर्देशांकों की रचना की जाती है, ये अन्तर कम पाये जाते हैं। अत: ये मूल्य विश्वसनीय भी हैं। मूल्य-समंकों में दोष पाये जाने के निम्नलिखित प्रमुख कारण हैं:—

(१) साधारणत: मूल्यों का संकलन तहसील के कर्मचारी करते हैं जो इनके महत्व को नहीं जानते। कार्य की अधिकता, अनुभवहीनता तथा लापरवाही के कारण या तो वे उपयुक्त समंकों का संकलन ही नहीं कर पाते या प्राप्त समंकों को जान बूझ कर दूषित बना देते हैं।

(२) वस्तुओं की किस्मों की विभिन्नता एवं इकाई की अनिश्चितता के परिणामस्वरूप भी मूल्य-समंक दोषयुक्त हो जाते हैं। कोई अनुसंधानकर्ता प्रथम श्रेणी की वस्तुओं के मूल्य का संकलन करता है तो कोई निम्न श्रेणी की वस्तुओं का। ऐसे सब मूल्यों का जब मिश्रण कर दिया जाता है तो उसके आधार पर ज्ञात किया गया कोई अन्य मूल्य किसी का भी प्रतिनिधित्व नहीं करता।

(३) मूल्यों पर स्वर्ण की क्रयशक्ति का बड़ा प्रभाव रहता है। किन्तु उसके मूल्य में जब बहुत ही कम परिवर्तन हुआ हो तो अन्य वस्तुओं के मूल्य में कितना परिवर्तन हुआ होगा इसका पता लगाना कठिन है।

(५) उपभोक्ताओं की आदत, फैशन व रीति-रिवाज में परिवर्तनों के फलस्वरूप भी मूल्य में परिवर्तन होते रहते हैं जिन्हें ज्ञात करना कठिन होता है।

भारतीय निर्देशांक (Indian Index Numbers)

भारतवर्ष में विभिन्न आर्थिक परिस्थितियों के अध्ययनार्थ अनेक निर्देशांकों की रचना की जाती है। सर्वप्रथम आयात, निर्यात, खाद्यान्न के खुदरा मूल्य, आदि से सम्बन्धित निर्देशांकों का प्रकाशन प्रत्येक पाँच वर्ष के उपरान्त 'भारतीय मूल्यों के निर्देशांक' (Index Numbers of Indian Prices)

नामक पत्रिका में किया जाता था, जिनका आधार वर्ष १८७३ लिया जाता था। प्रथम महायुद्ध-काल में बम्बई तथा कलकत्ता के थोक-मूल्य निर्देशांकों की रचना की गई जिनका आधार वर्ष १९१४ रखा गया। जीवन-निर्वाह निर्देशांकों की रचना भी इसी काल के उपरान्त की गई। आज हमें कृषि, उत्पादन, उपभोग, श्रम, विदेशी व्यापार, आदि सभी विषयों के निर्देशांक उपलब्ध हैं। इनका प्रकाशन सरकारी व गैर-सरकारी सभी संस्थाओं द्वारा किया जाता है। इनमें से प्रमुख निर्देशांक निम्नलिखित हैं :—

थोक मूल्य निर्देशांक (Wholesale Price Index Numbers)

(१) भारत के आर्थिक सलाहकार का थोक-मूल्य निर्देशांक (Economic Adviser's Wholesale Price Index Number)—भारत में विभिन्न वस्तुओं के थोक-मूल्य में होने वाले परिवर्तनों के अध्ययनार्थ यह निर्देशांक भारत के आर्थिक सलाहकार के कार्यालय से प्रकाशित किया जाता है। इसका आधार वर्ष 'अगस्त १९३९ में समाप्त होने वाला वर्ष' है। निर्देशांक में सम्मिलित की जाने वाली ७८ वस्तुओं को पाँच प्रमुख वर्गो व १८ उपविभागों में बाँटा गया है—(क) भोजन की वस्तुयें—११, (ख) औद्योगिक कच्चा माल—१९, (ग) अर्धनिर्मित वस्तुयें—२३, (घ) निर्मित वस्तुयें—१९, तथा (ङ) अन्य वस्तुयें—६। इन वस्तुओं के कुल २२५ मूल्य-उद्धरण एकत्र किये जाते हैं। इस निर्देशांक की रचना प्रति सप्ताह की जाती है जिसके लिये प्रत्येक शुक्रवार को मूल्य-संकलन किये जाते हैं। इसका प्रकाशन करने के लिये एक 'इंडेक्स नम्बर ऑफ होलसेल प्राइसेस इन इंडिया' (Index Number of Wholesale Prices in India) नामक बुलेटिन कार्यालय की ओर से निर्गमित की जाती है। इसका सारांश समाचार-पत्रों में भी दिया जाता है।

निर्देशांक की रचना करने के लिये विभिन्न मूल्यों के मूल्यानुपात (Price Relatives) निकाल कर उनका साधारण गुणोत्तर मध्यक निकाला जाता है। इनके आधार पर निर्मित निर्देशांक वस्तु निर्देशांक (Commodity Index) कहलाता है। उपवर्गों के अन्तर्गत आने वाली वस्तुओं के मूल्यानुपातों के गुणोत्तर मध्यक को भारांकित करके उपवर्ग निर्देशांक (Sub-group Index), तथा इन उपवर्ग निर्देशांकों से भारांकित गुणोत्तर मध्यक के आधार पर वर्ग निर्देशांक (Group-Index) की रचना की जाती है। पुनः इन वर्ग निर्देशांको को भारांकित गुणोत्तर मध्यक की सहायता से साधारण निर्देशांक

(General Index) में परिणित कर लिया जाता है। प्रत्येक वर्ग व उपवर्ग के भारों का क्रम निम्नांकित है :—

(क) भोजन की वस्तुयें—३१। इन वस्तुओं में खाद्यान्न का भार ५९, दाल का ८ तथा अन्य वस्तुओ का ३३ है।

(ख) औद्योगिक कच्चा माल—१८। इनमें रेशे के मालों का भार ५३, तिलहन का ३०, खनिज का १० तथा अन्य का ७ है।

(ग) अर्ध-निर्मित वस्तुयें—१७। इनमें चमड़े की वस्तुओं का भार ८, अखाद्य तेलों का १३, खाद्य तेलों का १६, सूत का ३५, धातुओं की बनी वस्तुओं का १८, खली का ५ तथा अन्य निर्मित वस्तुओं का भी ५ है।

(घ) निर्मित वस्तुयें—३०। इन वस्तुओं में जूट का भार ११, कपड़े का ४५, रेशम का ६, ऊन का २, धातु का १७ तथा अन्य वस्तुओं का १९ है।

(ङ) अन्य वस्तुयें—४।

भारत के आर्थिक सलाहकार के थोक-मूल्य निर्देशांकों की आजकल अनेक आलोचनायें की जाती हैं क्योंकि इनमें आधार वर्ष व भारों का चुनाव वर्तमान परिस्थिति के अनुकूल नहीं है। देश की औद्योगिक उन्नति में दिन-प्रति-दिन वृद्धि होती जा रही है किन्तु इस निर्देशांक में निर्मित वस्तुओं को केवल ३०% भार दिये गये हैं। फिर भारों का निर्धारण भी न्यायसंगत नहीं कहा जा सकता, क्योंकि वे कुल बाजार मूल्य (Gross Market Values) पर आधारित हैं जब कि उनका निर्धारण शुद्ध उत्पादन के आधार पर होना चाहिये। अनेक अस्तुओं को दो बार भार मिल गये हैं, जैसे सूत व सूती वस्त्र। मूल्य उद्धरणों की संख्या भी असन्तोष-जनक ही है। गेहूँ व चावल जैसी उपयोगी वस्तुओं के लिये तीन-तीन मूल्य-उद्धरण एकत्र किये जाते हैं जब कि खली के लिये ५ व चमड़े के लिये ८। प्रथम वर्ग भोजन की वस्तुओं के लिये है परन्तु उसमें चीनी, गुड़, चाय, कहवा, आदि सभी सम्मिलित हैं।

उपर्युक्त दोषों को दूर करने के लिये भारत के आर्थिक सलाहकार ने अनेक सुधार किये गये हैं। अब १९३८–३९ के स्थान पर १९५२–५३ को आधार वर्ष माना गया है तथा ७८ वस्तुओं के बजाय ११२ वस्तुओं का चुनाव किया जाने लगा है, जिसके लिये ५५५ मूल्य-उद्धरण एकत्र किये जाते हैं। इसी प्रकार वस्तुओं के वर्गीकरण में भी परिवर्तन हुये हैं—(क) भोजन की वस्तुयें (Food Articles), (ख) मादक वस्तुयें व तम्बाकू (Liquor and

Tobacco), (ग) इंधन, शक्ति, प्रकाश, आदि (Fuel, Power, Light etc.), (घ) औद्योगिक कच्चा माल (Industrial Raw Materials), (ङ) निर्मित वस्तुयें (Manufactured Articles), तथा (च) अन्य वस्तुयें। इनके भार क्रमशः ५०.४, २.१, ३.०, १५.५ २९.० तथा ० हैं। इस निर्देशांक में गुणोत्तर मध्यक के स्थान पर भारांकित साधारण मध्यक का ही प्रयोग किया जाता है। पुराने व नये निर्देशांकों का अनुपात लगभग ३८०.६ : १००.० है।

(२) कलकत्ता थोक मूल्य निर्देशांक (Calcutta Wholesale Price Index Numbers) :—यह निर्देशांक ६९ वस्तुओं के आधार पर निर्मित किया जाता है जिनके मूल्य कलकत्ता के बाजारों से एकत्र किये जाते हैं। कुछ समय पहले इसमें ७२ वस्तुओं को सम्मिलित किया जाता था। इसका आधार वर्ष जुलाई १९१४ है। मूल्यानुपातों का मध्यक निकालने के लिये साधारण मध्यक का ही प्रयोग किया जाता है। इसका प्रकाशन व्यावसायिक ज्ञान व समंक विभाग की ओर से प्रति मास Indian Trade Journal में किया जाता है। अखिल भारतीय महत्व का निर्देशांक न होने के कारण आजकल इसका प्रकाशन अस्थायी रूप से किया जा रहा है।

खुदरा मूल्य निर्देशांक (Retail Price Index Numbers)

भारत सरकार के श्रम मंत्रणालय स्थित लेबर ब्यूरो की ओर से शहरी व देहाती क्षेत्रों के लिये दो मासिक खुदरा-मूल्य निर्देशांकों का प्रकाशन 'इंडियन लेबर गजट' (Indian Labour Gazette) में किया जाता है। शहरी क्षेत्रों के लिये कुल १८ केन्द्रों के मूल्य लिये जाते हैं। वस्तुओं का वर्गीकरण इस प्रकार किया जाता है—(क) भोजन की समस्त वस्तुयें, (ख) इंधन व प्रकाश, तथा (ग) अन्य वस्तुयें। देहाती क्षेत्रों के लिये ११ केन्द्रों के मूल्य एकत्र किये जाते हैं। ये सभी केन्द्र रेलवे लाइनों के समीप हैं अतः मूल्यों का संकलन पास के स्टेशन मास्टर द्वारा कराया जाता है। समस्त वस्तुयें ४ भागों में बाँटी जाती हैं—(अ) भोजन की सभी वस्तुयें, (ब) इंधन व प्रकाश, (स) वस्त्र तथा (घ) अन्य वस्तुयें। इनकी रचना के लिये साधारण मध्यक का प्रयोग किया जाता है व १९४४ को आधार वर्ष माना जाता है। किन्तु इन निर्देशांकों में अनेक दोष पाये जाते हैं। अतः श्रम ब्यूरो ने इनके आधार वर्ष १९४४ को बदल कर अब १९४९ के आधार पर कुछ चुनी हुई वस्तुओं के निर्देशांकों की रचना करना प्रारम्भ कर दिया है।

जीवन-निर्वाह निर्देशांक (Cost of Living Index Numbers)

भारत में जीवन-निर्वाह निर्देशांकों की रचना लेबर ब्यूरो तथा कुछ अन्य राज्य सरकारें करती हैं। इनमें से प्रमुख निर्देशांक निम्नलिखित हैं :—

(क) लेबर ब्यूरो श्रमिक जीवन-निर्वाह निर्देशांक (Labour Bureau Working Class Cost of Living Index Number)—इस निर्देशांक की रचना के लिये भारत के प्रमुख १९ औद्योगिक क्षेत्रों के समंक एकत्र किये जाते हैं। वस्तुओं का वर्गीकरण इस प्रकार किया जाता है—(अ) भोजन, (ब) प्रकाश व इंधन, (स) किराया, (द) वस्त्र, विस्तर व जूते तथा (इ) अन्य। इस निर्देशांक का आधार वर्ष १९४४ था, किन्तु अब १९४९ लिया जाता है। प्रत्येक वर्ग को कितना भार प्रदान किया जाय, इसकी जानकारी के लिये १९४३–४५ में श्रमिकों के आय-व्यय की विधिवत जाँच की गई थी।

(ख) बम्बई श्रमिक जीवन-निर्वाह निर्देशांक (The Bombay Working Class Cost of Living Index Number)—इस निर्देशांक का प्रकाशन बम्बई के श्रम विभाग की ओर से १९२१ से होता आ रहा है। इसके लिये बम्बई के श्रमिकों के आय-व्यय का पता लगाने के लिये १९२१–२२ तथा १९३२–३३ के बीच कई महत्वपूर्ण अनुसंधान किये गये। पहले तो इस निर्देशांक का आधार वर्ष 'जून १९३४ में समाप्त होने वाला वर्ष' था किन्तु अब इसकी रचना 'अगस्त १९३९' के आधार पर की जाती है। ये निर्देशांक आधार वर्ष १९४४ पर भी बनाये जाते हैं। समस्त उपभोग की वस्तुओं को पाँच वर्गों में बाँटा गया है—(अ) भोजन, (ब) इंधन व प्रकाश, (स) वस्त्र, (द) किराया तथा (इ) अन्य वस्तुयें, जिनके लिये क्रमशः २८, ४, ६, १ व ७ वस्तुओं के मूल्य एकत्र किये जाते हैं। इसके अतिरिक्त इन वर्गों को ४७, ७, ८, १३ तथा १४ भार भी दिये जाते हैं। मूल्य-उद्धरण बम्बई के १२ औद्योगिक क्षेत्रों में स्थित दो-दो दूकानों से संग्रहीत किये जाते हैं। इस निर्देशांक का प्रकाशन इंडियन लेबर गजट (Indian Labour Gazette) में किया जाता है।

(ग) कानपुर श्रमिक जीवन-निर्वाह निर्देशांक (The Kanpur Working Class Cost of Living Index Number)—इस निर्देशांक का प्रकाशन उत्तर प्रदेश के श्रम विभाग की ओर से किया जाता है जिसके लिये १९३८–३९ में 'आर्थिक ज्ञान ब्यूरो' (Bureau of Economic Intelligence) ने

३५

कानपुर की मिलों में काम करने वाले श्रमिकों की आय-व्यय का अनुसंधान किया था। इस निर्देशांक में भी वस्तुओं को पाँच भागों में बाँटा गया है जिनके लिये क्रमशः ११, २, २, १ तथा ५ वस्तुओं के मूल्य एकत्र किये जाते हैं। भारों का क्रम इस प्रकार है—४२, ६, ८, ७, ६। इन मूल्यों का संकलन प्रत्येक शनिवार को कानपुर की श्रम-बस्तियों में स्थित १० दूकानों से किया जाता है। यह निर्देशांक भी 'इंडियन लेबर गजट' (Indian Labour Gazette) में प्रकाशित होता है।

औद्योगिक निर्देशांक (Industrial Index Numbers)

औद्योगिक समंकों के अध्ययनार्थ भी निर्देशांकों की रचना की जाती है। इनमें प्रमुख निर्देशांक निम्नलिखित हैं :—

(क) औद्योगिक क्रियाओं का 'कैपिटल' निर्देशांक ('Capital' Index of Industrial Activity)—भारत में औद्योगिक क्रियाओं के सूचनार्थ कलकत्ते की कैपिटल (Capital) नामक पत्रिका प्रति सप्ताह एक निर्देशांक का प्रकाशन करती है। यह निर्देशांक मार्च १९३८ से बनाया जा रहा है। समस्त औद्योगिक क्रियाओं को ६ प्रमुख वर्गों में विभक्त किया गया है—(अ) औद्योगिक उत्पादन, (ब) खनिज उत्पादन, (स) रेल व नदियों के व्यापार, (द) वित्त सम्बन्धी समंक, (इ) विदेशी व तटीय व्यापार, तथा (फ) विदेशी व तटीय जहाजरानी। इन वर्गों के भार क्रमशः ३६, ७, २४, २०, ७ तथा ६ हैं। इस निर्देशांक का आधार वर्ष १९३५ है। समय-समय पर इन वर्गों के स्वरूप में कुछ परिवर्तन भी होते रहे हैं, जैसे मार्च १९४१ से 'विदेशी व तटीय जहाजरानी' को हटा कर उसके स्थान पर 'विद्युत का उपभोग', तथा 'रेल व नदियों के व्यापार' के स्थान पर पहले 'रेलवे आय', व अप्रैल १९५२ से 'भरे हुये माल के डिब्बों की संख्या' ली जा रही है। भारों के परिमाण में भी कुछ अन्तर किये गये हैं। निर्देशांक की रचना करने के लिये आवश्यक औद्योगिक समंकों का संकलन भारत सरकार के व्यावसायिक ज्ञान व समंक विभाग (Department of Commercial Intelligence and Statistics) तथा रिजर्व बैंक ऑफ इंडिया के प्रकाशनों के आधार किया जाता है। इसके अतिरिक्त इसमें भारांकित गुणोत्तर मध्यक का प्रयोग किया जाता है व आर्तव-विचरण (Seasonal Variation) बारह-मासिक चल-माध्य से दूर किये जाते हैं। यद्यपि यह निर्देशांक बड़ा महत्वपूर्ण समझा जाता

है, फिर भी इसमें अनेक त्रुटियाँ पाई जाती हैं जैसे, चीनी, चमड़ा चाय, आदि अनेक उद्योगों के समंक इसमें सम्मिलित ही नहीं किये जाते जिनका राष्ट्र के औद्योगीकरण में इतना महत्व है। साथ ही यह निर्देशांक ग्रामीण आर्थिक क्रियाओं पर प्रकाश डालने में असमर्थ है।

(ख) औद्योगिक उत्पादन का निर्देशांक (Index of Industrial Production)—औद्योगिक उत्पादन के निर्देशांकों का निर्माण एवं प्रकाशन वाणिज्य एवं उपभोक्ता-उद्योग के मंत्रणालय की ओर से १९४७ से किया जा रहा है। इसमें २० प्रमुख उद्योगों के समंक काम में लाये जाते हैं जिनका संकलन Monthly Statistics of Production of Selected Industries in India नामक पत्रिका से किया जाता है। इस निर्देशांक का आधार वर्ष १९४६ है। यह भी एक भारांकित निर्देशांक है जिसमें भारों का निर्धारण करने के लिये उद्योगों द्वारा की जानें वाली उत्पादन में वृद्धि के मूल्य के अनुपात को लिया जाता है। उद्योगों का वर्गीकरण निर्माण संगणना (Census of Manufactures) के आधार पर होता है।

(ग) औद्योगिक उत्पादन का ईस्टर्न इकनॉमिस्ट' निर्देशांक ('Eastern Economist' Index of Industrial Production)—भारत की 'ईस्टर्न इकनॉमिस्ट' नामक साप्ताहिक पत्रिका अगस्त १९४८ से प्रति मास औद्योगिक उत्पादन के निर्देशांकों का प्रकाशन कर रही है। इस निर्देशांक का आधार वर्ष 'अगस्त १९३९ में समाप्त होने वाला वर्ष है। उद्योगों का वर्गीकरण तथा उनके भारों का क्रम इस प्रकार है—(१) भारतीय वस्त्र उद्योग—४०, (२) जूट निर्माण—१७, (३) ईंधन व शक्ति—१०, (४) इस्पात—८, (५) कच्चा लोहा—७, (६) कागज—१, (७) दियासलाई—२, (८) रंग—१, (९) तेजाब—१, (१०) सीमेंट—३, तथा (११) चीनी—१०। इस निर्देशांक की रचना में भी भारांकित गुणोत्तर मध्यक का उपयोग किया जाता है। मासिक निर्देशांकों की सहायता से 'अप्रेल से मार्च' तक के आर्थिक-वर्ष के वार्षिक निर्देशांक भी तैयार किये जाते हैं।

(घ) औद्योगिक लाभ का निर्देशांक (Index Number of Industrial Profits)—औद्योगिक लाभ के निर्देशांकों को निर्मित करने का श्रेय वित्त मंत्रणालय के प्रमण्डल अधिनियम प्रबन्ध विभाग (Department of Company Law and Administration) को है। इसमें सूती वस्त्र,

लोहा व इस्पात, जूट, सीमेंट, कागज, चीनी, चाय व कोयले के इक ८ प्रमुख उद्योगों में लगी हुई केवल कुछ कम्पनियों के लाभों को ही लिया जाता है। यह निर्देशांक शृंखला आधार (Chain Base) पर बनाया जाता है।

व्यापार समंक (Trade Statistics)

भारत के व्यापारिक समंक अन्य समंकों की अपेक्षा अधिक विश्वसनीय व पूर्ण हैं क्योंकि इनका संकलन विविध राजनैतिक कार्यों के फलस्वरूप होता रहता है। उदाहरण के लिये व्यापार सम्बन्धी अनेक समंक सरकार के उत्पादन-कर विभाग (Excise Department), रेलवे विभाग (Railway Department), बिक्री-कर कार्यालय (Sales Tax Office) द्वारा प्राप्त किये जा सकते हैं। इन समंकों का वर्गीकरण एवं प्रकाशन भारत सरकार के व्यावसायिक ज्ञान एवं समंक विभाग (Department of Commercial Intelligence and Statistics) की ओर से किया जाता है। ये समंक निम्न पत्र-पत्रिकाओं में प्रकाशित किये जाते हैं :—

(१) Accounts Relating to the Foreign (Sea, Air and Land) Trade and Navigation of India—विदेशी व्यापार के समंकों का यथोचित रूप से प्रकाशन करने वाली भारत की यह एक श्रेष्ठ मासिक पत्रिका है। कुछ वर्ष पूर्व सामुद्रिक व वायु व्यापार के समंकों का प्रकाशन Accounts Relating to the Foreign Sea and Air Borne Trade and Navigation of India तथा स्थल व्यापार के समंकों का प्रकाशन Accounts Relating to the Trade of India with Foreign countries में होता था, किन्तु अप्रेल १९५२ से इन दोनों प्रकाशनों के समंकों को उपर्युक्त प्रकाशन में शामिल कर दिया जाता है। इसमें कुछ देशों के व्यापार से सम्बन्धित समंकों का समावेश नहीं किया जाता, जैसे नेपाल, तिब्बत, सिक्कम, भूटान, आदि। इन देशों के समंक हमें Journal of Industry and Trade तथा Indian Trade Journal में उपलब्ध होते हैं। समंकों का संकलन विदेशी व्यापार में प्रयुक्त होने वाले 'बिल ऑफ एंट्री' (Bill of Entry) तथा 'शिपिंग बिल' (Shipping Bill) नामक प्रपत्रों की सहायता से किया जाता है। विदेशी व्यापार की समस्त वस्तुओं को पाँच प्रमुख भागों में बाँटा जाता है—(क) भोजन,शराब तथा तम्बाकू, (ख) कच्चा माल तथा वे वस्तुयें जिनका निर्माण

अभी नहीं किया गया है, (ग) वे वस्तुयें जिनका पूर्णतः या अंशतः निर्माण किया जा चुका है, (घ) जीवित पशु, तथा (ङ) डाक की वस्तुयें। पत्रिका में इन वस्तुओं के लेखे तीन शीर्षकों के अन्तर्गत प्रकाशित किये जाते हैं—(अ) भारत का सामुद्रिक व वायु द्वारा विदेशी व्यापार, (ब) जलयान सम्बन्धी समंक तथा (स) भारत का पाकिस्तान, अफ़गानिस्तान, ईरान तथा बर्मा से स्थलीय व्यापार। यह पत्रिका दो खण्डों में प्रकाशित होती है।

(२) Annual Statement of Foreign Sea Bourne Trade of India—व्यावसायिक ज्ञान व समंक विभाग की ओर से दो खण्डों में प्रकाशित की जाने वाली यह वार्षिक पत्रिका है जिसमें अधिकतर उपर्युक्त पत्रिका के समंकों का संकलन रहता है।

(३) Statistics of Foreign Sea Bourne Trade of India by Countries and Currency Areas—यह एक मासिक पत्रिका है जिसमें यह प्रकाशित किया जाता है कि विभिन्न प्रकार की मुद्रा (Hard Currency, Medium Currency and Soft Currency) वाले देशों के साथ भारत के विदेशी व्यापार की क्या स्थिति है।

(४) Accounts Relating to Coastal Trade and Navigation of India—यह भी एक मासिक पत्रिका है जिसमें भारत के तटीय व्यापार एवं उसमें लगे हुये जलयानों की संख्या सम्बन्धी समंकों का प्रकाशन किया जाता है।

(५) Annual Foreign Trade Statistics—इस वार्षिक पत्रिका में जिसका प्रकाशन दो खण्डों में होता है, भारत के विदेशी व्यापार के मूल्य, परिमाण तथा उसके रुख का उल्लेख रहता है।

(६) Review of Trade—इसका प्रकाशन अब भारत के आर्थिक सलाहकार के कार्यालय से किया जाता है। इसके पूर्व यह व्यावसायिक ज्ञान व समंक विभाग से ही प्रकाशित होने वाली वार्षिक पत्रिका थी। इसमें भारत के देशी व विदेशी सभी व्यापारों से सम्बन्धित समंक पाये जाते हैं।

(७) Indian Trade Journal—व्यावसायिक ज्ञान एवं समंक विभाग की ओर से प्रकाशित की जाने वाली यह साप्ताहिक पत्रिका है जिसमें आयात, निर्यात, आदि से सम्बन्धित साप्ताहिक समंकों का प्रकाशन किया जाता है।

(८) Accounts Relating to the Inland (Rail and River Borne) Trade of India—यह पत्रिका त्रैमासिक (पहले मासिक थी) है जिसमें भारत के रेल व नदियों द्वारा होने वाले देशी व्यापार सम्बन्धी समंक उपलब्ध हैं। समस्त वस्तुओं को लगभग ३६ वर्गों में विभक्त करके उनके व्यापार के मूल्य व परिमाण प्रकाशित किये जाते हैं। साथ ही समंक-प्रकाशन की सुविधा के लिए देश को कई कक्षों (Blocks) में विभक्त किया गया है। साधारणतः प्रत्येक राज्य व बन्दरगाहों को को एक कक्ष माना गया है। इसमें स्टीमर द्वारा होने वाले व्यापार के समंक भी दिखलाये जाते हैं।

(९) Statistical Abstract of India—इस वार्षिक पत्रिका में देशी व्यापार, विदेशी व्यापार, तटीय व्यापार, सीमाप्रान्तीय व्यापार, आदि सभी प्रकार के समंकों का प्रकाशन किया जाता है। इस पत्रिका का प्रकाशन १९४२-४३ तक व्यावसायिक ज्ञान एवं समंक विभाग की ओर से किया जाता था। इसके पश्चात् इसका भार भारत के आर्थिक सलाहकार ने उठाया। अब १९४१ से इसका प्रकाशन केन्द्रीय सांख्यिकीय संघठन (C. S. O.) की ओर से किया जा रहा है।

भारत के व्यापार की गति-विधि के अध्ययनार्थ व्यावसायिक ज्ञान व समंक विभाग तथा रिजर्व बैंक ऑफ इंडिया की ओर से निर्देशांकों की भी रचना की जाती है। इन दोनों निर्देशांकों का आधार वर्ष १९४८-४९ है।

भारत की राष्ट्रीय आय (National Income of India)

किसी भी देश की आर्थिक दशा का दिग्दर्शन उसकी आर्थिक आय द्वारा किया जा सकता है। इससे देश में आय व धन के वितरण को ज्ञात करने के साथ ही विभिन्न वर्गों के व्यक्तियों के व्यय एवं उनके जीवन-स्तर का भी अनुमान लगाया जा सकता है। राष्ट्रीय आय के ही आधार पर सरकार अपनी सफल कर-नीतियों का निर्धारण कर सकती है तथा आय-व्ययक (Budget) के अनुमानों में शुद्धता ला सकती है। इसके अतिरिक्त राष्ट्रीय आय को ध्यान में रखते हुए व्यापारी, उद्योगपति एवं विनियोगकर्ता अपने उत्पादन व लाभ पर लगने वाले करों का अनुमान भी लगा सकते हैं। यही कारण है जिसकी वजह से राष्ट्रीय आय की गणना संसार के सभी बड़े देशों में की जाती है।

किन्तु राष्ट्रीय आय की कोई सर्वमान्य परिभाषा बतलाना एक अत्यन्त ही कठिन कार्य है। साधारणतः राष्ट्रीय आय किसी वर्ष में उपभोग अथवा उत्पादन की जाने वाली समस्त वस्तुओं व सेवाओं का कुल मूल्य है। किन्तु अनेक वस्तुएँ एक व्यापारी के पास से दूसरे व्यापारी के पास हस्तांतरित होती रहती हैं जिससे एक ही वस्तु की गणना अनेक स्थलों पर हो सकती है। अतः राष्ट्रीय आय की गणना करते समय इस बात का ध्यान रखना आवश्यक होता है कि किसी वस्तु अथवा सेवा का मूल्य एक बार से अधिक सम्मिलित न हो जाय। किन्तु इसकी जाँच करना साधारण कार्य नहीं है। बाउले-रॉबर्टसन कमेटी के अनुसार राष्ट्रीय आय किसी देश के निवासियों को किसी वर्ष-विशेष में प्राप्त होने वाली वस्तुओं व सेवाओं की वह मौद्रिक माप है जिसमें उनकी व्यक्तिगत अथवा सामूहिक सम्पत्ति में होने वाली शुद्ध वृद्धि का तो समावेश किया जा सकता है, किन्तु शुद्ध ह्रास का परित्याग करना आवश्यक होगा।* अतः राष्ट्रीय आय की गणना करने के लिये उत्पत्ति के सभी साधनों की आय का योगफल निकालना पड़ता है। किन्तु यह आय वर्तमान मूल्यों के आधार पर ली जाने वाली वास्तविक आय (Real Incomes) होनी चाहिये।

राष्ट्रीय आय ज्ञात करने की तीन प्रमुख रीतियाँ हैं :—

(क) आय संगणना रीति (Census of Income Method)—इस रीति से राष्ट्रीय आय की गणना करने के लिये देश में निवास करने वाले सभी व्यक्तियों की वार्षिक आय का योग निकालना पड़ता है। किन्तु अब यह प्रश्न उठता है कि व्यक्तियों की वास्तविक अथवा शुद्ध आय (Real or Net Income) की गणना किस प्रकार की जाय क्योंकि जो आप श्रमिकों (मज़दूरी), भूमिपतियों (लगान), पूँजीपतियों (ब्याज) तथा उद्योगपतियों (लाभ) को प्राप्त होती है वह कुल आय (Gross Income) होती है। इसके लिये उनकी कुल आय में से अतिरिक्त आय को घटा देना चाहिये। ये समंक आय-कर समंक, मज़दूरी समंक, लाभ समंक, आदि के आधार पर एकत्र किये जा सकते हैं।

---

*The national income is the money measure of the aggregate of goods and services accruing to the inhabitants of a country during a year, including net increments to or excluding net decrements from their individual or collective wealth—**Bowley-Robertson Committee Report**

(ख) उत्पादन संगणना रीति (Census of Production Method or Inventory Method)—इस रीति से राष्ट्रीय आय की गणना करने के लिये कृषि, उद्योग, व्यापार, खान, आदि सभी उत्पादन क्रियाओं व सेवाओं द्वारा होने वाली आय का योग फल निकालना पड़ता है। किन्तु इस योग में से उत्पादन-व्यय व ह्रास (Depreciation) को निकाल देना आवश्यक होगा। उत्पादन संगणना रीति से राष्ट्रीय आय निकालने के लिये कृषि, औद्योगिक व व्यापार समंकों की सहायता ली जा सकती है।

(ग) व्यय रीति (Expenditure Method)—व्यय रीति द्वारा भी राष्ट्रीय आय को ज्ञात किया जा सकता है। वस्तुतः व्यक्तियों की जो भी आय होती है उसका व्यय या तो उपभोग की वस्तुओं (Consumption Goods) पर होता है या विनियोग की वस्तुओं (Investment Goods) पर। अतः यदि हम इन दोनों श्रेणियों की वस्तुओं पर होने वाले व्ययों का योग कर कर लें, तो वह योग लगभग राष्ट्रीय आय के बराबर होगा। इस विषय से सम्बन्धित समंक आय-व्ययकों की जाँच (Family Budget Enquiry) द्वारा प्राप्त किये जा सकते हैं।

भारत में राष्ट्रीय आय की गणना सर्वप्रथम दादा भाई नौरोजी ने १८६७-६८ में की थी। उनकी गणना के अनुसार भारतीयों की प्रति व्यक्ति आय २० रुपये प्रति वर्ष थी। तब से राष्ट्रीय आय की अनेक गणनायें अपने देश में की गईं जिनके फल ये थे—बेरिंग तथा बेयरबोर्न (१८८१)—२७ रुपये, लॉर्ड कर्जन (१८९७–९८)—३० रुपये, डिगबाई (१८९८–९९)—१७.५ रुपये, बी० एन० शर्मा (१९११)—५० रुपये, वकील तथा मुरंजन (१९१०–१४)—५८.५ रुपये, वाडिया तथा जोशी (१९१३–१४)—४४.५ रुपये, शाह तथा खम्बत्ता (१९२१)—७४ रुपये, फिंडले शिराज (१९२१)—१०७ रुपये, डा० वी० के० आर० वी० राव (१९३१–३२)—६५ रुपये तथा (१९४२–४३)—११४ रुपये।

भारत की राष्ट्रीय आय को ज्ञात करने के लिए उपरोक्त विद्वानों ने जो आर्थिक अनुसंधान किये उन्हें अनेक क्षेत्रों में केवल अनुमान का ही सहारा लेना पड़ा क्योंकि उन क्षेत्रों में या तो समंक उपलब्ध ही नहीं थे या जो थे भी वे अपूर्ण, असंतोषजनक व त्रुटिपूर्ण थे। विभिन्न वस्तुओं व सेवाओं के मूल्य विभिन्न तिथियों पर एकत्र किये जाते हैं, अतः उन्हें एक तिथि पर

लाने के लिये भी उनमें अनेक समायोजनायें (Adjustments) करने की आवश्यकता पड़ी। फिर इनकी गणन-क्रिया में भी अनेक अन्तर थे। उदाहरण के लिए शाह व खम्बत्ता ने सारे भारतवर्ष को अपनी गणना में सम्मिलित किया किन्तु अनेक विद्वानों ने भारतीय रियासतों के समंकों को छोड़ दिया। इसी प्रकार फिंडले शिराज व डा० वी० के० आर० वी० राव ने विभिन्न सेवाओं द्वारा होने वाली आय को सम्मिलित किया लेकिन वाडिया व जोशी तथा शाह व खम्बत्ता की गणनाओं में इन आयों को स्वेच्छापूर्वक छोड़ दिया गया। इन कारणों से भी हमें भारतीय राष्ट्रीय आय में इतने अन्तर दिखलाई पड़ते हैं।

राष्ट्रीय आय समंकों के अध्ययनार्थ नवम्बर १९३३ में भारत सरकार ने डा० ए० एल० बाउले तथा डा० डी० एच० रॉबर्टसन को आमन्त्रित किया और उनसे आवश्यक सुझाव देने की प्रार्थना की। इन सांख्यिकों ने अपनी रिपोर्ट १९३४ में दी और इस बात पर दुःख प्रकट किया कि भारत में राष्ट्रीय आय के समंक अत्यन्त ही दोषयुक्त व अपर्याप्त हैं। उन्होंने ग्रामीण क्षेत्रों के लिए दैव निदर्शन (Random Sampling) व शहरी क्षेत्रों के लिये सविचार निदर्शन (Purposive Sampling) द्वारा समंक संकलन किये जाने का प्रस्ताव रक्खा। यद्यपि उनकी योजना अत्यन्त ही व्यापक व प्रशंसनीय थी फिर भी अनेक कठिनाइयों के कारण भारत सरकार उसे कार्यान्वित न कर सकी।

स्वतन्त्रता के उपरान्त भारत की प्रजातंत्र सरकार ने राष्ट्रीय आय के समंकों का महत्व समझा और १ अगस्त १९४९ को राष्ट्रीय आय जाँच कमेटी (National Income Enquiry Committee) की स्थापना की जिसके अध्यक्ष प्रो० पी० सी० महलानोबिस थे। इस कमेटी के अन्य सदस्य डा० वी० के० आर० वी० राव तथा डा० डी० आर० गाडगिल थे। इस कमेटी के मुख्य कार्य थे—(अ) राष्ट्रीय आय व उससे सम्बन्धित अनुमानों की रिपोर्ट तैयार करना, (ब) आवश्यक समंकों का संकलन तथा उपलब्ध समंकों में सुधार करने के लिए प्रस्ताव देना, तथा (स) राष्ट्रीय आय सम्बन्धी अनुसंधानों को प्रोत्साहन देने के लिए सरकार को आवश्य सुझाव देना। इस कमेटी ने अपनी प्रथम रिपोर्ट १५ अप्रेल १९५१ तथा द्वितीय रिपोर्ट १४ फ़रवरी १९५४ को भारत सरकार के समक्ष प्रस्तुत की। कमेटी ने राष्ट्रीय

आय सम्बन्धी अनुसंधान करने के लिये आय संगणना रीति (Census of Income Method) तथा उत्पादन संगणना रीति (Census of Production Method) दोनों का प्रयोग किया क्योंकि सदस्यों का अनुमान था कि उपयुक्त समंकों के अभाव में किसी एक रीति का प्रयोग करना हानिप्रद होगा। अतः प्रथम रीति का प्रयोग व्यापार, आवागमन के साधन, तथा विभिन्न सेवाओं की आय की माप करने के लिये व द्वितीय रीति का प्रयोग कृषि, वन, मत्स्य, उद्योग, खनन, आदि से होने वाली आय की माप करने के लिये किया। इसी रीति का नाम कमेटी ने तत्व व्यय रीति (Factor Cost Method) रक्खा है। इस कमेटी द्वारा राष्ट्रीय आय का जो अनुमान किया गया है वह वस्तुतः विभिन्न साधनों की आय का योग है जिसमें अन्य देशों की आय का समायोजन किया गया है।

इस प्रकार राष्ट्रीय आय कमेटी तथा केन्द्रीय सांख्यिकीय संघठन के अनुमानों के आधार पर भारत की राष्ट्रीय आय व प्रति व्यक्ति आय (वर्तमान मूल्यों के आधार पर) निम्नलिखित है :—

वर्ष		राष्ट्रीय आय करोड़ रुपये	प्रति व्यक्ति आय रु०
१९४८—४९	...	८,६५०	२४६. ९
१९४९—५०	...	९,०००	२५३. ९
१९५०—५१	...	९,५३०	२६५. २
१९५१—५२	...	९,९७०	२७४. ०
१९५२—५३	...	९,८२०	२६६. ४
१९५३—५४	...	१०,४८०	२८०. ७
१९५४—५५	...	९,६०२	२५४. ४
१९५५—५६	...	९,६०५	२५२. ०

भारत की राष्ट्रीय आय का शुद्ध अनुमान करना अत्यन्त ही कठिन है क्योंकि यहाँ आय सम्बन्धी समंक पूर्णतया अपूर्ण, दोषयुक्त व अशुद्ध हैं। देश में अदल-वदल प्रणाली (Barter System) पाई जाने के कारण अनेक वस्तुओं से सम्वन्धित समंक एकत्र ही नहीं हो पाते। इसके अतिरिक्त व्यवसायों के वर्गीकरण में विभिन्नता होने कारण भी अनेक व्यवसायों की आय या तो कई बार सम्मिलित हो जाती है या बिल्कुल ही छूट जाती है।

फिर भारतीय जनता अपनी अशिक्षा, उदासीनता एवं लापरवाही के कारण भी राष्ट्रीय आय-समंकों के संकलन में सहयोग नहीं दे पाती। इन समंकों में सुधार करने के लिये राष्ट्रीय आय कमेटी ने जो सुझाव दिये हैं वे प्रशंसनीय हैं। साथ ही इस बात की अत्यन्त आवश्यकता है कि देश की समस्त सांख्यिकीय संस्थायें राष्ट्रीय आय के समंकों के संकलन, समन्वय तथा विश्लेषण में पूर्ण सहयोग दें।

भारतीय न्यादर्श अनुसंधान (National Sample Survey)

स्वतन्त्रता के उपरान्त समंकों के परिमाण (Quantity) व गुण (Quality) में वृद्धि लाने के विचार से भारत सरकार ने प्रो० पी० सी० महलानोबिस की अध्यक्षता में राष्ट्रीय न्यादर्श अनुसंधान (NSS) की एक योजना जनवरी १९५० से प्रारम्भ की है। इसका प्रवन्ध करने के लिये वित्त मंत्रणालय में एक 'डाइरेक्टरेट ऑफ नेशनल सैम्पुल सर्वे' (Directorate of National Sample Survey) की स्थापना भी हुई है। इस अनुसंधान का मुख्य उद्देश्य आर्थिक व सामाजिक समंकों का दैव निदर्शन रीति द्वारा संकलन तथा विश्लेषण करना है। इस कार्य का उत्तरदायित्व कलकत्ता के 'इंडियन स्टैटिस्टिकल इंस्टीटयूट' (Indian Statistical Institute) तथा पूना के 'गोखले इंस्टीटयूट ऑफ पॉलिटिक्स ऐंड इकनामिक्स' (Gokhale Institute of Politics and Economics) को दिया गया है। राष्ट्रीय न्यादर्श अनुसंधान को प्रस्तावित करने का वास्तविक श्रेय बाउले-रॉबर्टन कमेटी को है।

राष्ट्रीय न्यादर्श अनुसंधान का प्रथम चक्र अक्टूबर १९५० में प्रारम्भ हुआ। १९५६ के अन्त तक इसके दस चक्र पूर्ण हो चुके थे। अनुसंधान के लिये देश को २५० भौगोलिक स्तरों में बाँटा गया है जिसमें से करीब १००० गाँव दैव निदर्शन प्रणाली से चुने गये हैं। इसके प्रथम तीन चक्रों में तो गाँवों का चुनाव प्रत्यक्ष रूप से ही कर लिया गया था किन्तु उसके बाद से प्रत्येक स्तर में से दो तहसीलों को दैव निदर्शन रीति से चुन कर उनमें से फिर दो गाँवों को चुना जाता है। तीसरे चक्र से ही शहरी क्षेत्रों के अनुसंधान भी होने लगे हैं। अब तक जो अनुसंधान हुये हैं उनसे अपने देश की ग्रामीण व्यवस्था के विषय में अनेक महत्वपूर्ण सूचनायें प्राप्त हुई हैं। इसी के अन्तर्गत केन्द्रीय मंत्रणालयों की सहायता से सूचना, संचार, बेकारी, स्वास्थ्य, गृह-समस्या

पारिवारिक उपभोग व्यय, आदि विषयों से सम्बन्धित अनेक जाँचें भी की गई हैं। अब तक सभी समंकों का संकलन वार्तालाप रीति (Interview Method) से ही किया गया है।

राष्ट्रीय आय अनुसंधान वास्तव में आर्थिक व सामाजिक अनुसंधानों की एक श्रृंखला है। भारत में समंक-संकलन की विविध कठिनाइयों को ध्यान में रखते हुये हम निःसंकोच कह सकते हैं कि इसका कार्य अत्यन्त ही प्रशंसनीय है।

प्रश्न

1. Comment on the availability and accuracy of agricultural statistics in India. Along what lines would you like these statistics to be improved?

भारत में कृषि-समंकों की प्राप्ति व शुद्धता की समीक्षा कीजिये। इन समंकों में सुधार करने के लिये आप क्या मार्ग अपनाना पसंद करेंगे?

(बी० कॉम०, आगरा, १९५६)

2. Give a brief account of the activities of the Central Government in connection with the collection of statistical data during the last eight years.

पिछले आठ वर्षों में सांख्यिकीय समंकों के संकलन के सम्बन्ध में केन्द्रीय सरकार नें जो कार्य किये हैं उनका संक्षेप में वर्णन कीजिये।

(एम० कॉम, आगरा, १९५७)

3. Write critical note on the 1951 census of population.

१९५१ की जनगणना पर एक समीक्षात्मक टिप्पणी लिखिये।

(बी० कॉम० इलाहाबाद, १९५२)

4. Give a critical appraisal of Indian Official Statistics and point out the steps which have been taken in recent years to remove their short-comings.

भारतीय सरकारी समंकों का समीक्षात्मक ढंग से वर्णन करते हुये बतलाइये कि वर्तमान वर्षों में उनके दोषों को दूर करने के लिये क्या प्रयास किये गये हैं।

(एम० कॉम, आगरा, १९५७)

5. Examine critically the Population Statistics in India. What improvements would you suggest for the 1961 Census?

भारत के जनसंख्या सम्बन्धी समंकों की आलोचना कीजिये। १९६१ की जनगणना में आप क्या सुधार करना चाहेंगे?

(एम० ए०, आगरा, १९५७)

6. Explain the importance of Price Statistics and examine the data available in India at the present time regarding the movement of prices.

मूल्य-समंकों के महत्व का वर्णन कीजिये तथा भारत में मूल्यों की गति से सम्वन्धित वर्तमान समय में पाये जाने वाले समंकों पर विचार कीजिये।

(बी० कॉम०, बनारस, १९५८)

7. What type of statistical data are available with regard to the foreign trade of India? Describe the method of their collection and the extent of their accuracy.

भारत में विदेशी व्यापार से सम्बन्धित किस प्रकार के समंक पाये जाते हैं? उनके संकलन की रीतियों तथा उनकी शुद्धता का वर्णन कीजिये।

(बी० कॉम०, बनारस, १९५७)

8. Describe the method followed in the construction of the Economic Adviser's Index Number of Wholesale Prices in India.

भारत के आर्थिक सलाहकार के थोक-मूल्य निर्देशांक की रचना के लिये जिस रीति का अनुसरण किया जाता है उसक वर्णन कीजिये।

(बी० कॉम० बनारस, १९५६)

9. Write a short essay on 'Industrial Statistics in India'.

'भारत के औद्योगिक समंक' पर एक संक्षिप्त निबन्ध लिखिये ।

(बी० कॉम०, बनारस, १९५५)

10. What is the method current in India of collecting agricultural statistics of area and yield? Express your opinion about the accuracy of the method employed.

भारत में कृषि-क्षेत्रफल व उपज के समंकों को एकत्र करने की क्या रीति प्रचलित है? इस रीति की शुद्धता के विषय में अपने विचार दीजिये ।

(बी० कॉम०, लखनऊ, १९५३)

11. 'Planning without statistics is a ship without rudder and compass'. In the light of this statement, explain the importance of statistics as an effective aid to to national planning in India.

'समंकों के अभाव में आर्थिक-नियोजन पतवार एवं दिशा-सूचक यंत्र रहित जलयान के समान है । इस कथन के प्रकाश में भारतीय राष्ट्रीय-नियोजन में समंकों की प्रभावपूर्ण सहायता के महत्व का वर्णन कीजिये ।

(बी० कॉम०, बनारस, १९५८)

12. Write an essay on 'National Sample Survey in India'.

'भारत में राष्ट्रीय न्यादर्श अनुसंधान' पर एक संक्षिप्त निबन्ध लिखिये ।

परिशिष्ट
(APPENDICES)

परिशिष्ट (अ)

गणितीय तालिकायें (Mathematical Tables)

इस परिशिष्ट में लघुगणक (Logarithms), प्रतिलघुगणक (Antilogarithms) तथा व्युत्क्रम (Reciprocals) की तालिकायें दी जा रही हैं। इनके प्रयोग की रीतियाँ निम्नलिखित हैं :—

लघुगणक (Logarithms)

किसी संख्या का लघुगणक 10 का वह घात (Power) है जिससे 10 उस संख्या के बराबर हो जाता है। जैसे—

$1000=10^3, \quad \therefore \log 1000=3$

$100=10^2, \quad \therefore \log 100=2$

$10=10^1, \quad \therefore \log 10=1$

इस प्रकार हम 1,00,000, 10,000, आदि संख्याओं के लघुगणक बड़ी सरलता से ज्ञात कर सकते हैं। किन्तु सभी संख्यायें इनके समान ही नहीं होतीं। अतः 525, 4,230, 62.5, 9.2, आदि संख्याओं का लघुगणक निकालने के लिये हमें लघुगणक तालिकाओं की सहायता लेनी पड़ती है।

किसी संख्या के लघुगणक के दो भाग होते हैं—(अ) पूर्णांश (Characteristics) तथा (ब) दशमलवांश (Mantissa)। पूर्णांश ज्ञात करने के लियें हमें लघुगणक तालिका की सहायता लेना आवश्यक नहीं होता। केवल दशमलवांश को ही इसके द्वारा जाना जा सकता है।

(अ) पूर्णांश (Characteristics)—यदि हम ऊपर दिये गये उदाहरणों का निरीक्षण करें तो हमें ज्ञात होगा कि जब संख्या में 4 अंक (Digits) हैं तो उस संख्या का लघुगणक 3 है और जब 3 अंक हैं तो 2। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि किसी संख्या के लघुगणक का पूर्णांश उस संख्या के कुल अंकों से एक कम $(n-1)$ होता है। अतः उदाहरण के लिये 525 का पूर्णांश $(3-1)=2$, 4,230 का $(4-1)=3$, 62.5 का $(2-1)=1$ तथा 9.2 का $(1-1)=0$ होगा। किन्तु जो संख्यायें 1 से कम होती हैं

उनका पूर्णांश निकालने की दूसरी रीति है। इसके लिये सूत्र (ङ+1) का प्रयोग करना पड़ता है जिसमें ङ दशमलव विन्दु के उपरान्त आने वाले शून्यों (Zeroes) की संख्या है। साथ ही इस बात का भी ध्यान रखना चाहिये कि ऐसी संख्याओं के पूर्णांश सर्वदा ऋणात्मक (Negative) होते हैं, अत: उनके ऊपर की ओर ऋण का चिन्ह (Bar) लगा दिया जाता है। उदाहरण के लिये 0. 725 का पूर्णांश (No Zero+1)=$\bar{1}$, 0. 0514 का (1 Zero+1)=$\bar{2}$, तथा 0. 0004 का (3 Zeroes+1)=$\bar{4}$।

(ब) **दशमलवांश (Mantissa)**—किसी संख्या के दशमलवांश लघुगणक तालिकाओं द्वारा इस प्रकार निकाले जाते हैं—

(१) जिस संख्या का दशमलवांश ज्ञात करना हो उसे पहले तीन अंक तक सन्निकट (Approximation upto 3 places) कर लीजिये;

(२) इसके पश्चात् सन्निकट संख्या की बाईं ओर के दो अंकों को तालिका के प्रथम कॉलम (ऊपर से नीचे की ओर) में तथा तीसरे को ऊपर के शीर्षस्थ कॉलम (बाईं ओर से दाहिनी ओर) में खोजिये। अब यदि दोनों अंकों को लेकर तालिका में बाईं ओर से दाहिनी ओर को तथा तीसरे को लेकर ऊपर से नीचे की ओर चला जाय, तो दोनों के कटान-स्थल पर मुद्रित अंक उस संख्या के दशमलवांश होंगे। अत: 525 का दशमलवांश 0. 7202, 4,230 का 0. 6263, 9. 2 (कल्पना कीजिये कि तीसरा अंक शून्य है) का 0. 9638, तथा 0. 0514 (केवल 514 को ही लीजिये) का 0. 7110 होगा।

(३) यदि तालिका में दिये गये मध्यक अन्तरों (Mean Differences) का भी उपयोग करना है तो दी हुई संख्या को चार अंकों तक सन्निकट कीजिये। तत्पश्चात उसमें से बाईं ओर के प्रथम तीन अंकों को लेकर उसका दशमलवांश उपर्युक्त नियम के अनुसार निकालिये। अब मध्यक अन्तरों के कॉलम में चौथे अंक के नीचे की ओर चल कर तीन अंकों के आधार पर निकाले गये दशमलवांश के समक्ष के अंक को ज्ञात कर के उसमें जोड़ दीजिये। उदाहरण के लिये 4235 का दशमलवांश 6263+5=6268, अर्थात् 0. 6268 होगा। सांख्यिकी में मध्यक अन्तरों को ध्यान में रखते हुये दशमलवांश निकालना आवश्यक नहीं होता। स्मरण रहे कि दशमलवांश

३६

सर्वदा धनात्मक (Positive) होता है। यही कारण है जिसकी वजह से ऋणात्मक पूर्णांश लिखते समय उसके ऊपर की ओर ऋण का चिन्ह लगाया जाता है।

निम्न उदाहरणों से किसी संख्या का लघुगणक निकालने की क्रिया स्पष्ट हो जायगी :—

Number	*log*	Number	*log*
2	0.3010*	0.5481	$\bar{1}.7388$
51	1.7076*	0.0520	$\bar{2}.7160$
399	2.6010	0.0090	$\bar{3}.9542$†
73188	4.8645†	0.0006	$\bar{4}.7782$†

विशेष—लघुगणक निकालने के लिये मध्यक अन्तरों का उपयोग नहीं किया गया।

प्रतिलघुगणक (Antilogarithms)

किसी संख्या का प्रति लघुगणक वस्तुतः वह संख्या है जिसका लघुगणक हमारी प्रस्तुत संख्या है। उदाहरण के लिये 100 का लघुगणक 2 और 2 का प्रतिलघुगणक 100 है। प्रतिलघुगणकों की गणना करने के लिये प्रति-लघुगणक तालिकाओं की सहायता ली जाती है। परन्तु इसके लिये हमें केवल संख्या के दशमलवांश पर ही विचार करना रहता है। जिस प्रकार संख्या की बाईं ओर के तीन अंकों को लेकर लघुगणक तालिका में दशमलवांश देखे जाते हैं उसी प्रकार की क्रिया केवल दशमलवांश के प्रथम तीन अंक लेकर यहाँ भी की जाती है। उपलब्ध संख्या में दशमलव विन्दु कहाँ रखा जायगा इसे ज्ञात करने के लिये पूर्णांश निकालने वाले सूत्र के विपरीत चलना आवश्यक होगा। प्रतिलघुगणक निकालने के कुछ उदाहरण नीचे दिये जा रहे हैं :—

*कल्पना कीजिये कि संख्या की दाहिनी ओर शून्य हैं;

†संख्या को तीन अंक तक सन्निकट करने पर 731 के स्थान पर 732 लेना उचित होगा।

Number	*Antilog*	Number	*Antilog*
0.4250	2.661	4.2529	17910.0
1.3333	21.530	$\bar{2}.8350$	0.06839

प्रतिलघुगणकों में दशमलव विन्दु का स्थान निरूपण करने के लिये इस प्रकार भी सोचा जा सकता है—प्रथम स्थिति में संख्या का पूर्णांश 0 है, इसका तात्पर्य यह हुआ कि दी हुई संख्या में एक अंक के बाद दशमलव विन्दु रहा होगा, अन्तिम स्थिति में पूर्णांश $\bar{2}$ है, इसका तात्पर्य यह हुआ कि संख्या में दशमलव के वाद एक शून्य रहा होगा, आदि।

लघुगणकों के उपयोग (Uses of Logarithms)

लघुगणकों की सहायता से गणितीय क्रियाओं को अति सुगम वनाया जा सकता है। इस पुस्तक में गुणोत्तर मध्यक (Geometric Mean), सहसम्बन्ध (Correlation), आदि की गणना करने के लिये इनका उपयोग किया गया है। इनकी सहायता से गुणा, भाग व वर्गमूल निकालने के ये ढंग हैं :—

(*a*) Multiply 3,482 by 238

$$
\begin{aligned}
3{,}482\times 238 &= Antilog\ (log\ 3482+log\ 238)\\
&= Antilog\ (3.5416+2.3766)\\
&= Antilog\ 5.9182\\
&= 827900\ \text{(approximately)}
\end{aligned}
$$

(*b*) Divide 6,284 by 1,250

$$
\begin{aligned}
6{,}284\div 1250 &= Antilog\ (log\ 6284-log\ 1250)\\
&= Antilog\ (3.7980-3.0969)\\
&= Antilog\ 0.7011\\
&= 5.023\ \text{(approximately)}
\end{aligned}
$$

(*c*) Simplify :— $\frac{24.8\times 132.1}{16.5}$

$$
\begin{aligned}
\frac{24.8\times 132.1}{16.5} &= Antilog\ \{(log\ 24.8+log\ 132.1)-log\ 16.5\}\\
&= Antilog\ \{(1.3945+2.1206)-1.2175\}
\end{aligned}
$$

$= Antilog\ (3.5151 - 1.2175)$
$= Antilog\ 2.2976$
$= 198.6$ (approximately)

(*d*) Find out $\sqrt{5184}$

$\sqrt{5184} = Antilog\ \frac{1}{2}\ (log\ 5184)$
$= Antilog\ \frac{1}{2}\ (3.7143)$
$= Antilog\ 1.85715$
$= 71.94$ or 72

व्युत्क्रम (Reciprocals)

किसी संख्या का व्युत्क्रम 'एक' में उस संख्या से भाग देने पर प्राप्त होने वाला परिणाम है, जैसे 10 का व्युत्क्रम $\frac{1}{10}$, 5 का $\frac{1}{5}$ तथा 1 का 1 है। संख्याओं का व्युत्क्रम निकालने के लिये व्युत्क्रम तालिकाओं की सहायता ली जा सकती है। 1 को छोड़ कर इससे बड़ी सभी संख्याओं के व्युत्क्रम भिन्न (Fraction) में होते हैं, अतः किसी संख्या का व्युत्मक्र निकालने के लिये पहले दशमलव विन्दु को रखना पड़ता है। इसके पश्चात् उस संख्या में जितने अंक होते हैं उससे एक कम शून्य रक्खे जाते हैं। अब व्युत्क्रम तालिकाओं में से उसी प्रकार से संख्यायें चुनी जाती हैं जैसे लघुगणक तालिकाओं में चुनी गई थीं। इन संख्याओं को दशमलव विन्दु व शून्यों के वाद रख दिया जाता है। निम्न उदाहरणों में व्युत्क्रम निकालने की रीति वतलाई गई है :—

Number	Reciprocal	Number	Reciprocal
2	0.5000	0.5490	1 .821*
32.5	0.03077	0.0549	18. 21*
382.1	0.002618	0.00549	182. 10*

यदि तालिका में दिये गए मध्यक अन्तरों का भी उपयोग करना हो तो उसे व्युत्क्रम में से घटा देना चाहिये।

---

*इन संख्याओं के व्युत्क्रम 'एक' से अधिक हैं क्योंकि ये इकाई से कम, अर्थात् भिन्न हैं।

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170						5	9	13	17	21	26	30	34	38
						0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	16	20	24	28	32	36
11	0414	0453	0492	0531	0569						4	8	12	16	20	23	27	31	35
						0607	0645	0682	0719	0755	4	7	11	15	18	22	26	29	33
12	0792	0828	0864	0899	0934						3	7	11	14	18	21	25	28	32
						0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	20	24	27	31
13	1139	1173	1206	1239	1271						3	6	10	13	16	19	23	26	29
						1303	1335	1367	1399	1430	3	7	10	13	16	19	22	25	29
14	1461	1492	1523	1553	1584						3	6	9	12	15	19	22	25	28
						1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	14	17	20	23	26
15	1761	1790	1818	1847	1875						3	6	9	11	14	17	20	23	26
						1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	19	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148						3	6	8	11	14	16	19	22	24
						2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	10	13	16	18	21	23
17	2304	2330	2355	2380	2405						3	5	8	10	13	15	18	20	23
						2430	2455	2480	2504	2529	3	5	8	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648						2	5	7	9	12	14	17	19	21
						2672	2695	2718	2742	2765	2	4	7	9	11	14	16	18	21
19	2788	2810	2833	2856	2878						2	4	7	9	11	13	16	18	20
						2900	2923	2945	2967	2989	2	4	6	8	11	13	15	17	19
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

ANTILOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
·40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
·43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
·49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

ANTILOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
·51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
·56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
·59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
·60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
·61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
·67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
·68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
·69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
·70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
·71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
·72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
·73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
·74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
·75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
·76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
·77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
·78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
·79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
·80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
·81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
·84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
·85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
·88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
·89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
·90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
·91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
·92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
·93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
·96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
·97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
·98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
·99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

RECIPROCALS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
1·0	1·000	9901	9804	9709	9615	9524	9434	9346	9259	9174									
1·1	·9091	9009	8929	8850	8772	8696	8621	8547	8475	8403									
1·2	·8333	8264	8197	8130	8065	8000	7937	7874	7813	7752									
1·3	·7692	7634	7576	7519	7463	7407	7353	7299	7246	7194									
1·4	·7143	7092	7042	6993	6944	6897	6849	6803	6757	6711	5	10	14	19	24	29	33	38	43
1·5	·6667	6623	6579	6536	6494	6452	6410	6369	6329	6289	4	8	13	17	21	25	29	33	38
1·6	·6250	6211	6173	6135	6098	6061	6024	5988	5952	5917	4	7	11	15	18	22	26	29	33
1·7	·5882	5848	5814	5780	5747	5714	5682	5650	5618	5587	3	6	10	13	16	20	23	26	29
1·8	·5556	5525	5495	5464	5435	5405	5376	5348	5319	5291	3	6	9	12	15	17	20	23	26
1·9	·5263	5236	5208	5181	5155	5128	5102	5076	5051	5025	3	5	8	11	13	16	18	21	24
2·0	·5000	4975	4950	4926	4902	4878	4854	4831	4808	4785	2	5	7	10	12	14	17	19	21
2·1	·4762	4739	4717	4695	4673	4651	4630	4608	4587	4566	2	4	7	9	11	13	15	17	20
2·2	·4545	4525	4505	4484	4464	4444	4425	4405	4386	4367	2	4	6	8	10	12	14	16	18
2·3	·4348	4329	4310	4292	4274	4255	4237	4219	4202	4184	2	4	5	7	9	11	13	14	16
2·4	·4167	4149	4132	4115	4098	4082	4065	4049	4032	4016	2	3	5	7	8	10	12	13	15
2·5	·4000	3984	3968	3953	3937	3922	3906	3891	3876	3861	2	3	5	6	8	9	11	12	14
2·6	·3846	3831	3817	3802	3788	3774	3759	3745	3731	3717	1	3	4	6	7	8	10	11	13
2·7	·3704	3690	3676	3663	3650	3636	3623	3610	3597	3584	1	3	4	5	7	8	9	11	12
2·8	·3571	3559	3546	3534	3521	3509	3497	3484	3472	3460	1	2	4	5	6	7	9	10	11
2·9	·3448	3436	3425	3413	3401	3390	3378	3367	3356	3344	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3·0	·3333	3322	3311	3300	3289	3279	3268	3257	3247	3236	1	2	3	4	5	6	7	9	10
3·1	·3226	3215	3205	3195	3185	3175	3165	3155	3145	3135	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3·2	·3125	3115	3106	3096	3086	3077	3067	3058	3049	3040	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3·3	·3030	3021	3012	3003	2994	2985	2976	2967	2959	2950	1	2	3	4	4	5	6	7	8
3·4	·2941	2933	2924	2915	2907	2899	2890	2882	2874	2865	1	2	3	3	4	5	6	7	8
3·5	·2857	2849	2841	2833	2825	2817	2809	2801	2793	2786	1	2	2	3	4	5	6	6	7
3·6	·2778	2770	2762	2755	2747	2740	2732	2725	2717	2710	1	2	2	3	4	5	5	6	7
3·7	·2703	2695	2688	2681	2674	2667	2660	2653	2646	2639	1	1	2	3	4	4	5	6	6
3·8	·2632	2625	2618	2611	2604	2597	2591	2584	2577	2571	1	1	2	3	3	4	5	5	6
3·9	·2564	2558	2551	2545	2538	2532	2525	2519	2513	2506	1	1	2	3	3	4	4	5	6
4·0	·2500	2494	2488	2481	2475	2469	2463	2457	2451	2445	1	1	2	2	3	4	4	5	5
4·1	2439	2433	2427	2421	2415	2410	2404	2398	2392	2387	1	1	2	2	3	3	4	5	5
4·2	2381	2375	2370	2364	2358	2353	2347	2342	2336	2331	1	1	2	2	3	3	4	4	5
4·3	2326	2320	2315	2309	2304	2299	2294	2288	2283	2278	1	1	2	2	3	3	4	4	5
4·4	·2273	2268	2262	2257	2252	2247	2242	2237	2232	2227	1	1	2	2	3	3	4	4	5
4·5	·2222	2217	2212	2208	2203	2198	2193	2188	2183	2179	0	1	1	2	2	3	3	4	4
4·6	·2174	2169	2165	2160	2155	2151	2146	2141	2137	2132	0	1	1	2	2	3	3	4	4
4·7	·2128	2123	2119	2114	2110	2105	2101	2096	2092	2088	0	1	1	2	2	3	3	4	4
4·8	·2083	2079	2075	2070	2066	2062	2058	2053	2049	2045	0	1	1	2	2	3	3	3	4
4·9	·2041	2037	2033	2028	2024	2020	2016	2012	2008	2004	0	1	1	2	2	2	3	3	4
5·0	·2000	1996	1992	1988	1984	1980	1976	1972	1969	1965	0	1	1	2	2	2	3	3	4
5·1	·1961	1957	1953	1949	1946	1942	1938	1934	1931	1927	0	1	1	2	2	2	3	3	3
5·2	·1923	1919	1916	1912	1908	1905	1901	1898	1894	1890	0	1	1	1	2	2	3	3	3
5·3	·1887	1883	1880	1876	1873	1869	1866	1862	1859	1855	0	1	1	1	2	2	2	3	3
5·4	·1852	1848	1845	1842	1838	1835	1832	1828	1825	1821	0	1	1	1	2	2	2	3	3

RECIPROCALS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
5·5	·1818	1815	1812	1808	1805	1802	1799	1795	1792	1789	0	1	1	1	2	2	2	3	3
5·6	·1786	1783	1779	1776	1773	1770	1767	1764	1761	1757	0	1	1	1	2	2	2	3	3
5·7	·1754	1751	1748	1745	1742	1739	1736	1733	1730	1727	0	1	1	1	1	2	2	2	3
5·8	·1724	1721	1718	1715	1712	1709	1706	1704	1701	1698	0	1	1	1	1	2	2	2	3
5·9	·1695	1692	1689	1686	1684	1681	1678	1675	1672	1669	0	1	1	1	1	2	2	2	3
6·0	·1667	1664	1661	1658	1656	1653	1650	1647	1645	1642	0	1	1	1	1	2	2	2	3
6·1	·1639	1637	1634	1631	1629	1626	1623	1621	1618	1616	0	1	1	1	1	2	2	2	2
6·2	·1613	1610	1608	1605	1603	1600	1597	1595	1592	1590	0	1	1	1	1	2	2	2	2
6·3	·1587	1585	1582	1580	1577	1575	1572	1570	1567	1565	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6·4	·1562	1560	1558	1555	1553	1550	1548	1546	1543	1541	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6·5	·1538	1536	1534	1531	1529	1527	1524	1522	1520	1517	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6·6	·1515	1513	1511	1508	1506	1504	1502	1499	1497	1495	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6·7	·1493	1490	1488	1486	1484	1481	1479	1477	1475	1473	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6·8	·1471	1468	1466	1464	1462	1460	1458	1456	1453	1451	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6·9	·1449	1447	1445	1443	1441	1439	1437	1435	1433	1431	0	0	1	1	1	1	2	2	2
7·0	·1429	1427	1425	1422	1420	1418	1416	1414	1412	1410	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7·1	·1408	1406	1404	1403	1401	1399	1397	1395	1393	1391	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7·2	·1389	1387	1385	1383	1381	1379	1377	1376	1374	1372	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7·3	·1370	1368	1366	1364	1362	1361	1359	1357	1355	1353	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7·4	·1351	1350	1348	1346	1344	1342	1340	1339	1337	1335	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7·5	·1333	1332	1330	1328	1326	1325	1323	1321	1319	1318	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7·6	·1316	1314	1312	1311	1309	1307	1305	1304	1302	1300	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7·7	·1299	1297	1295	1294	1292	1290	1289	1287	1285	1284	0	0	0	1	1	1	1	1	1
7·8	·1282	1280	1279	1277	1276	1274	1272	1271	1269	1267	0	0	0	1	1	1	1	1	1
7·9	·1266	1264	1263	1261	1259	1258	1256	1255	1253	1252	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8·0	·1250	1248	1247	1245	1244	1242	1241	1239	1238	1236	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8·1	·1235	1233	1232	1230	1229	1227	1225	1224	1222	1221	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8·2	·1220	1218	1217	1215	1214	1212	1211	1209	1208	1206	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8·3	·1205	1203	1202	1200	1199	1198	1196	1195	1193	1192	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8·4	·1190	1189	1188	1186	1185	1183	1182	1181	1179	1178	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8·5	·1176	1175	1174	1172	1171	1170	1168	1167	1166	1164	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8·6	·1163	1161	1160	1159	1157	1156	1155	1153	1152	1151	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8·7	·1149	1148	1147	1145	1144	1143	1142	1140	1139	1138	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8·8	·1136	1135	1134	1133	1131	1130	1129	1127	1126	1125	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8·9	·1124	1122	1121	1120	1119	1117	1116	1115	1114	1112	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9·0	·1111	1110	1109	1107	1106	1105	1104	1103	1101	1100	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9·1	·1099	1098	1096	1095	1094	1093	1092	1090	1089	1088	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9·2	·1087	1086	1085	1083	1082	1081	1080	1079	1078	1076	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9·3	·1075	1074	1073	1072	1071	1070	1068	1067	1066	1065	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9·4	·1064	1063	1062	1060	1059	1058	1057	1056	1055	1054	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9·5	·1053	1052	1050	1049	1048	1047	1046	1045	1044	1043	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9·6	·1042	1041	1039	1038	1037	1036	1035	1034	1033	1032	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9·7	·1031	1030	1029	1028	1027	1026	1025	1024	1022	1021	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9·8	·1020	1019	1018	1017	1016	1015	1014	1013	1012	1011	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9·9	·1010	1009	1008	1007	1006	1005	1004	1003	1002	1001	0	0	0	0	0	1	1	1	1

परिशिष्ट (ब)

शब्द रूपान्तर (Glossory of Words)

A

Abnormal—असामान्य
Abscissa—भुजाक्ष
Accuracy—परिशुद्धता
Accurate—परिशुद्ध
Aggregate—योग
Algebra—बीजगणित
Ambiguous—संदिग्ध
Analysis—विश्लेषण
Antilog—प्रतिलघुगणक
Applied—व्यावहारिक
Approximation—सन्निकटता
Arithmetic—अंकगणित
Arrange—अनुविन्यसन
Array—अनुविन्यास
Ascending—आरोही
Association—सम्वन्ध
Assumed—काल्पनिक
Assumption—परिकल्पना
Asymmetrical—असंमित
Attribute—गुण
Average—माध्य या मध्यक
Axis—अक्ष

B

Band—पट्टीदार
Bar—दण्ड
Base—आधार
Biassed—अभिनत
Binomial—द्विपद

C

Calculation—गणना
Census—संगणना
Chain—श्रृंखला
Chance—दैव
Characteristic—विशेषता, पूर्णांश
Chart—चित्र
Class—वर्ग
Coefficient—गुणक
Collection—संकलन
Column—स्तम्भ
Comparison—तुलना
Composite—संग्रथित
Concurrent—संगामी
Consistent—संगत
Constant—अचल
Continuous—अविच्छिन्न
Correlation—सहसम्वन्ध
Co-variation—सह विचरण
Cumulative—संचयी
Curve—वक्र
Cyclic—चक्रीय

D

Data—समंक
Decile—दशांश
Degree—माप, परिमाण
Deliberate—सविचार
Denominator—हर
Derivative—व्युत्पन्न
Descending—अवरोही
Deviation—विचलन
Diagram—चित्र
Dichotomy—द्वन्दभाजन
Digit—अंक
Dimension—माप
Direct—प्रत्यक्ष
Discrete—विच्छिन्न
Dispersion—अपकिरण
Distribution—वितरण

E

Eliminate—समाप्त करना
Enquiry—जाँच
Enumerate—प्रगणन
Enumeration—प्रगणन
Enumerator—प्रगणक
Equation—समीकरण
Error—विभ्रम
Estimate—अनुमान करना
Estimation—अनुमान
Even—युग्म
Exclusive—अपवर्जी
Expectation—आशंसा
Explicit—स्पष्ट
Extrapolation—बाह्यगणन

F

Factor—खंड, तत्व
Facts—तथ्य
Fallacy—भ्रांति
Finite—परिमित
Fitting—अन्वायोजन
Fluctuation—उच्चावचन
Forecasting—पूर्वानुमान
Formula—सूत्र
Frequency—आवृत्ति

G

Geometric Mean—गुणोत्तर मध्यक
Graph— विन्दुरेख, रेखाचित्र
Group—वर्ग
Grouping—वर्गण

H

Harmonic Mean—हरात्मक मध्यक
Hetrogeneous—विषम
Histogram—आवृत्ति चित्र
Histotigram—कालिक चित्र
Homogeneity—सहजातीयता
Historical Series—कालान्तर माला

I

Illustration—उदाहरण
Inclusive—समावेशी
Index Number—निर्देशांक
Inertia—जड़ता
Infinite—अनन्त
Interpolation—आन्तर-गणन
Interval—अन्तर, मध्यान्तर
Investigation—अनुसंधान

K

Kurtosis— पृथु-शीर्षत्व

L

Least Square—न्यूनतम वर्ग
Line of Best Fit—सर्वोपयुक्त अन्वायोजन रेखा
Link—सम्बन्ध
Logarithm—लघुगणक

M

Magnitude—विस्तार
Manifold—बहुगुण
Mean—माध्य, मध्यक
Median—मध्यका
Mode—भूयिष्ठक
Moving Average—चल माध्य

N

Natural—प्राकृतिक
Negative—विलोम, ऋणात्मक
Normal—सामान्य

O

Observation—अवलोकन
Odd—अयुग्म
Origin—मूल
Oscillation—उच्चावचन

P

Parabola—एकेन्द्र
Peak—चोटी
Partial—आंशिक
Percentile—शतांश
Periodicity—आवर्तिता
Perpendicular—लम्ब
Pictogram—चित्र लेख
Plot—प्रांकित करना
Positive—अनुलोम, धनात्मक
Primary—प्राथमिक
Probability—संभावना
Probable—संभाव्य
Procedure—प्रक्रिया
Proportion—समानुपात

Q

Quadratic Mean—वर्गकरणी माध्य
Quantity—परिमाण
Quartile—चतुर्थांश
Questionnaire—प्रश्नावली
Quintile—पंचमांश

R

Radius—त्रिज्या
Random—दैव
Range—विस्तार
Ratio—अनुपात
Reciprocal—व्युत्क्रम
Regression—प्रतीप-गमन
Regularity—नियमिता
Relative—सापेक्षिक
Representative—प्रतिनिधि
Reversal—उत्क्रमण

S

Sample—न्यादर्श
Sampling—निदर्शन
Scale—माप श्रेणी
Scatter Diagram—विक्षेप चित्र
Schedule—अनुसूची
Seasonal—आर्तव, मौसमी
Secondary – द्वितीयक
Secular—सुदीर्घकालीन
Series—माला, श्रेणी
Significant—महत्वपूर्ण
Size—आकार
Skewness—विषमता
Smoothed—सरलित
Standard Deviation—प्रमाप विचलन
Statistics—सांख्यिकी, समंक
Stratified—मिश्रित
Survey—अनुसंधान
Symmetrical—संमित

T

Table—तालिका, सारिणी
Tabulation—सारणीयन
Time Series—कालान्तर माला
Trend—प्रवृत्ति

U

Unbiassed—अनभिनत
Uniformity—एकरूपता
Unit—इकाई
Universe—समग्र

V

Value—मूल्य
Variable—चल-मूल्य
Variance—विचरण
Variate—चल-मूल्य
Variation—विचरण

W

Weight—भार

X

X-axis—य–अक्ष

Y

Y-axis—र–अक्ष

परिशिष्ट (स)

संदर्भ (References)

Allen, R. G. D. — Statistics for Economist (*Hutchinson*)

Arkin, H. & Colton, R. R. — Statistical Methods (*Barnes and Noble, N. Y.*)

Blair, M. M — Elementary Statistics (*Henry Holt*)

Boddington, A. L. — Statistics and their Application to Commerce (*H. F. L., London*)

Bowley, A. L. — Elementary Manual of Statistics (*Macdonald and Evans, London*)

Bowley, A. L. — Elements of Statistics (*King and Staples, London*)

Brookes and Dick — An Introduction to Statistical Method (Heineman)

Chaturvedi, J. C. — Mathematical Statistics (*Students' Friends, Agra*)

Connor, L. R. — Statistics in Theory and Practice (*Pitman*)

Croxton & Cowden — Applied General Statistics (*Prentice Hall, N. Y.*)

Croxton & Cowden — Practical Business Statistics (*Prentice Hall, N. Y.*)

Dixon & Massey — Introduction to Statistical Analysis (*Mc-Graw Hill, N. Y.*)

Elhance, D. N. — Fundamentals of Statistics (*Kitab Mahal, Allahabad*)

Elhance D. N. — Practical Problems in Statistics (*Kitab Mahal, Allahabad*)

Fisher, Irving — Making of Index Numbers (*H. M. Co., Boston*)

Ghosh & Chaudhri — Statistics : Theory and Practice (*Indian Press, Allahabad*)

Gupta, C. B. — An Introduction to Statistical Method (*R. P. & Sons, Agra*)

Holmes, R. I. A. — Statistics for Professional Students (*Pitman & Sons, London*)

Johnson & Jackson	Introduction to Statistical Method (*Prentice Hall, N. Y.*)
Jones, D. C.	A First Course in Statistics (*J. Bell & Sons, London*)
Kenney & Keeping,	Mathematics of Statistics (*D. Van Nostrand Co., Inc. N. Y.*)
King, W. J.	Elements of Statistical Method (*Macmillan & Co., N. Y.*)
Levy & Preidel	Elementary Statistics (*Nelson*)
Lillian Cohen	Statistical Methods for Social Scientist (*Prentice Hall, N. Y.*)
Mills, F.	Statistical Methods (*Henry Holt*)
Moroney, M. J.	Facts from Figures (*Penguin*)
Mudgett, B. D.	Index Numbers (*Wiley, N. Y.*)
Neiswanger, W. A,	Elementary Statistical Methods (*Macmillan & Co., N. Y.*)
Rhodes, E. C.	Elementary Statistical Methods (*Routledge*)
Riegel, R.	Elements of Business Statistics (*Appleton, London*)
Secrist, H.	An Introduction to Statistical Methods (*Macmillan & Co., N. Y.*)
Smith & Duncan	Elementary Statistics and their Applications (*Mc-Graw Hill*)
Tippet, L. H. C.	Statistics (*Oxford U. Press, London*)
Walker, H. M.	Elementry Statistical Methods (*Henry Holt, N. Y.*)
Waugh, A. E.	Elements of Statistical Methods (*Mc-Graw Hill, N. Y.*)
Westergard, H.	Contributions to the History of Statistics (*King*)
Wheldon, H. J.	Business Statistics and Statistical Method (*Macdonald & Evans*)
Yule & Kendall	An Introduction to the Theory of Statistics (*Charles Griffin & Co.,*)